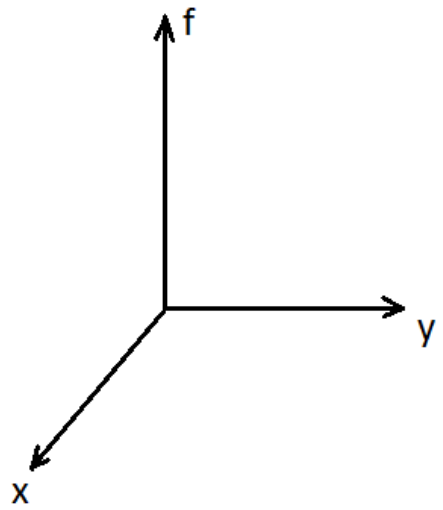

Figure 1: Exo 2: Repère sur les dessins

Feuille 2 solutions

1. On note D_i pour le domaine de définition de f_i. On a

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{(x,y) \,|\, x \neq 0,\ y \neq 0\},\\
D_2 &= \{(x,y) \,|\, y \neq -x\},\\
D_3 &= \{(x,y) \,|\, (x,y) \neq (0,0)\},\\
D_4 &= \{(x,y) \,|\, xy > 0\} = \mathbb{R}^2_{++} \cup -\mathbb{R}^2_{++}.
\end{aligned}$$

2. D'abord on fait une classification grossière selon le type de fonction.

Fonctions linéaires: Dans cette classe on trouve les fonctions f_2, f_4, f_9, f_{15} et les dessins A, F, J.

Le plan horizontal A correspond à la fonction constante f_9.

Le graphe F ne passe pas par l'origine et la fonction représentée croit avec y. Ce comportement correspond à f_2, qui a une constante non-nulle et un coefficient positif devant y.

Le graphe J passe par l'origine. Donc la constante dans la fonction linéaire représentée est nulle et J correspond à f_4.

Fonctions trigonométriques: Dans cette classe on trouve les fonctions f_7, f_{11}, f_{13} et les dessins D, H.

Le graphe D ne passe pas par l'origine et correspond alors à f_{13}.

La fonction représentée par H et décroissante en x à $x = 0$ et est alors f_7.

Fonctions non-différentiables: Le seul graphe qui correspond à une telle fonction est C, et la seule fonction est f_{14}.

Autres fonctions: Il reste les dessins B, E, G, I, K, L et les fonctions $f_1, f_3, f_5, f_6, f_8, f_{10}, f_{12}$.

Les dessins E, K représentent des fonctions dépendantes de y seulement et correspondent à f_6, f_5, respectivement.

La fonction représentée par B possède un maximum à l'origine et est donc f_8.

La fonction représentée par G n'a ni un maximum ni un minimum à l'origine et est donc f_3.

La fonction représentée par I possède un minimum stricte à l'origine qui vaut zéro et est donc f_{10}.

La fonction représentée par L possède un minimum stricte à l'origine qui est négatif et est donc f_{12}.

