Exercices 1ère partie : analyse

A faire: 1,3,4,8 puis au moins 1 parmi 5,6,7
2 séances

1 Vecteurs et géométrie

Géométrie de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

L'espace est rapporté à un repère orthonormé.

1. Dessiner dans le plan les domaines donnés par les inégalités suivantes.
- $D_1 = \{(x,y) \mid 0 \leq x+y \leq 1,\ y > 0\}$
- $D_2 = \{(x,y) \mid x+y+1 \geq 0,\ x \leq 0,\ y \leq 0\}$
- $D_3 = \{(x,y) \mid |x+y| \leq 1,\ |x-y| \leq 1\}$
- $D_4 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 4\}$
- $D_5 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 > 1\}$
- $D_6 = \{(x,y) \mid x^2+y^2-2x-4y \leq 4\}$
- $D_7 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1, x > 0, y \geq 0\}$
- $D_8 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 4, x+y \geq 0\}$
- $D_9 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1, x+y \geq 1\}$
- $D_{10} = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1 \text{ ou } x+y \geq 1\}$

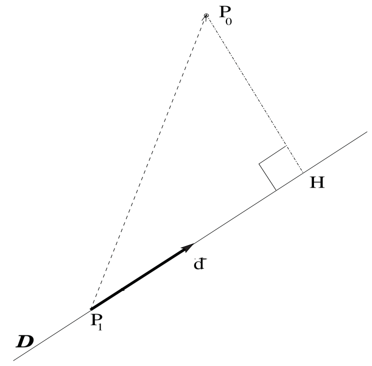
2. On considère quatre points A, B, C, D de l'espace. Déterminer la valeur d'expression
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}.$$

3. Soit A, B, C, D quatre points de l'espace. Calculer
$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}$$
et
$$\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{DA}.$$

4. Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace ; on rappelle la formule du double produit vectoriel :
$$\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\,\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{w} \quad \text{(Attention : l'ordre est important !).}$$
Calculer
$$\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})+\vec{v}\wedge(\vec{w}\wedge\vec{u})+\vec{w}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v}).$$

Rappel : On appelle *projection* orthogonale d'un point P_0 sur la droite D le point H de D t.q. la distance $d(P_0, H)$ est minimale parmi tous les points de la droite. La valeur

de ce minimum est appelée *la distance* de P_0 à D (cf. dessin si-dessous).



5. Soit D la droite d'équation $y = 2x-1$ et soit A le point $(1,2)$.

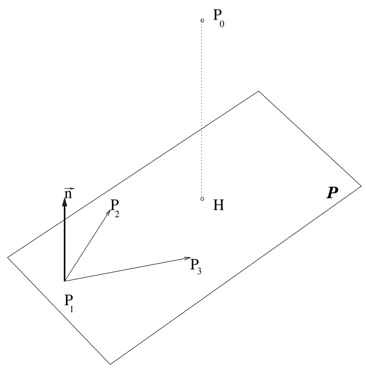
1. Exprimer en fonction de x le carre de la distance du point A au point $M(x, 2x-1)$ sur la droite. Montrer que cette fonction admet un minimum et en déduire la distance $d(A,D)$ du point A à la droite D, quelles sont les coordonnées de la projection H de A sur D.
2. Donner un vecteur directeur de D. Soit B le point $(-1,1)$, utiliser le calcul vectoriel pour trouver la distance de B à D.

6. Soient $P_1(3,1,-2)$ et $P_2(-1,2,4)$ deux points dans $\mathbb{R}^3$.

1. Trouver l'équation de la droite D qui passe par P_1 et P_2, calculer un vecteur-directeur $\vec{v}$ de D. Donner un vecteur-directeur de D de norme 1.
2. Calculer la distance de $P_0(1,3,-1)$ à la droite D.
3. Déterminer les coordonnées (x,y,z) de la projection orthogonale H de P_0 sur la droite D.

7. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les plans d'équation
$$\mathcal{P}_1 :\ 2x+3y+z-4=0;$$
$$\mathcal{P}_2 :\ 3x-y-3z-2=0.$$

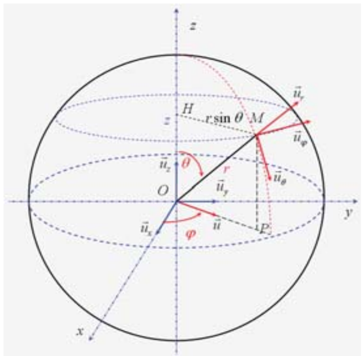
1. Montrer que les deux plans sont perpendiculaires.
2. Calculer la distance d'origine O du repère au plan $\mathcal{P}_1$, au plan $\mathcal{P}_2$, à la droite $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.
3. On considère la sphère $\mathcal{S}$ d'équation $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+2=0$. Le plan $\mathcal{P}_1$, coupe-t-il la sphère $\mathcal{S}$? La droite $\mathcal{D}$ coupe-t-elle la sphère $\mathcal{S}$?



Coordonnées polaires, cylindriques et sphériques

8.

1. En coordonnées polaires, que représentent respectivement les équations $r = constante$, $\theta = constante$?
2. En coorodonnées cylindriques, que représentent respectivement les équations $r = constante$, $\theta = constante$ et $z = constante$? Quelles sont les intersections de $r = constante$ et $\theta = constante$? De même pour $r = constante$ et $z = constante$?
3. En coordonnées sphériques, que représentent respectivement les équations $r = constante$, $\theta = constante$, $\phi = constante$? Quelles sont les intersections de $r = constante$ et $\theta = constante$? De même pour $r = constante$ et $\phi = constante$?



4. Soit C le cercle d'équation $(x-1)^2+y^2 = 1$. Donner l'équation de C en coordonnées polaire r et ϕ.

5. Exprimer en coordonnées cylindriques l'équation du cône de glace (dont l'équation en coordonnées cartésiennes est $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.)

Pour aller plus loin

9. Soit $\mathcal{D}_1$ la droite qui passe par le point M_1 et dont un vecteur directeur est $\vec{u}_1$, et soit $\mathcal{D}_2$ la droite qui passe par M_2 et dont un vecteur directeur est $\vec{u}_2$. On appelle la distance $d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ le minimum de la distance $d(M, M')$ entre les points $M \in \mathcal{D}_2$ et $M' \in \mathcal{D}_2$. Dans la suite on suppose que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires.

