Feuille 7 solutions

1. Multiplication de matrices.
1.1.

$$AB = 0,$$
$$BA = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.2. AB n'est pas défini.

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.3. On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

BA n'est pas défini.

2.
(a) Oui.
(b) Oui.
(c) Non : contre-example $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
(d) Oui.

3.
(a) $\operatorname{rk} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 2$.
(b) $0 \leq \operatorname{rk} A \leq 3$.
(c) $\operatorname{rk} A = 1$.
(d) $\operatorname{nul} A \geq 4$.
(e) $0 \leq \operatorname{rk} A \leq 1$.
(f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.

$$P = uv^T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{rk} P = \begin{cases} 0, & a = b = c = 0, \\ 1, & (a, b, c) \neq (0, 0, 0). \end{cases}$$

$$P^k = (uv^T)(u \dots v^T)(uv^T) = u(v^T u) \dots (v^T u) v^T = (v^T u)^{k-1} uv^T = (a + 2b + 3c)^{k-1} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{Im} P = \begin{cases} \{0\}, & a = b = c = 0, \\ \{(\alpha, 2\alpha, 3\alpha)^T \mid \alpha \in \mathbb{R}\}, & (a, b, c) \neq (0, 0, 0). \end{cases}$$

$$\operatorname{nul} P = \operatorname{nul} v^T = \{(x,y,z)^T \mid ax+by+cz=0\}.$$

5.
5.1.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
5.2.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
5.3.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
5.4. La base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ est celle des monômes $\{x^2, x, 1\}$. Les éléments de base sont envoyés dans

$$\begin{aligned} x^2 &\mapsto 2(x+1)x^2 - (x^2-1)(2x) = 2x^2+2x, \\ x &\mapsto 2(x+1)x - (x^2-1)\cdot 1 = x^2+2x+1, \\ 1 &\mapsto 2(x+1) - (x^2-1)\cdot 0 = 2x+2. \end{aligned}$$

Alors la matrice de l'application est donnée par $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Ces colonnes contiennent les coefficients des images des monômes.

6.
6.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
6.2. Les vecteurs sont linéairement indépendents et forment donc une base.
6.3. Soit $A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix}$ la matrice de f dans la base B'. Alors

$$f(e'_1) = \begin{pmatrix} 6 & -1 \end{pmatrix} = a'_{11}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + a'_{21}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f(e'_2) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \end{pmatrix} = a'_{12}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + a'_{22}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La résolution de ces systèmes linéaires mène à

$$A' = \begin{pmatrix} 17 & 30 \\ -9 & -16 \end{pmatrix}.$$

6.4.
$$P = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad Q = P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$
6.5. On vérifie $A' = P^{-1}AP$.
6.6.
$$A^5 = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (A')^5 = P^{-1}A^5P = \begin{pmatrix} 197 & 330 \\ -99 & -166 \end{pmatrix}.$$

7.
7.1.
$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

7.2. La matrice de passage de $\{e_1, e_2, e_3\}$ à $\{u_1, u_2, u_3\}$ est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

la matrice du passage inverse est

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.3.

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

8.

8.1. $\operatorname{tr} AB = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}B_{ji} = \sum_{i,j=1}^n B_{ji}A_{ij} = \operatorname{tr} BA$.
8.2. $n = \operatorname{tr} I_n = \operatorname{tr}(AC + DB) = \operatorname{tr}(CA + BD) = \operatorname{tr} 0_n = 0$ implique $n = 0$, contradiction.
8.3. Soit A la matrice de u dans la base B, A' dans la base B', et soit P la matrice de passage. Alors

$$\operatorname{tr} A' = \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(APP^{-1}) = \operatorname{tr} A.$$

9.

$$Q(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$