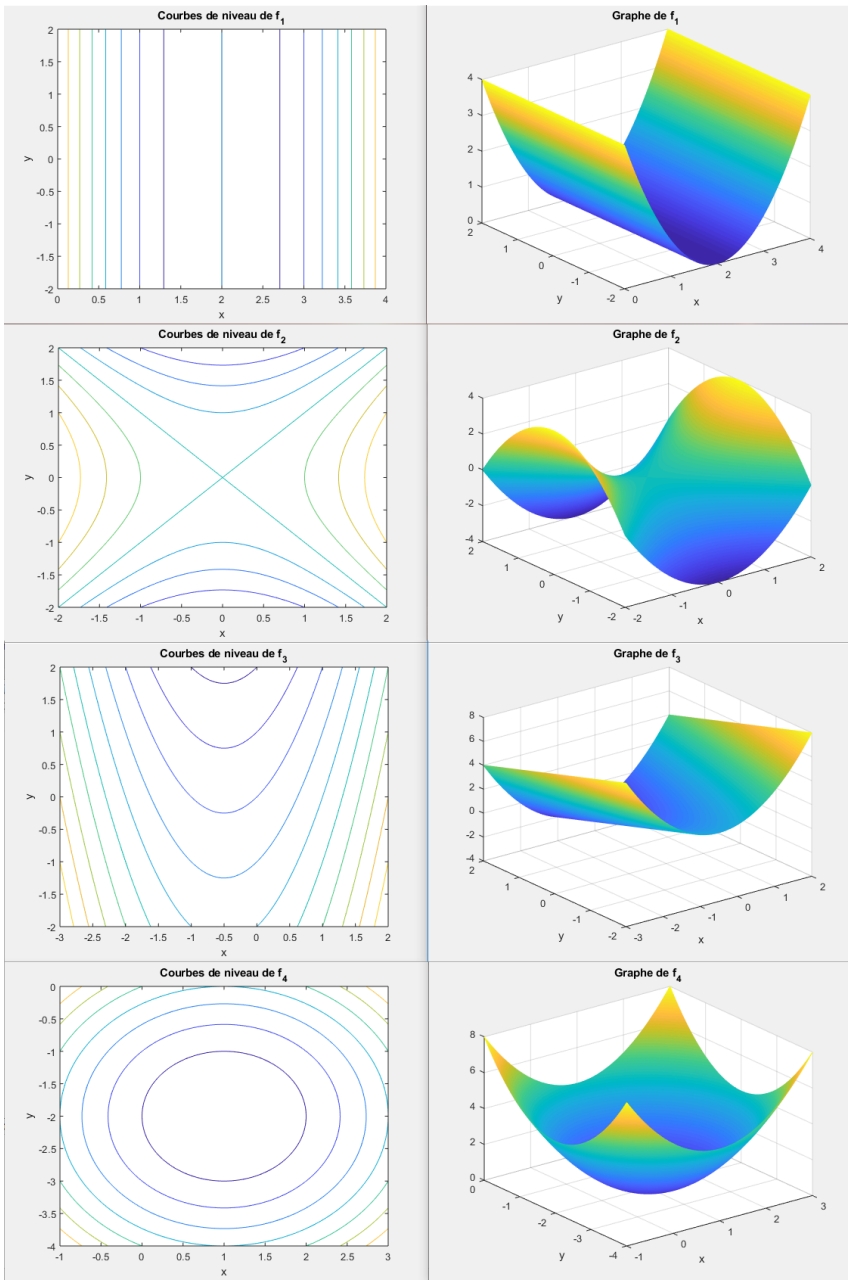

Figure 2: Exo 3: Courbes de niveau et graphes de f_i

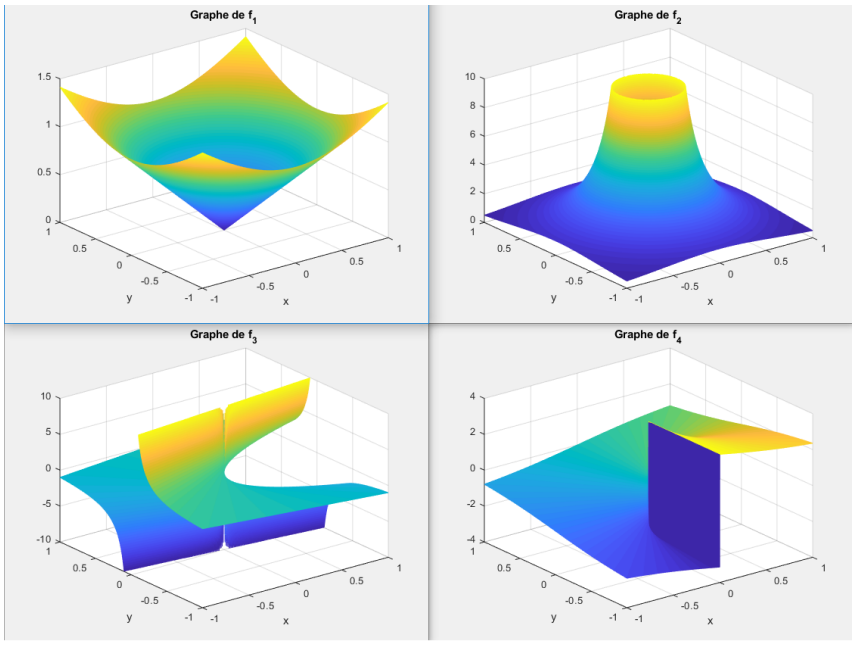

Figure 3: Exo 4: Graphes de f_i

4. On a

$$f_1 = r, \quad f_2 = r^{-2}, \quad f_3 = \tan\theta, \quad f_4 = \theta.$$

5. On note D_i pour le domaine de définition de f_i. On a

$$D_1 = D_3 = D_4 = D_5 = D_9 = \mathbb{R}^2, \quad D_2 = \{(x,y) \,|\, y \neq -x\}, \quad D_6 = D_7 = D_8 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Les dérivées partielles sont données par