1. Soit $\mathcal{P}$ le plan parallèle aux $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ qui passe par le point M_1. Quelle est l'équation de $\mathcal{P}$? Montrer que pour tout point M' de la droite $\mathcal{D}_2$ la distance $d(\mathcal{P}, M') = d(\mathcal{P}, M_2)$, autrement dit que $\mathcal{D}_2$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$.
2. Calculer le volume du parallélépipède avec des cotés $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$. En déduire la distance entre le point M_2 et le plan $\mathcal{P}$. La distance entre les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

10. Un navigateur veut se rendre de Brest à New-York en suivant un arc de grand cercle sur l'Océan Atlantique. Calculer la longueur de cet arc Brest-New-York, connaissant le rayon terrestre $R = 6400$km et les coordonnées géographiques :

Brest : latitude $48^o50'N$, longitude 0^o

New-York : latitude $40^o40'N$, longitude $73^o50'W$.

Indication : *Soit deux vecteurs $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ de même norme. Montrer que l'angle θ_{12} entre $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ satisfait :*

$$\cos\theta_{12} = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos\theta_1 \cos\theta_2$$

où les angles θ_1,θ_2, ϕ_1 et ϕ_2 sont les angles caractérisant les deux vecteurs en coordonnées sphériques.

Calcul de vitesse et d'accélération

11. Un point décrit la courbe représentée par

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin t, \\ y(t) &= 1 - \cos^2 t, \end{aligned}$$

où t est le temps.

1. Représenter graphiquement la trajectoire, montrer que le movement est périodique. Déterminer la plus petite période positive.

2. Calculer le vecteur vitesse. Quels sont les points où la vitesse est nulle ? La vitesse est maximale ?

A faire: 2,3 puis quelques uns parmi 5,7,8,12,13
3 séances

2 Fonctions de plusieurs variables

Fonctions scalaires de plusieurs variables

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions de deux variables suivantes :

$$f_1(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad f_2(x,y) = \frac{1}{x+y} \qquad f_3(x,y) = \frac{1}{|x|+|y|} \qquad f_4(x,y) = \ln(\frac{1}{xy})$$

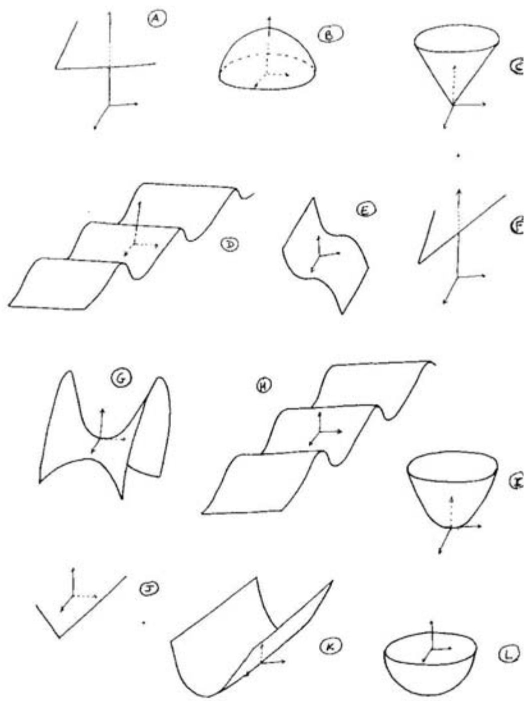
2. Associer à chacune des 12 surfaces la fonction qui lui correspond parmi les suivantes :

$$f_1(x,y) = x^2 \qquad f_2(x,y) = \frac{1}{6}(5-x+2y) \qquad f_3(x,y) = y^2 - x^2 \qquad f_4(x,y) = y$$

$$f_5(x,y) = y^2 \qquad f_6(x,y) = -y^3 \qquad f_7(x,y) = -\sin x \qquad f_8(x,y) = 1-(x^2+y^2)$$

$$f_9(x,y) = 5 \qquad f_{10}(x,y) = x^2+y^2 \qquad f_{11}(x,y) = \sin x \qquad f_{12}(x,y) = x^2+y^2-1$$

$$f_{13}(x,y) = \cos x \qquad f_{14}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad f_{15}(x,y) = 3-x-y$$



3. Donner l'allure des courbes de niveau et du graphe des fonctions de deux variables réelles x, y suivantes :

$$f_1(x,y) = (x-2)^2 \quad f_2(x,y) = x^2-y^2 \quad f_3(x,y) = x^2+x-y \quad f_4(x,y) = x^2+y^2-2x+4y+5$$

4. Donner l'expression en coordonnées polaires des fonctions suivantes (et en déduire l'allure de ces fonctions) :

$$f_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad f_2(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \qquad f_3(x,y) = \frac{y}{x} \qquad f_4(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$$

Dérivées partielles

5. Déterminer le domaine de définition et calculer les dérivées partielles premières et secondes des fonctions suivantes :

$$f_1(x,y) = 4x^4y^2 - 3x^2y^3 + xy - y + 1 \qquad f_2(x,y) = \frac{x-y}{x+y} \qquad f_3(x,y) = x^2 + xy^2 - 5y^4$$

$$f_4(x,y) = \sin(x^2y) \qquad f_5(x,y) = \exp(xy)\sin x \qquad f_6(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$$

$$f_7(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad f_8(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad f_9(x,y) = \frac{1}{x^2-xy+y^2+1}$$

6. Calculer les dérivées directionnelles des fonctions suivantes dans la direction d :

$$f(x,y) = xe^{x+y},\ d = (1,2) \quad \text{et} \quad g(x,y) = \frac{x-y}{x+y},\ d = (3,-1)$$

7. Pour chaque fonction f, calculer sa différentielle df et expliciter $df[p] : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1. $f_1 = e^x + y^2$, $p_1 = (0,0)$
2. $f_2 = \sin(x)\cos(y)$, $p_2 = (\pi, \pi/2)$
3. $f_3 = \ln(2x-3y)$, $p_3 = (1,-1)$
4. $f_4 = x^2y^3$, $p_4 = (1,1)$

8. Déterminer si les différentielles suivantes sur $\mathbb{R}^2$ sont *exactes*. (On rappelle qu'une forme differentielle $\omega = g_1dx + g_2dy$ est dite exacte s'il existe une fonction f telle que $\omega = df$.) Le cas échéant, calculer f.

1. $\omega_1 = xdx + ydy$,
2. $\omega_2 = xdx + xdy$,
3. $\omega_3 = ydx + xdy$,
4. $\omega_4 = y^2dx + ydy$.

