Feuille 10 solutions

1. On détermine d'abord les points critiques, qui sont les solutions de l'équation $\nabla f = 0$. Pour chaque point critique on évalue la hessienne f''. Si $f'' \succ 0$, il s'agit d'un minimum local, si $f'' \prec 0$, il s'agit d'un maximum local. Si ni $f'' \succeq 0$, ni $f'' \preceq 0$, il s'agit d'un point col. Dans tout autre cas il faut considérer d'informations complémentares pour déterminer le type du point critique.

Par example, si f est une fonction quadratique, alors $f'' \succeq 0$ est suffisant pour un minimum et $f'' \preceq 0$ est suffisant pour un maximum.

1.1.

$$\nabla f = (-4x, -2y), \qquad f'' = \operatorname{diag}(-4, -2) \prec 0$$

Le seul point critique est $(x, y) = (0, 0)$, il s'agit d'un maximum.

1.2.

$$\nabla f = (2x, 2y), \qquad f'' = \operatorname{diag}(2, 2) \succ 0$$

Le seul point critique est $(x, y) = (0, 0)$, il s'agit d'un minimum.

1.3.

$$\nabla f = (2x - 2, 2y), \qquad f'' = \operatorname{diag}(2, 2) \succ 0$$

Le seul point critique est $(x, y) = (1, 0)$, il s'agit d'un minimum.

1.4.

$$\nabla f = (2y - 2x, 2x - 4y), \qquad f'' = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \prec 0$$

Le seul point critique est $(x, y) = (0, 0)$, il s'agit d'un maximum.

1.5.

$$\nabla f = (1 - 3x^2, -2y), \qquad f'' = \operatorname{diag}(-6x, -2)$$

Les deux points critiques sont $(x_{1/2}, y_{1/2}) = (\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$. La hessienne est donnée par

$$f''(x_1, y_1) = \operatorname{diag}(-2\sqrt{3}, -2) \prec 0, \qquad f''(x_2, y_2) = \operatorname{diag}(2\sqrt{3}, -2)$$

Dans le premier cas il s'agit d'un maximum, dans le deuxième cas d'un point col.

1.6.

$$\nabla f = (3 - 3x^2, 12 - 3y^2), \qquad f'' = \operatorname{diag}(-6x, -6y)$$

Les quatre points critiques sont $(x_{1/2/3/4}, y_{1/2/3/4}) = (\pm 1, \pm 2)$. La hessienne est donnée par

$$f''(1, 2) = \operatorname{diag}(-6, -12) \prec 0, \quad f''(1, -2) = \operatorname{diag}(-6, 12), \quad f''(-1, 2) = \operatorname{diag}(6, -12), \quad f''(-1, -2) = \operatorname{diag}(6, 12) \succ 0$$

Dans le premier cas il s'agit d'un maximum, dans le deuxième et troisième cas d'un point col, dans le dernier cas d'un minimum.

1.7.

$$\nabla f = (3x^2 + 2x - 2y, 3y^2 + 2y - 2x), \qquad f'' = \begin{pmatrix} 6x + 2 & -2 \\ -2 & 6y + 2 \end{pmatrix}$$

Le seul point critique est $(x, y) = (0, 0)$. La hessienne est donnée par

$$f''(1, 2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \succeq 0$$

Il pourrait s'agir d'un minimum, mais en fait ce ne l'est pas.

1.8.

$$\nabla f = (4x - 2y, 4y - 2x), \qquad f'' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \succ 0$$

Le seul point critique est $(x, y) = (0, 0)$, il s'agit d'un minimum.

1.9.

$$\nabla f = (4x^3 - 4x + 4y, 4y^3 - 4y + 4x), \qquad f'' = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Les trois points critiques sont $(x_{1/2/3}, y_{1/2/3}) = (0, 0); (-\sqrt{2}, \sqrt{2}); (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. La hessienne est donnée par

$$f''(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \preceq 0, \quad f''(\mp\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} \succ 0$$

Le premier point pourrait être un maximum, mais il ne l'est pas, dans les autres cas il s'agit de minima.

2.

2.1.

$$\nabla f = (2x, 0), \qquad f'' = \mathrm{diag}(2, 0) \succeq 0$$

Les points critiques sont situés sur la droite $x = 0$. Il s'agit des minima. Ces minima sont globaux, car $f(x, y) \geq 0$ en général et $f(0, y) = 0$.

2.2.

$$\nabla f = (y, x), \qquad f'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Le seul point critique est $(0, 0)$, il s'agit d'un col.

2.3.

$$\nabla f = (2x, -8y), \qquad f'' = \mathrm{diag}(2, -8).$$

Le seul point critique est $(0, 0)$, il s'agit d'un col.

2.4.

$$\nabla f = (2x + y, x + 2y), \qquad f'' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \succ 0.$$

Le seul point critique est $(0, 0)$, il s'agit d'un minimum. Ce minimum est global.

2.5.

$$\nabla f = (2x - y, -x + 2y), \qquad f'' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \succ 0.$$

Le seul point critique est $(0, 0)$, il s'agit d'un minimum. Ce minimum est global.

2.6.

$$\nabla f = (-4x + 4y + 4x^3, 4x - 4y + 4y^3), \qquad f'' = \begin{pmatrix} -4 + 12x^2 & 4 \\ 4 & -4 + 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Les points critiques sont $(0, 0)$ (col), $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ (minimum), $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (minimum). Les minima sont globaux.

2.7.

$$\nabla f = (2x, 4y, 6z), \qquad f'' = \mathrm{diag}(2, 4, 6) \succ 0$$

Le seul point critique est $(0, 0, 0)$, il s'agit d'un minimum. Ce minimum est global, car $f(x, y, z) \geq 0$ en général et $f(0, 0, 0) = 0$.