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x} &= 16x^3y^2 - 6xy^3 + y & \frac{\partial f_1}{\partial y} &= 8x^4y - 9x^2y^2 + x - 1\\
\frac{\partial f_2}{\partial x} &= \frac{2y}{(x+y)^2} & \frac{\partial f_2}{\partial y} &= -\frac{2x}{(x+y)^2}\\
\frac{\partial f_3}{\partial x} &= 2x + y^2 & \frac{\partial f_3}{\partial y} &= 2xy - 20y^3\\
\frac{\partial f_4}{\partial x} &= 2xy\cos(x^2y) & \frac{\partial f_4}{\partial y} &= x^2\cos(x^2y)\\
\frac{\partial f_5}{\partial x} &= e^{xy}(y\sin x + \cos x) & \frac{\partial f_5}{\partial y} &= e^{xy}x\sin x\\
\frac{\partial f_6}{\partial x} &= \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{\partial f_6}{\partial y} &= \frac{y}{x^2+y^2}\\
\frac{\partial f_7}{\partial x} &= \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{\partial f_7}{\partial y} &= -\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}\\
\frac{\partial f_8}{\partial x} &= \frac{y(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \frac{\partial f_8}{\partial y} &= \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\\
\frac{\partial f_9}{\partial x} &= \frac{-2x+y}{(x^2-xy+y^2+1)^2} & \frac{\partial f_9}{\partial y} &= \frac{x-2y}{(x^2-xy+y^2+1)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} &= 48x^2y^2 - 6y^3 & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y} &= 32x^3y - 18xy^2 + 1 & \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} &= 8x^4 - 18x^2y\\
\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} &= -\frac{4y}{(x+y)^3} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial y} &= \frac{2(x-y)}{(x+y)^3} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} &= \frac{4x}{(x+y)^3}\\
\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} &= 2 & \frac{\partial^2 f_3}{\partial x\partial y} &= 2y & \frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} &= 2x - 60y^2\\
\frac{\partial^2 f_4}{\partial x^2} &= -4x^2y^2\sin(x^2y) + 2y\cos(x^2y) & \frac{\partial^2 f_4}{\partial x\partial y} &= -2x^3y\sin(x^2y) + 2x\cos(x^2y) & \frac{\partial^2 f_4}{\partial y^2} &= -x^4\sin(x^2y)\\
\frac{\partial^2 f_5}{\partial x^2} &= e^{xy}((y^2-1)\sin x + 2y\cos x) & \frac{\partial^2 f_5}{\partial x\partial y} &= e^{xy}((xy+1)\sin x + x\cos x) & \frac{\partial^2 f_5}{\partial y^2} &= x^2e^{xy}\sin x\\
\frac{\partial^2 f_6}{\partial x^2} &= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{\partial^2 f_6}{\partial x\partial y} &= -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{\partial^2 f_6}{\partial y^2} &= \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

$\frac{\partial^2 f_7}{\partial x^2} = \frac{4y^2(-3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3}$ $\quad$ $\frac{\partial^2 f_7}{\partial x \partial y} = \frac{8xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$ $\quad$ $\frac{\partial^2 f_7}{\partial y^2} = \frac{4x^2(-x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$

$\frac{\partial^2 f_8}{\partial x^2} = \frac{2xy(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$ $\quad$ $\frac{\partial^2 f_8}{\partial x \partial y} = \frac{-x^4+6x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^3}$ $\quad$ $\frac{\partial^2 f_8}{\partial y^2} = \frac{2xy(-3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3}$