9. Montrer que $\frac{1}{(x+y)^2}\big(2yz\,\mathrm{d}x - 2xz\,\mathrm{d}y + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}z\big)$ est la différentielle d'une fonction f que l'on déterminera.

10. *(bonus)* Soit f définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est continue et admet des dérivées premières sur $\mathbb{R}^2$. Ses dérivées partielles sont-elles continues sur $\mathbb{R}^2$?

11. *(bonus)* On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}, \ \text{si} \ (x,y) \neq (0,0),$$

et $f(0,0) = 0$. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. Calculer $\mathrm{d}f_{(0,0)}$, et $\mathrm{d}f_{(1,1)}$.

Fonctions vectorielles

12. (Repère mobile orthonormée). Soit $\vec{u}_r : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ le champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tel que pour chaque point $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\vec{u}_r(P) = \text{ le vecteur } \textit{unitaire} \text{ de la même direction et sens que } \overrightarrow{OP}.$$

Soit $\vec{u}_\theta$ le champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tel que, pour tout P dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$,

$$\vec{u}_\theta(P) = \text{ la rotation en sens trigonométrique de } \vec{u}_r(P) \text{ par } \frac{\pi}{2}.$$

Expliciter $\vec{u}_r(P)$ et $\vec{u}_\theta(P)$ en termes des coordonnées cartesiennes (x,y) et en termes des coordonnées polaires (r,θ) du point P.

13. Pour chaque champs de vecteurs $\vec{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ci-dessous, calculer sa matrice jacobienne $J_{\vec{u}}$.

1. $\vec{u}_1(x,y) = (x^2+xy^2, \sin(x+y))$
2. $\vec{u}_2(x,y,z) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0)$.

14. Soient $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $\vec{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(P) = \vec{F}(P)\cdot\vec{v}(P)$. Montrer que pour tout $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ nous avons que
$$\frac{\partial g}{\partial \vec{h}}(P) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{h}}(P)\cdot\vec{v}(P) + \vec{F}(P)\cdot\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{h}}(P).$$
2. En déduire que si $||\vec{F}||$ est constant alors pour tout P et tout $\vec{h}$
$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{h}}\cdot\vec{F} = 0.$$

A faire : 1,2,4,5,6
2 séances

3 Équations en dérivées partielles

1. Trouver toutes les fonctions $f(x,y)$ définies sur $\mathbb{R}^2$ dont

1. les dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont identiquement nulles ;
2. les dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont identiquement nulles ;
3. les dérivées partielles d'ordre 3 existent et telles que

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 0.$$

2. Résoudre l'équation : $2\dfrac{\partial f}{\partial s} - \dfrac{\partial f}{\partial t} = 0$ à l'aide du changement de variables $(u,v) = (s+t, s+2t)$.

3. Résoudre l'équation : $2\dfrac{\partial f}{\partial u} + 3\dfrac{\partial f}{\partial v} = uv$ à l'aide du changement de variables $(s,t) = (u, 3u-2v)$.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = a\sqrt{x^2+y^2}$, avec $a \in \mathbb{R}$. (opérer un changement de variables en coordonnées polaires.)

5. Résoudre l'équation $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ à l'aide du changement de variables $(u,v) = (x-y, x+y)$.

6. Donner le développement de Taylor d'ordre 2 des fonctions suivantes :

$$x^2y^2,\ \text{au point } (1,\ 1), \quad \sin(xy),\ \text{au point } (0,\ 0), \quad x^3y^2 - 2xy^4 + y^5,\ \text{au point } (1,\ 2).$$

7. *(bonus)* On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 2 pour f au point $a = (3,4)$. Montrer que l'erreur commise en remplaçant $f(3.1,\ 4.02)$ par $5 + \mathrm{d}f_a(0.1,\ 0.02)$ est $\leq 2.10^{-3}$.

Faire tous les exos
2 séances

4 Repères mobiles et opérateurs différentiels

1. Soit $\vec{r} = x\ \vec{i} + y\ \vec{j} + z\ \vec{k}$ vecteur de position dans $\mathbb{R}^3$. Alors sa différentielle (le déplacement infinitésimal) $d\,\vec{r} = \vec{i}\ dx + \vec{j}\ dy + \vec{k}\ dz$ et $\|d\,\vec{r}\,\| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + dz^2}$.

1. On se rappelle que $\vec{r} = r\ \vec{u}_r + z\ \vec{k}$, ou les trois vecteurs unitaires orthonormés du repère en coordonnées cylindriques $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{k}$ sont donnés par les équations

$$\vec{u}_r = \vec{i}\ \cos\theta + \vec{j}\ \sin\theta, \quad \vec{u}_\theta = -\ \vec{i}\ \sin\theta + \vec{j}\ \cos\theta$$

pour les vecteurs mobiles $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$, et le vecteur fixe $\vec{k}$.
Obtenir l'expression pour le déplacement infinitésimal $d\,\vec{r}$ et la distance élémentaire $\|d\,\vec{r}\,\|$ en coordonnées cylindriques.

2. En coordonnées sphériques les vecteurs unitaires orthonormés mobiles $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\phi$ sont donnés par les équations

$$\begin{aligned}
\vec{u}_r &= \vec{i}\ \sin\theta\cos\phi + \vec{j}\ \sin\theta\sin\phi + \vec{k}\ \cos\theta \\
\vec{u}_\phi &= -\ \vec{i}\ \sin\phi + \vec{j}\ \cos\phi, \\
\vec{u}_\theta &= \vec{i}\ \cos\theta\cos\phi + \vec{j}\ \cos\theta\sin\phi - \vec{k}\ \sin\theta.
\end{aligned}$$

Vérifier les expressions pour $d\,\vec{r} = d(r\ \vec{u}_r)$:

$$\begin{aligned}
d\,\vec{r} &= dr\ \vec{u}_r + r d\theta\ \vec{u}_\theta + r\sin\theta d\phi\ \vec{u}_\phi, \\
\|d\,\vec{r}\,\| &= (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\sin^2\theta(d\phi)^2.
\end{aligned}$$

2. Calculer le gradient et le laplacien des fonctions sur $\mathbb{R}^2$ à valeur dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad g(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Refaire le calcul en coordonnées polaires.

