Feuille 4 solutions

1.

1.1. On a $d\vec{r} = d(r\vec{u}_r + z\vec{k}) = dr\,\vec{u}_r + r\,d\vec{u}_r + dz\,\vec{k}$ et

$$d\vec{u}_r = d(\vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta) = -\sin\theta\,d\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,d\theta\,\vec{j} = \vec{u}_\theta\,d\theta.$$

Alors

$$d\vec{r} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + dz\,\vec{k}.$$

Le repère $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k}\}$ étant orthonormé, on obtient également

$$||d\vec{r}|| = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2}.$$

1.2. On a

$$d\vec{u}_r = \vec{i}(\cos\theta\cos\phi\,d\theta - \sin\theta\sin\phi\,d\phi) + \vec{j}(\cos\theta\sin\phi\,d\theta + \sin\theta\cos\phi\,d\phi) - \vec{k}\sin\theta\,d\theta = \vec{u}_\theta\,d\theta + \sin\theta\,\vec{u}_\phi\,d\phi$$

et alors

$$d\vec{r} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\vec{u}_r = dr\,\vec{u}_r + r\,\vec{u}_\theta\,d\theta + r\sin\theta\,\vec{u}_\phi\,d\phi.$$

Le repère $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi\}$ étant orthonormé, on obtient également

$$||d\vec{r}|| = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2}.$$

2. En coordonnées cartesiennes le gradient et le laplacien d'une fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ sont donnés par

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}), \qquad \Delta f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}.$$

Alors on obtient pour $f = x^2 + y^2$

$$\nabla f = (2x, 2y) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}, \qquad \Delta f = 4$$

et pour $g = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\nabla g = (\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}), \qquad \Delta g = -\frac{3xy^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} + \frac{-x^3+2xy^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

En coordonnées polaires on a les formules

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + r^{-1}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta, \qquad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + r^{-1}\frac{\partial f}{\partial r} + r^{-2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

Alors pour $f = x^2 + y^2 = r^2$ on obtient

$$\nabla f = 2r\vec{u}_r, \qquad \Delta f = 2 + r^{-1}\cdot 2r = 4$$

et pour $g = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta$

$$\nabla g = -r^{-1}\sin\theta\vec{u}_\theta, \qquad \Delta g = -r^{-2}\cos\theta.$$

On vérifie facilement que le résultat est le même en coordonnées polaires et cartesiennes.

3. En coordonnées cartesiennes la divergence d'un champ de vecteurs $\vec{u} = \sum_k u_k\vec{e}_k$ est donnée par $\operatorname{div}\vec{u} = \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$. Cela donne

$$\begin{aligned}\operatorname{div} V &= \frac{\partial}{\partial x}(2xe^{2z}\sin y) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2e^{2z}\cos y) + \frac{\partial}{\partial z}(2x^2e^{2z}\sin y) = 2e^{2z}\sin y - x^2e^{2z}\sin y + 4x^2e^{2z}\sin y \\ &= (3x^2+2)e^{2z}\sin y.\end{aligned}$$

Le rotationnel d'un champ de vecteurs $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$ en coordonnées cartesiennes en $\mathbb{R}^3$ est donné par

$$\operatorname{rot}\vec{u} = (\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x})\vec{j} + (\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y})\vec{k}.$$

On observe que $2xe^{2z}\sin y = \frac{\partial f}{\partial x}$, $x^2e^{2z}\cos y = \frac{\partial f}{\partial y}$, $2x^2e^{2z}\sin y = \frac{\partial f}{\partial z}$ pour $f = x^2e^{2z}\sin y$. Alors

$$\operatorname{rot} V = (\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x})\vec{j} + (\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y})\vec{k} = 0.$$

En coordonnées cylindriques la divergence d'un champ de vecteurs $\vec{v} = v_r\vec{u}_r + v_\theta\vec{u}_\theta + v_z\vec{k}$ est donnée par

$$\operatorname{div}\vec{v} = r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + r^{-1}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Alors

$$\operatorname{div} W = r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta) + r^{-1}\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial z}{\partial z} = 2\sin\theta - \sin\theta + 1 = \sin\theta + 1.$$

Le rotationnel est donné par

$$\operatorname{rot}\vec{v} = (r^{-1}\frac{\partial v_z}{\partial\theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z})\vec{u}_r + (\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r})\vec{u}_\theta + r^{-1}(\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta})\vec{k}.$$

Alors on obtient

$$\operatorname{rot} W = r^{-1}(\frac{\partial}{\partial r}(r^2\cos\theta) - \frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial\theta})\vec{k} = r^{-1}(2r\cos\theta - r\cos\theta)\vec{k} = \cos\theta\,\vec{k}.$$

4. Soit $v = \sum_k v_k\vec{e}_k$. On a $f\vec{v} = \sum_k (fv_k)\vec{e}_k$ et

$$\operatorname{div}(f\vec{v}) = \sum_k \frac{\partial(fv_k)}{\partial x_k} = \sum_k (f\frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial x_k}v_k).$$

D'autre côté,

$$f\operatorname{div}\vec{v} + \nabla f\cdot\vec{v} = f\sum_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k}v_k.$$

Il suit que $\operatorname{div}(f\vec{v}) = f\operatorname{div}\vec{v} + \nabla f\cdot\vec{v}$.

On a

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = \Delta f.$$

L'égalité $\operatorname{rot}\nabla f = 0$ a été prouvé à l'exo précédent.

5. En coordonnées sphériques la fonction s'écrit $f_\alpha = r^{2\alpha}$. On a en général

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}.$$

Alors

$$\Delta f_\alpha = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(2\alpha r^{2\alpha+1}) = 2\alpha(2\alpha+1)r^{2\alpha-2}.$$

Cette expression s'annule pour $\alpha = 0$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$. La première solution correspond à la fonction constante 1, la deuxième à $f = r^{-1}$.