Feuille 3 solutions

1.

1.1. Si $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$ alors f est une constante.

1.2. Si les dérivées d'ordre 2 s'annulent alors les dérivées d'ordre 1 sont constantes par le point précédent. On note $\frac{\partial f}{\partial x} = a$, $\frac{\partial f}{\partial y} = b$. Alors $f = ax + by + c$ et on obtient les fonctions affines.

1.3. On note $f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. L'équation s'écrit $\frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$. Il suit que f_2 est une fonction de x, $f_2(x, y) = h(x)$. Pour la fonction f_1 on obtient $\frac{\partial f_1}{\partial x} = h(x)$ et alors

$$f_1(x, y) = f_1(0, y) + \int_0^x h(t)\, dt.$$

De la même manière

$$f(x, y) = f(0, y) + \int_0^x (f_1(0, y) + \int_0^s h(t)\, dt)\, ds = f(0, y) + x f_1(0, y) + \int_0^x \int_0^s h(t)\, dt\, ds.$$

Ici on peut choisir $f(0, y) = h_0(y)$ et $f_1(0, y) = h_1(y)$ comme deux fonctions arbitraires 3 fois dérivables de y. Le double intégral est une fonction de x qui s'annule avec sa première dérivée à $x = 0$.

2. On remplace les dérivées par rapport à s, t par les dérivées par rapport à u, v.

$$\frac{\partial f}{\partial(s, t)} = \frac{\partial f}{\partial(u, v)} \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} = (\frac{\partial f}{\partial u}\ \frac{\partial f}{\partial v}) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'équation devient

$$2(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}) - (\frac{\partial f}{\partial u} + 2\frac{\partial f}{\partial v}) = \frac{\partial f}{\partial u} = 0.$$

Donc f est une fonction arbitraire de v, $f(u, v) = h(v)$. En revenant aux variables s, t on obtient $f(s, t) = h(s + 2t)$.

3. On remplace les dérivées par rapport à u, v par les dérivées par rapport à s, t.

$$\frac{\partial f}{\partial(u, v)} = \frac{\partial f}{\partial(s, t)} \frac{\partial(s, t)}{\partial(u, v)} = (\frac{\partial f}{\partial s}\ \frac{\partial f}{\partial t}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a aussi $u = s$, $v = \frac{3s-t}{2}$. Alors l'équation devient

$$2(\frac{\partial f}{\partial s} + 3\frac{\partial f}{\partial t}) + 3(-2\frac{\partial f}{\partial t}) = 2\frac{\partial f}{\partial s} = s\frac{3s - t}{2}.$$

On obtient

$$f(s, t) = f(0, t) + \int_0^s \frac{w(3w - t)}{4}\, dw = f(0, t) + \frac{1}{4}[w^3 - t\frac{w^2}{2}]_0^s = h(t) + \frac{s^3}{4} - t\frac{s^2}{8},$$

où $h(t)$ est une fonction arbitraire. En revenant aux variables u, v on obtient

$$f(u, v) = h(3u - 2v) + \frac{u^3}{4} - \frac{u^2(3u - 2v)}{8} = h(3u - 2v) - \frac{u^3}{8} + \frac{u^2 v}{4}.$$

4. On a

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \phi)} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial(r, \phi)}{\partial(x, y)} = (\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \phi)})^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -r^{-1}\sin\phi & r^{-1}\cos\phi \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)} = \frac{\partial f}{\partial(r,\phi)} \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -r^{-1}\sin\phi & r^{-1}\cos\phi \end{pmatrix}$$

l'équation devient

$$r\cos\phi(\cos\phi\frac{\partial f}{\partial r} - r^{-1}\sin\phi\frac{\partial f}{\partial\phi}) + r\sin\phi(\sin\phi\frac{\partial f}{\partial r} + r^{-1}\cos\phi\frac{\partial f}{\partial\phi}) = r\frac{\partial f}{\partial r} = ar.$$

On obtient $\frac{\partial f}{\partial r} = a$ et

$$f(r,\phi) = h(\phi) + ar$$

avec h une fonction arbitraire.

5. Déduisons d'abord la formule de transformation des dérivées d'ordre 2 sous une changement de variables $x_1,\dots,x_n$ à $y_1,\dots,y_n$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_k}.$$

De la même façon

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_i \frac{\partial}{\partial y_i}(\sum_j \frac{\partial f}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_k})\frac{\partial y_i}{\partial x_l} = \sum_i\sum_j \frac{\partial y_j}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial y_i}(\frac{\partial f}{\partial y_j})\frac{\partial y_i}{\partial x_l} + \sum_i\sum_j \frac{\partial f}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial y_i}(\frac{\partial y_j}{\partial x_k})\frac{\partial y_i}{\partial x_l}.$$