3. Calculer la divergence et le rotationnel des champs de vecteurs suivants

$$\begin{aligned}
&\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad V(x,y,z) = 2xe^{2z}\sin y\ \vec{i} + x^2e^{2z}\cos y\ \vec{j} + 2x^2e^{2z}\sin y\ \vec{k} \\
&\forall (r,\theta,z), r > 0, \quad W(r,\theta,z) = r\sin\theta\ \vec{u}_r + r\cos\theta\ \vec{u}_\theta + z\ \vec{k}
\end{aligned}$$

4. Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $\vec{v}$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une fonction réelle et un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$. Montrer que

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(f\ \vec{v}) &= f\ \mathrm{div}\ \vec{v} + \mathrm{grad} f \cdot \vec{v} \\
\mathrm{div}(\mathrm{grad} f) &= \Delta f \\
\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) &= 0.
\end{aligned}$$

5. Pour tout réel $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\},\ \ f_\alpha(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^\alpha.$$

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $\Delta f_\alpha = 0$.

Faire : 1,3,4,7,8,10,13
4 séances

5 Intégration

Intégrales doubles et triples
1.Calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \iint_{[0,3]\times[0,2]} (4-y^2)\ dxdy, \qquad I_2 = \iint_{[0,3]\times[-2,0]} (x^2y-2xy)\ dxdy,$$

$$I_3 = \iint_{[\pi,2\pi]\times[0,\pi]} (\sin x + \cos y)\ dxdy, \quad I_4 = \int_0^\pi \left(\int_0^x x \sin y\ dy\right) dx,$$

$$I_5 = \int_0^\pi \left(\int_0^{\sin x} y\ dy\right) dx, \qquad I_6 = \int_1^{\ln 8} \left(\int_1^{\ln y} e^{x+y}\ dx\right) dy,$$

$$I_7 = \iiint_{[0,\frac{\pi}{2}]^3} \sin(x+y+z)\ dxdydz.$$

2. Déterminer l'aire de la surface plane délimitée par les courbes

1. $xy = 1,\ x+y = \frac{5}{2}a\ (a>0)$;
2. $r = a\cos 3\theta$ en coordonnées polaires, $-\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{6}$.
3. en passant en coordonnées polaires, calculer l'aire de la surface délimitée par les courbes $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$; $x^2+y^2 \ge a^2$.

3. Calculer le volume des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ z \ge 0,\ x^2+y^2 \le 1-z\}, \\ D_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ x^2+y^2+z^2 \le 1\}, \\ D_3 &= \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3\ x \le y,\ x+y \le 2,\ z \le x^2+y^2\}. \end{aligned}$$

4. Calculer les intégrales doubles $\iint_D f(x,y)\ dx\ dy$ dans les cas suivants :

1. $f(x,y) = x^2y$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$.
2. $f(x,y) = xy$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0, y \ge 0, x+y \le 1\}$.
3. $f(x,y) = x^2$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \le y \le x\}$.
4. $f(x,y) = (x^2-y^2)e^{xy}$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1, x+y \ge 1, x \ge y\}$.
   Indication : on pourra faire le changement de variables $(X,Y) = (x+y, x-y)$.
5. $f(x,y) = x\cos(\sqrt{x^2+y^2})$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge y \ge 0, x^2+y^2 \le \pi\}$.

5. Déterminer les coordonnées du barycentre des surfaces suivantes :

1. plaque homogène définie par $x^2 \le y \le 1, -1 \le x \le 1$.
2. un demi-disque horizontal.
3. disque d'équation
$$(x-1)^2+y^2 \le 1$$
   de masse volumique $\rho = x|y|$ grammes/unité de surface.

Intégrale curviligne

6. Calculer les longueurs des courbes

1. $x = 3t, \ \ y = 3t^2, \ \ z = 2t^3$, entre $O(0,0,0)$ et $A(3,3,2)$
2. $x = e^{-t}\cos t, \ \ y = e^{-t}\sin t, \ \ z = e^{-t}$, entre $t = 0$ et $t = 1$
3. $x^2 + y^2 = z, \ \ \frac{y}{x} = \tan z$, entre $O(0,0,0)$ et $A(\sqrt{\frac{\pi}{8}}, \sqrt{\frac{\pi}{24}}, \pi/6)$

7. Le point mobile évolue selon l'équation $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ entre $t = 0$ et $t = 2\pi$. Calculer le travail de force $\vec{F}(x, y, z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.

8. Le point mobile décrit la courbe définie par

$$x = e^t\cos t, \quad y = e^t\sin t \ \text{ et } \ z = e^t$$

où t est le temps.

1. Quelle est la distance parcourue entre $t = 0$ et $t = 1$? Pour quelle valeur de t la distance parcourue est-elle de $4\sqrt{3}$, en unité de longueur ?
2. Calculer le travail de la force $\vec{F} = z\,\vec{k}$ entre $t = 0$ et $t = 1$

9.

1. Trouver le travail de la force $\vec{F} = -kr\,\vec{u}_r$ sur l'arc d'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ entre $M_1(a, 0)$ et $M_2(0, b)$.
2. Trouver le travail de la force de gravitation $\vec{F} = \frac{k\vec{u}_r}{r^2}$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ entre le points $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

10.

1. Soit Γ la courbe de $I\!R^2$ d'équation $y = (x-1)\ln(x+1)$, x variant de 0 à 1. Calculer
$$I_1 = \int_\Gamma \sqrt{x}\ dy - (\sqrt{x}\ln(x+1))\ dx.$$
2. Soit $C \subset I\!R^2$ le cercle de rayon R, de centre $(0, 0)$ décrit dans le sens trigonométrique. Calculer
$$I_2 = \int_C (2x - y)\ dx + (x + y)\ dy.$$
3. Soit Γ une courbe fermée (lisse) dans $I\!R^3$. Calculer
$$I_3 = \int_\Gamma yz\ dx + xz\ dy + xy\ dz.$$

11.

1. Soit $\Gamma \subset I\!R^2$ une courbe fermée simple délimitant un domaine $\mathcal{D}$ d'aire A. Montrer à l'aide de la formule de Green-Riemann que
$$A = \frac{1}{2}\int_\Gamma x\ dy - y\ dx.$$
2. En déduire l'aire limitée par l'ellipse définie par
$$\begin{cases} x &= a\cos\theta \\ y &= b\sin\theta \end{cases} \text{ avec } 0 \le \theta \le 2\pi.$$

12. Soit $K = \{x, y \in \mathbb{R}^2 |\ x \ge 0, y \ge 0 \text{ et } x^2 + y^2 \le 1\}$. Soit γ son bord orienté et ω la forme différentielle

$$\omega = xy^2dx + 2xydy.$$

Calculer $\int_\gamma \omega$ en utilisant la formule de Green-Riemann.