$\frac{\partial^2 f_9}{\partial x^2} = \frac{6x^2-6xy-2}{(x^2-xy+y^2+1)^3}$ $\quad$ $\frac{\partial^2 f_9}{\partial x \partial y} = \frac{-3x^2+9xy-3y^2+1}{(x^2-xy+y^2+1)^3}$ $\quad$ $\frac{\partial^2 f_9}{\partial y^2} = \frac{-6xy+6y^2-2}{(x^2-xy+y^2+1)^3}$

6. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}+2\frac{\partial f}{\partial y} = ((x+1)e^{x+y})+2(xe^{x+y}) = (3x+1)e^{x+y}, \quad 3\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y} = 3\frac{2y}{(x+y)^2}-(-\frac{2x}{(x+y)^2}) = \frac{6y+2x}{(x+y)^2}.$$

7. On a

$df_1 = e^x dx + 2ydy$ $\quad$ $df_1[p_1] = (1,0)$

$df_2 = \cos x \cos y\, dx - \sin x \sin y\, dy$ $\quad$ $df_2[p_2] = (0,0)$

$df_3 = \frac{2}{2x-3y}dx - \frac{3}{2x-3y}dy$ $\quad$ $df_3[p_3] = (\frac{2}{5}, -\frac{3}{5})$

$df_4 = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy$ $\quad$ $df_4[p_4] = (2,3)$

8. Une condition nécessaire et localement suffisante pour que $\omega = g_1dx+g_2dy$ soit exacte est $\frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{\partial g_2}{\partial x}$. Elle est satisfaite pour les formes ω_1, ω_3 et elle ne l'est pas pour ω_2, ω_4. On vérifie

$$\omega_1 = d\frac{x^2+y^2}{2}, \qquad \omega_3 = d(xy).$$

9. On a $\omega = g_1dx+g_2dy+g_3dz = \frac{2yz}{(x+y)^2}dx - \frac{2xz}{(x+y)^2}dy + \frac{x-y}{x+y}dz$. Une condition nécessaire et localement suffisante pour l'existence d'un potentiel f tel que $\omega = df$ sont les relations

$$\frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{\partial g_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial g_1}{\partial z} = \frac{\partial g_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial z} = \frac{\partial g_3}{\partial y}$$

et elles sont vérifiées par ω. Le potentiel a la forme

$$f = \frac{x-y}{x+y}z + const$$

avec une constante réelle arbitraire.

10. On a $\sin t = O(1)$. Alors $f(x,y) = O(r^2) = o(r)$ dans le voisinage de l'origine. Alors f est continue et différentiable à l'origine et ses dérivées partielles sont nulles dans ce point. Ailleurs on calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Les dérivées partielles sont bornées mais n'ont pas de limite si on s'approche de l'origine et ne sont donc pas continues.

11. On a $f(x,y) = O(r^2) = o(r)$ dans le voisinage de l'origine. Alors f est continue et différentiable à l'origine et ses dérivées partielles sont nulles dans ce point. Ailleurs on calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} = O(r), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = O(r).$$

Les dérivées partielles de f tendent alors vers 0 si on s'approche de l'origine. Il suit que ces dérivées sont continues et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

On a $df_{(0,0)} = 0$ et

$$df_{(1,1)} = \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}|_{(x,y)=(1,1)}dx + \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}|_{(x,y)=(1,1)}dy = dx$$

12. Le vecteur $\vec{u}_r$ est proportionnel au vecteur $\overrightarrow{OP} = (x, y)$ et de norme 1, tandis que $\vec{u}_\theta$ est proportionnel au vecteur $(-y, x)$ et de norme 1. En coordonnées cartesiennes on a alors $\vec{u}_r = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$, $\vec{u}_\theta = (-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})$. Les composantes sont à interpreter comme coefficients dans la base $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$.

Pour passer à la base $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}$ il faut utiliser la Jacobienne

$$\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = (\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r^{-1}\sin\theta & r^{-1}\cos\theta \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\vec{u}_r = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta}) = \frac{\partial}{\partial r},$$

$$\vec{u}_\theta = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta}) = r^{-1}\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

13. On a

$$\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x+y^2 & 2xy \\ \cos(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} & 0 \\ -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

14.

14.1. La formule suit d'une manière triviale de la règle du produit.

14.2. On a $||\vec{F}||$ constant si et seulement si $||\vec{F}||^2 = \vec{F} \cdot \vec{F}$ est constant. Application de la formule mène à la conclusion désirée.