Pour transformer l'expression dans le deuxième terme on calcule

$$\frac{\partial}{\partial y_i}(\frac{\partial y_j}{\partial x_k}) = \sum_m \frac{\partial}{\partial x_m}(\frac{\partial y_j}{\partial x_k})\frac{\partial x_m}{\partial y_i}.$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_l} &= \sum_{i,j}\frac{\partial y_j}{\partial x_k}\frac{\partial y_i}{\partial x_l}\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\partial y_j} + \sum_{i,j}\frac{\partial f}{\partial y_j}\frac{\partial y_i}{\partial x_l}\sum_m \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_k\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial y_i} \\
&= \sum_{i,j}\frac{\partial y_j}{\partial x_k}\frac{\partial y_i}{\partial x_l}\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\partial y_j} + \sum_{j}\frac{\partial f}{\partial y_j}\sum_m \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_k\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x_l} \\
&= \sum_{i,j}\frac{\partial y_j}{\partial x_k}\frac{\partial y_i}{\partial x_l}\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\partial y_j} + \sum_{j}\frac{\partial f}{\partial y_j}\frac{\partial^2 y_j}{\partial x_k\partial x_l}.
\end{aligned}$$

Si le changement de variables est *linéaire* alors $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ et on a la formule simplifiée

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_l} = \sum_{i,j}\frac{\partial y_j}{\partial x_k}\frac{\partial y_i}{\partial x_l}\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\partial y_j}.$$

Si on note $J = \frac{\partial y}{\partial x}$ la Jacobienne du changement, la formule s'écrit sous forme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = J^T\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}J,$$

où $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sont les Hessiennes de f dans le système x et y de variables.

L'équation à résoudre s'écrit

$$\operatorname{tr}(\frac{\partial^2 f}{\partial(x,y)^2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}) = 0.$$

La Jacobienne du changement est donnée par $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. En variables u, v l'équation dévient

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \frac{\partial^2 f}{\partial(u,v)^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \operatorname{tr}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial(u,v)^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T\right) \\ &= \operatorname{tr}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial(u,v)^2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 4\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 0.\end{aligned}$$

La solution de cette équation est donnée par $f(u,v) = h_0(v) + uh_1(v)$ avec h_0, h_1 des fonctions arbitraires. Finalement on obtient

$$f(x,y) = h_0(x+y) + (x-y)h_1(x+y).$$

6. On veut développer f dans une serie de puissances de $u = x - x_0$ et $v = y - y_0$. On écarte toute puissance d'ordre 3 et plus haute et obtient

$$\begin{aligned}x^2y^2 &= (u+1)^2(v+1)^2 = (u^2+2u+1)(v^2+2v+1) \\ &= 1 + (2u+2v) + (u^2+4uv+v^2) + O((u,v)^3) \\ &= 1 + 2(x-1) + 2(y-1) + (x-1)^2 + 4(x-1)(y-1) + (y-1)^2 + O((x-1,y-1)^3), \\ \sin(xy) &= xy - \frac{1}{6}(xy)^3 + \cdots = xy + O((x,y)^3), \\ x^3y^2 - 2xy^4 + y^5 &= (u+1)^3(v+2)^2 + (v+2)^4(-2(u+1) + (v+2)) \\ &= (3u^2+3u+1)(v^2+4v+4) + (16+32v)(-2u+v) + O((u,v)^3) \\ &= 4 + 12u + 4v - 32u + 16v + 12u^2 + 12uv + v^2 - 64uv + 32v^2 + O((u,v)^3) \\ &= 4 - 20u + 20v + 12u^2 - 52uv + 33v^2 + O((u,v)^3) \\ &= 4 - 20(x-1) + 20(y-2) + 12(x-1)^2 - 52(x-1)(y-2) + 33(y-2)^2 + O((x-1,y-2)^3).\end{aligned}$$

7. On calcule les dérivées partielles de f.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Le développement de Taylor d'ordre 2 s'écrit alors, avec les dérivées partielles évaluées à $x = x_0$, $y = y_0$,

$$\begin{aligned}f(x,y) &= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-y_0)^2 + O((x-x_0, y- \\ &= 5 + \frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4) + \frac{8}{125}(x-3)^2 - \frac{12}{125}(x-3)(y-4) + \frac{9}{250}(y-4)^2 + O((x-3,y-4)^3).\end{aligned}$$

On note $h = (0.1, 0.02)$ et $L = f(a) + df_a(h)$ l'approximation de $f(a+h) = f(3.1, 4.02)$ par la valeur du polynôme de Taylor d'ordre 1. A l'extérieur du disque de rayon 5 les dérivées partielles de f d'ordre 2 sont bornées par $\frac{1}{5}$. L'erreur $f(a+h) - L$ est donc borné par

$$\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}h_1^2 + h_1h_2 + \frac{1}{2}h_2^2\right) = \frac{1}{5}(0.005 + 0.002 + 0.0004) = 0.00148 < 0.002.$$