13. En utilisant le formule de Green-Riemann, calculer $I = \int_D xy\,dxdy$ où

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 2\}.$$

6 Complements

Université Grenoble Alpes MAT304 Année 2016-2017

CC1a : examen partiel du 13 octobre 2016

Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée

Calculettes, téléphones portables interdits

Durée 45mn

Les réponses brouillonnes seront systématiquement refusées

Exercice 1. On considère les domaines suivants dans $\mathbb{R}^2$:
$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$, $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$,
$D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, $D_4 = \emptyset$, $D_5 = \{0\}$, $D_6 = \mathbb{R}^2$,
$D_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > |y|\}$, $D_8 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > -y\}$,
$D_9 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\}$ $D_{10} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \{x \neq 0\} \cup \{y \neq 0\}\}$.
Choisissez parmi les ensembles ci-dessus les domaines de définition des fonctions suivantes :
(Marquez le numéro du domaine correspondant en face de chaque fonction.)

1. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
2. $f(x,y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$
3. $f(x,y) = \ln(x^2 - y^2)$
4. $f(x,y) = (x+y)e^{x+y}$
5. $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{1-x^2-y^2}}$

Exercice 2.

1. Cocher les formes linéaires qui sont exactes.

   ☐ $xdy + ydx$; ☐ $e^{xy}\left(y\cos(y^2)dx + 2yx\sin(y^2)dy\right)$;
   ☐ $\frac{4x}{(x^2+y^2)^2}dx + \frac{4y}{(x^2+y^2)^2}dy$; ☐ $\sin(yx)(ydx + xdy)$.

2. Cocher la fonction ci-dessous dont la différentielle est

$$\left(zx^2y - \frac{zy^3}{3}\right)dx - \left(zxy^2 - \frac{zx^3}{3}\right)dy + \frac{xy}{3}(x^2 - y^2)dz$$

   ☐ $z(x^3 - y^3) + 1$; ☐ $zxy(y^3 - x^3) + z$; ☐ $\frac{zxy}{3}(x+y)$;
   ☐ $\frac{zxy}{3}(x^2 - y^2) + 6$; ☐ $\frac{y^3}{3} + \frac{z}{6}(x^3 - z^3)$; ☐ $\frac{zxy}{3}(x^2 + y^2)$;

Exercice 3.

1. Dans la liste ci-dessous cochez toutes les solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x^2 + y^2.$$

   ☐ $f = \frac{1}{3}xy(x^2+y^2) - 1$; ☐ $f = \frac{1}{3}(x^2+y^2)(x+y)$;
   ☐ $f = x + y^2 + \frac{1}{3}(x^2-y^2)(x+y)$, ☐ $f = x + y^2 + \frac{1}{3}xy(x^2+y^2)$;
   ☐ $f = x + y^2 + x^3y + x^2y$; ☐ $f = x + y^2 + \frac{1}{3}(x^2+y^2)(x+y)$;
   ☐ $f = \frac{1}{3}(x^2-y^2)(x+y) - 1$; ☐ $f = \frac{1}{3}(x^2+y^2)(x+y) - 1$.

2. Entourez en plus celle qui satisfait aux conditions $f(x,0) = x$, $f(0,y) = y^2$:

Université de Grenoble Alpes. Année 2016-2017
Module MAT 304

Contrôle continu 2.

Calculettes, téléphones portables, interdits. Une feuille recto-verso A4 manuscripte autorisée.

Durée 1h30.

Exercice 1. Nous considérons l'équation

$$-\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2+y^2}{xy} \tag{1}$$

sur le domaine $D = \{(x,y)|x>0, y>0.\}$
Posant $f(x,y) = g(r,\theta)$ résoudre cette équation par un passage en coordonnées polaires.

Exercice 2

Soit D le domaine

$$D = \{(x,y) \mid |x-y| \leq 1; |x+y| \leq 1.\}$$

1. Dessiner le domaine D dans le plan.
2. Calculer l'intégrale double

$$\int_D x^2 dxdy$$

utilisant le changement de variable $u = (x-y), v = (x+y)$.

Exercice 3.

1. On considère la fonction $g : (x,y) \to \frac{x^2}{x^2+y^2}$.
   (a) Quel est le domaine de définition de g ?
   (b) Calculer $\vec{\nabla}(g)$ en coordonnées cartesiennes.
   (c) Donner la fonction g en coordonnées polaires. Recalculer $\vec{\nabla}(g)$ en coordonnées polaires.
   (d) En déduire le laplacien $\Delta(g)$ en coordonnées polaires.
2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction scalaire $\mathcal{C}^1$ et soit $\vec{u}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champs de vecteurs $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$\mathrm{div}(f\,\vec{u}) = f\mathrm{div}(\vec{u}) + \vec{\nabla}(f)\cdot\vec{u}\,.$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x,y) = x^2 + x + y^2 - 2y.$$

1. Dessiner pour tout $k \in \mathbb{R}$ la ligne de niveau $L_k(f)$.
2. Représenter le graphe de la fonction f dans $\mathbb{R}^3$.
3. Quel est le point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ou la valeur de la fonction f est minimale ?

2ème partie : algèbre

Faire : 2,3,4,5,6,7 (1 ou 2 séances)

7 Matrices et applications lineaires

1. Calculer les produits AB et BA, quand ils existent, dans les cas suivants :

1. $A = (1,\ 2,\ -1,\ 3)$, $B = (-1,\ 0,\ 2,\ 1)^T$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (utiliser la multiplication par bloc pour calculer le produit).

2. Répondre par Oui/Non.
(a) Toute matrice diagonale est symétrique.
(b) Pour une matrice A et un scalaire c, $(cA)^T = cA^T$.
(c) Toute matrice tri-diagonale est symétrique.
(d) pour des matrices A, B quelconques, $(AB)^T = B^T A^T$.

3. Completer les phrases :
(a) Le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ est ______.
(b) Si A est une matrice 3×7 alors son rang est au moins ______ et au plus ______.
(c) Le rang d'une matrice 3×3 non nulle avec tous les éléments égaux est ______.
(d) Si A est une matrice 4×8, alors la nullité de A est au moins ______.
(e) Soit A une matrice 4×3 constante par colonne, alors le rang de A est ______.
(f) Un exemple de matrice de rang 2 et de nullité 1 est ______.