2.8.

$$\nabla f = (4x^3 - 4, 2y - 2, 2z - 2), \qquad f'' = \mathrm{diag}(12x^2, 2, 2) \succeq 0$$

Le seul point critique est $(1, 1, 1)$. La hessienne est donnée par $f''(1, 1, 1) = \mathrm{diag}(12, 2, 2) \succ 0$, il s'agit d'un minimum. Ce minimum est global, parce que la hessienne de f est semi-définie positive partout. En effet, la valeur de f est $f(1, 1, 1) = -1$. On a

$$f(x, y, z) - f(1, 1, 1) = ((x + 1)^2 + 2)(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 \geq 0,$$

donc le minimum est global.

2.9.

$$\nabla f = (6x-8(x+y+z)^3, 12y-8(x+y+z)^3, 6z-8(x+y+z)^3), \qquad f'' = \mathrm{diag}(6,12,6)-24(x+y+z)^2\mathbf{1}_3,$$

où $\mathbf{1}_3$ est la matrice de taille 3×3 avec toute entrée égale à 1. Les points critiques sont $(x,y,z) \in \{(0,0,0), (-\frac{\sqrt{30}}{25}, -\frac{\sqrt{30}}{50}, -\frac{\sqrt{30}}{25}), (\frac{\sqrt{30}}{25}, \frac{\sqrt{30}}{50}, \frac{\sqrt{30}}{25})$. La hessienne est donnée par

$$f''(0,0,0) = \mathrm{diag}(6,12,6) \succ 0,\ f''(\pm\frac{\sqrt{30}}{25}, \pm\frac{\sqrt{30}}{50}, \pm\frac{\sqrt{30}}{25}) = \mathrm{diag}(6,12,6) - \frac{36}{5}\mathbf{1}_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -6 & -36 & -36 \\ -36 & 24 & -36 \\ -36 & -36 & -6 \end{pmatrix}.$$

Le premier point est un minimum. Pour traiter les deux autres points, on utilise que pour une matrice symétrique H de taille $n\times n$ on a

$$\lambda_{\max}(H) = \max_{||x||=1} x^T H x \geq \max_i e_i^T H e_i = \max_i H_{ii},\ \lambda_{\min}(H) = \min_{||x||=1} x^T H x \leq \min_i e_i^T H e_i = \min_i H_{ii}.$$

Alors $\lambda_{\min}(f'') \leq -\frac{6}{5} < 0 < \frac{24}{5} \leq \lambda_{\max}(f'')$. Les deux autres points critiques sont alors des cols. Le minimum n'est pas global, parce que $f(a,a,a)$ tend vers $-\infty$ pour $a \to \pm\infty$.

2.10.

$$\nabla f = (1 - \frac{y^2}{4x^2}, \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2}, \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}), \qquad f'' = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2x^3} & -\frac{y}{2x^2} & 0 \\ -\frac{y}{2x^2} & \frac{2z^2}{y^3} + \frac{1}{2x} & -\frac{2z}{y^2} \\ 0 & -\frac{2z}{y^2} & \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \end{pmatrix}$$

Les deux points critiques sont $(x,y,z) = (\pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 1)$. La hessienne est donnée par

$$f''(\pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 1) = \pm\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Pour le premier point on a $f'' \succ 0$, pour le deuxième $f'' \prec 0$. Donc $(\frac{1}{2}, 1, 1)$ est un minimum et $(-\frac{1}{2}, -1, -1)$ un maximum. On a $f(\frac{1}{2}, 1, 1) = 4$ et $f(-\frac{1}{2}, -1, -1) = -4$. Les deux points critiques ne sont alors pas des extréma globaux. On note d'ailleurs que le domaine de f n'est pas connexe. Les deux points sont des extréma globaux si on restreint le domaine à la composante connexe correspondante ($\mathbb{R}^3_{++}$ pour le point $(\frac{1}{2}, 1, 1)$ et $-\mathbb{R}^3_{++}$ pour le point $(-\frac{1}{2}, -1, -1)$).

3. Soit $2x$ la longueur, $2y$ la largeur, et z la hauteur du parallélépipède. On a $x^2+y^2+z^2 = a^2$ et alors $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$. Le volume à maximiser est $V = 4xyz = 4xy\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. On obtient

$$\nabla V = (4y\sqrt{a^2-x^2-y^2} - \frac{4x^2y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, 4x\sqrt{a^2-x^2-y^2} - \frac{4y^2x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}})$$

Le système $\nabla V = 0$ est équivalent à $4y(a^2-2x^2-y^2) = 4x(a^2-x^2-2y^2) = 0$. Le seul point critique avec $x > 0$, $y > 0$ est $(x,y) = (\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}})$. Pour la hauteur on obtient aussi $z = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Donc il s'agit d'une moitie d'un cube.

4. Soit v le nombre de pièces vendus et P le profit. On a alors

$$v = 2000 + 4\sqrt{A} - 20p,$$

$$P = pv-(20000+2v+A) = -20000+(p-2)(2000+4\sqrt{A}-20p)-A = -A+2040p+4\sqrt{A}p-8\sqrt{A}-20p^2-24000$$

On maximise P par rapport à p et A. On a

$$\frac{\partial P}{\partial p} = -40p + 4\sqrt{A} + 2040, \qquad \frac{\partial P}{\partial A} = -1 + \frac{2(p-2)}{\sqrt{A}}$$

Le système $\nabla P = 0$ mène à $A = \frac{60025}{4} = 15006,25$, $p = \frac{253}{4} = 63,25$, $v = 1225$, $P = 40025$.