4. Soit $u = (1,2,3)^T$ et $v = (a,b,c)^T$ deux vecteurs colonnes. Former la matrice $P = uv^T$. Quel est le rang de P ? Calculer P^2, P^k, $k = 3,4,\ldots$. Quelle est l'image de P ? Quel est l'espace nul de P ?

5. Donner la représentation matricielle des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces en jeu.

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y+3z, 2y-z, x+z) \end{array} \right.$
2. la symétrie dans $\mathbb{R}^2$ par rapport à l'axe défini par e_1 parallèlement à e_2, en supposant que $\mathbb{R}^2$ est muni d'une base (e_1, e_2)
3. la projection dans $\mathbb{R}^2$ sur l'axe défini par e_1 parallèlement à e_2
4. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & 2(X+1)P-(X^2-1)P' \end{array} \right.$

6. On considère l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $B=(e_1,e_2)$. Soit f l'application linéaire donnée par $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & (2u,-v) \end{array} \right.$ dans la base B.

1. Déterminer la matrice A de f dans la base B.
2. Montrer que les vecteurs $e'_1=(3,1)$ et $e'_2=(5,2)$ forment une base B' de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer la matrice A' de f dans le base B' en calculant $f(e'_1)$ et $f(e'_2)$.
4. Calculer les matrices de passage P et Q entre les bases B et B'.
5. Déterminer A' par le formule de changement de base.
6. Calculer les matrices de f^5 dans les deux bases (indication : $A=PA'P^{-1}$ implique que $A^n=PA'^nP^{-1}$).

7. On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique B.

1. Montrer que $u_1=(2,-1,-2)$, $u_2=(1,0,-1)$ et $u_3=(-2,1,3)$ forment une base B' de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $A=\begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix}$. Calculer les matrices de passage d'une base à l'autre.
3. Calculer la matrice de f dans la base B'.

8. Soit A, B, C et D des matrices carrées d'ordre n.

1. Montrer que tr(AB)=tr(BA).
2. En déduire que les égalités $AC+DB=I_n$ et $CA+BD=0_n$ sont incompatibles.
3. En déduire aussi que la matrice représentant une application linéaire u dans une base B a toujours la même trace quelque soit la base B choisie.

9. Exprimer la forme quadratique

$$Q(x,y,z)=2x^2+y^2+z^2+2xy+4yz-6xz$$

en forme matricielle v^TAv, ou $v=(x,y,z)^T$ et A est une matrice triangulaire inférieure ; ou encore quand A est une matrice symétrique.

8 Systèmes linéaires et déterminants

Faire : 2,3 et quelques systèmes de 1,4,6 (1 ou 2 séances)

1. Résoudre les systèmes suivants par la méthode de Gauss ou Gauss-Jordan.

$$(a)\ \begin{array}{r} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=2 \\ x+3y+4z=3 \end{array} \qquad (b)\ \begin{array}{rcr} x+3y-z & = & 9 \\ 3x+9y-3z & = & 27 \\ -2x+y-5z & = & 10 \end{array}$$

$$(c)\ \begin{array}{r} x+y=1 \\ 2x+y=2 \\ 3x+2y=5; \end{array} \quad (d)\ \begin{array}{r} x_3+x_4=0 \\ -2x_1-4x_2+x_3=0 \\ -x_3+x_4=0; \end{array} \quad (e)\ \begin{array}{r} x_1+x_2+3x_3=2 \\ 2x_1+5x_2+9x_3=1 \\ x_1+2x_2+4x_3=1; \end{array}$$

2. Dans cet exercice, toutes les matrices sont carrées.

1. Soit M' la matrice obtenue à partir de la matrice M par l'opération $L_1 \to 2L_1+L_2$. Est-ce qu'alors $\det(M)=\det(M')$?
2. Supposons que M et M' sont deux matrices carrées telles qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $Mx=M'x$. Peut-on en déduire que $\det(M)=\det(M')$?
3. S'il existe $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $Mx=M'x$, peut-on en déduire que $\det(M-M')=0$?
4. Supposons $n=3$. Est-ce qu'alors $\det_{\mathcal{B}}(v_1,v_2,v_3)=\det_{\mathcal{B}}(v_2,v_3,v_1)$?
5. Soit v un vecteur d'un espace vectoriel E de dimension n. Si $\det(v_1+v,v_2,...,v_n)=\det(v_1,...,v_n)$, a-t'on alors $v \in vect(v_2,..,v_n)$?

3. Calculer les déterminants des matrices suivantes

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$a=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad b=\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos 2x \\ 1 & \cos y & \cos 2y \\ 1 & \cos z & \cos 2z \end{vmatrix} \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$c=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} \quad \forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

4. On rappele l'équation vue en TD1 :

$$\det(u,v,w)=u\cdot(v\wedge w)[=v\cdot(w\wedge u)=w\cdot(u\wedge v)].$$

1. Donner une interpretation géométrique da la quantité $\|v\|\,\|w\|\,|\sin\theta|$, où θ est l'angle entre v et w.
2. En déduire que $|\det(u,v,w)| = \mathrm{Vol}(P)$ ou P est le parallelepiped engendré par u, v et w.
3. Sous quelles conditions ce parallelepiped est-il de volume 0 ? Commenter votre résultat.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rang}(A) = 1$.

1. Notons $(C_1, \ldots, C_n)$ les colonnes de A. Montrer que $\exists C \in \mathbb{R}^n, \exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tq
$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, C_i = \lambda_i C$.
2. En faisant un changement de base adapté, montrer que $\det(I_n + A) = 1 + \mathrm{tr}(A)$.

6. Soit $A = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Calculer $\det A$.
2. Soit $S \in M_{2n}(\mathbb{R})$ telle $S^T A S = A$. Montrer que S est inversible et que S^T et S^{-1} sont semblables.

9 Valeurs et vecteurs propres

Faire : 2,3,7,8,11,12 (a) et (b) (4 séances)

1. Trouver les éléments propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lesquelles de ces matrices sont diagonalisables ?

2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est diagonalisable et trouver une matrice P qui diagonalise A. En déduire A^n pour $n \geq 1$.
On considére les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par les valeurs initiales $u_0 = v_0 = 1$, $w_0 = 2$ et les relations suivantes :

$$u_{n+1} = 3u_n - v_n + w_n \qquad v_{n+1} = 2v_n \qquad w_{n+1} = u_n - v_n + 3w_n.$$

Déterminer u_n, v_n et w_n.

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

Pour tout $n \geq 1$, trouver A^n.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $A^p = 0$. Montrer que 0 est l'unique valeur propre de A. La réciproque est-elle vraie ?

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que le déterminant de A est égal au produit de ses valeurs propres et que sa trace est égale à la somme de ses valeurs propres.

6. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que AB et BA admettent les mêmes valeurs propres.

7. Le mathématicien du XIIIe siècle Leonardo Fibonacci est à l'origine de la suite de nombres entiers 1, 1, 2, 3, 5, 8,. . . qui porte son nom. La suite satisfait les relations de récurrence

$$f_0 = 1,\ f_1 = 1,\ f_{k+1} = f_k + f_{k-1},\ k = 1, 2, ...$$

1. Soit $x^{(k)} = (f_{k+1}; f_k)$. Écrire ces relations sous la forme matricielle équivalente

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)},\ k = 0, 1, \ldots,\ \ x^{(0)} = (1; 1),$$

   avec la matrice A à déterminer.
2. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. La matrice A, est-elle diagonalisable ?
3. Trouver la formule explicite pour le k-ème élément de la suite de Fibonacci.

8. Déterminer les éléments propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère le système différentiel suivant :

$$\dot{x}(t) = x(t) + 4z(t), \qquad \dot{y}(t) = y(t) + 4w(t),$$
$$\dot{z}(t) = x(t) + z(t), \qquad \dot{w}(t) = y(t) + w(t).$$

Trouver la solution générale de ce système, puis la solution particulière qui vérifie les conditions initiales $x(0) = y(0) = z(0) = 0, w(0) = 2$.

9. Soit $a \in I\!R$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Calculer la polynôme caractéristique de A et trouver ses valeurs propres.
- Déterminer les sous-espaces propres de A. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?

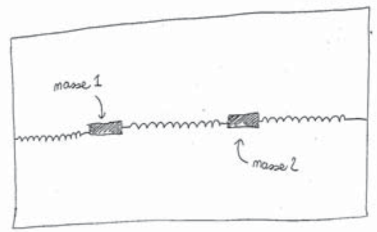
A partir d'ici on supposera que $a = 0$.

- On considère le système différentiel suivant :

$$\dot{x}(t) = x(t) + y(t) - z(t), \qquad \dot{y}(t) = y(t),$$
$$\dot{z}(t) = -y(t) + 2z(t), \qquad \dot{w}(t) = x(t) + z(t) + 2w(t).$$

Trouver la solution générale de ce système, puis la solution particulière qui vérifie les conditions initiales $x(0) = y(0) = w(0) = 0, z(0) = 1$.

10. Deux masses égales sont suspendues entre trois ressorts identiques de coefficient de rigidité k sur une table plane et lisse, comme dans le diagramme ci-dessous :



Les deux masses sont mises en mouvement en temps $t = 0$. Soit $x_1(t)$ (resp. $x_2(t)$) l'écart de la première (resp. de la seconde) masse de sa position d'équilibre en temps t. On admettra que les lois de Newton nous donnent que

$$\begin{aligned} mx_1'' &= -2kx_1 + kx_2, \\ mx_2'' &= kx_1 - 2kx_2. \end{aligned}$$

1. Reécrire ces équations sous la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}'' = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

   pour une certaine matrix M.
2. Diagonaliser M et donner la solution générale de cette équation.
3. Interpreter physiquement les deux modes « fondamentales », c.-à-d., les solutions particulières correspondantes à chaque valeur propre.

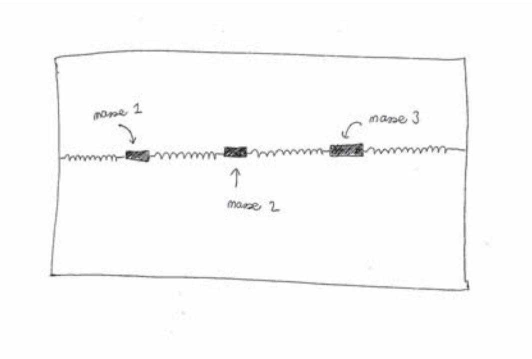
Nous considérons maintenant la même situation avec 3 masses suspendues entre 4 ressorts, comme ci-dessous.

1. Donner les équations de mouvement de ce système physique.
2. Les re-écrire dans la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}'' = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

   pour une certaine matrix M.

3. Diagonaliser M et donner la solution générale de cette équation.
4. Interpréter physiquement la mode « fondamentale » correspondante à la valeur propre $2k/m$.



Elements propres des matrices symétriques et decomposition en valeurs singulières

11. Montrer que les matrices suivantes sont orthogonales et trouver leurs valeurs propres.

$$(a)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (b)\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (c)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

12. Montrer que les matrices suivantes sont symétriques et trouver les matrices orthogonales de diagonalisation

$$(a)\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (b)\begin{bmatrix} 2 & 36 \\ 36 & 23 \end{bmatrix} \quad (c)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (d)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

13. Donner la decomposition en valeurs singulieres des matrices

$$(a)\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (b)\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (c)\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (d)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

14. Soit $A = U\Sigma V^T$ la décomposition en valeurs singulieres de la matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rang $p < \min(m,n)$. On denote $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_p$ les valeurs singulieres non-nulles de A et les matrices orthogonales $\bar{U} = [u_1, ..., u_p]$ et $\bar{V} = [v_1, ..., v_p]$ de vecteurs singuliers gauches et droits respectifs, de façon que

$$A = \bar{U}\,\mathrm{diag}(\sigma_1, ..., \sigma_p)\,\bar{V}^T$$

(décomposition minimale).

Soit A^+ matrice $n \times m$ donnée par

$$A^+ = \bar{V}\,\mathrm{diag}(\sigma_1^{-1}, ..., \sigma_p^{-1})\,\bar{U}^T;$$

on appelle A^+ *la matrice pseudo-inverse de* A.

1. De quelle taille est A^+ ? Que valent A^+A et AA^+ ? Vérifiez que $A\,A^+A = A$ et que $A^+A\,A^T = A^T\,AA^+ = A^T$. Expliquez ce que ces relations signifient.
2. Soit A matrice $m \times n$ de rang n et b un m-vecteur. Supposons que le système $Ax = b$ est soluble. Montrer que la solution $x \in \mathbb{R}^n$ du système satisfait $x = A^+b$.

Faire : 1,2,3,4
(2 séances)

10 Applications

Extrema d'une fonction de plusieurs variables

1. Déterminer si elles existent les valeurs maximales et minimales des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$:

$$f_1(x,y) = 4 - 2x^2 - y^2 \qquad f_2(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \qquad f_3(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 1$$

$$f_4(x,y) = -x^2 + 2xy - 2y^2 - 4 \qquad f_5(x,y) = x - y^2 - x^3 \qquad f_6(x,y) = 3x + 12y - x^3 - y^3$$

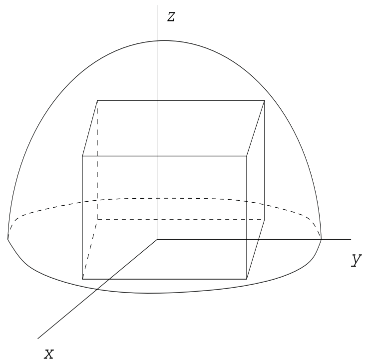
$$f_7(x,y) = (x-y)^2 + x^3 + y^3 \qquad f_8(x,y) = (x-y)^2 + x^2 + y^2 \qquad f_9(x,y) = -2(x-y)^2 + x^4 + y^4$$

2. Pour chacune des fonctions suivantes

$$f(x,y) = x^2, \quad f_2(x,y) = xy, \quad f(x,y) = x^2 - 4y^2, \quad f(x,y) = x^2 + xy + y^2,$$
$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2, \quad f(x,y) = -2(x-y)^2 + x^4 + y^4$$
$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2, \quad f(x,y,z) = x^4 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + 4,$$
$$f(x,y,z) = 3(x^2 + 2y^2 + z^2) - 2(x+y+z)^4, \quad f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$$

1. Déterminer l'ensemble des points critiques de f.
2. Calculer la matrice hessienne de f.
3. Pour chacun des points critiques de f, donner les conclusions tirées de l'examen de la matrice hessienne.
4. Pour chacun des points critiques de f, dire s'il s'agit ou non d'un extremum global de f.

3. Déterminer les dimensions de parallélépipède rectangulaire du plus grand volume qui peut être inscrit dans une hémisphère de rayon a.



4. Anne et Paul ont investi 20 000€ dans la conception et développement d'un produit nouveau. Le coût unitaire de production est de 2€. Leur consultant de marketing X leur

propose d'investir A€ dans la compagne publicitaire. Dans ce cas Anne et Paul pourront vendre

$$2000 + 4\sqrt{A} - 20p$$

unités de produit au prix unitaire p.

1. Exprimez le profit d'Anne et Paul en fonction de A et de p.
2. A quel prix unitaire de produit et à quel investissement en publicité correspond le profit maximal ?

Moindres carrés

5. Dans le problème de moindres carrés, peut-on avoir dans les données plusieurs valeurs z (différentes ou non), associés à une même abscisse t ?
Par exemple, peut-on avoir 2 valeurs différentes de z pour chaque valeur de t ? 4 valeurs égales de z pour une valeur de t ?

6. Soit dans le modèle $y = X\beta + \xi$ la matrice X $n \times k$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ un bruit, et $\beta \in \mathbb{R}^k$ le paramètre inconnu de régression linéaire. On suppose que matrice X est de rang plein : $\mathrm{rang}(X) = k$ (avec $k \le n$).

1. Verifier que la matrice $k \times k$ $H = X(X^TX)^{-1}X^T$ est symétrique et *idempotente*, autrement dit que $H^2 = H$.
2. Montrer que les valeurs propres λ_i, $i = 1, ..., k$ d'une matrice idempotente $k \times k$ sont les éléments de $\{0, 1\}$.
3. Verifier que $Hu = u$ pour tout $u \in \mathcal{X}$, $\mathcal{X} = \{z \in \mathbb{R}^n : \ z = X\beta, \ \beta \in \mathbb{R}^k\}$, et $Hu = 0$ pour tout $u \perp \mathcal{X}$. Autrement dit, H est *un projecteur orthogonal* (ou *projeteur*, tout simplement) sur le sous-espace $\mathcal{X}$ de $\mathbb{R}^n$.
   Soit $\widehat{\beta} = (X^TX)^{-1}X^Ty$ l'estimateur de moindres carrés de β. On pose $\widehat{y} = X\widehat{\beta} = X(X^TX)^{-1}X^Ty = Hy$ (la *prévision*).
4. Montrer que le *résidu* $\widehat{\xi} = y - \widehat{y}$ est orthogonal à $\widehat{y}$. Soit $K = I - H = I - X(X^TX)^{-1}X^T$. Verifier que K est un projecteur, identifier le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ sur lequel projette K.

7.[Traitement de variables qualitatives] On étudie la prise de poids par des rats suivants différents types de régimes alimentaires. On mesure la variable de réponse `poids`, qu'on cherche à expliquer à l'aide des variables explicatives `dosage` et `régime` à partir des données expérimentales :

poids = [1.2941979; 1.9777068; 0.784177; 1.1130249; 0.7522560; 1.8111625]
dosage = [0.4665600; 0.8916927; 0.580997; 0.4992316; 0.3973825; 0.9306090]
régime = [protéines, protéines, céréales, céréales, mélangé, céréales].

1. Poser le modèle de regression prenant en compte la variable `régime`.
2. Composer la matrice de régresseurs pour l'estimation de paramètres par la méthode des moindres carrés.

8.[Transformations non linéaires de variables]

1. On se donne les données suivantes, pour $i = -3, -2, ..., 2, 3$:

$$t_i = i, \quad z_i = t_i^3 + t_i^2.$$

   Calculez la droite des moindres carrés pour ces données. Représentez graphiquement les données et la droite.
2. Écrire le système linéaire que permet de trouver un polynôme des moindres carrés de degré ≤ 3 pour les données $(t_i, e^{-2t_i})_{i=0,\dots,20}$ avec $t_i = 0.2i$.
3. Décrire une méthode des moindres carrés qui permet de trouver les paramètres a et b du modèle $f(t) = ate^{-bt}$ à partir de données (t_i, z_i).

11 Complements

Université Grenoble Alpes Année 2016-2017
Module MAT304

CC1b : examen partiel du 1 décembre 2016

Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée

Calculettes, téléphones portables interdits

Durée 45mn

Les réponses brouillonnes seront systématiquement refusées

Exercice 1. Soit A une matrice 3×10 non nulle.
En répondant aux questions ci-dessous cochez la case unique qui correspond à la réponse valide pour toute matrice A 3×10 non nulle.

1. La valeur minimale de rang de A est
   ☐ 0 ; ☐ 1 ; ☐ 3 ; ☐ 10.
2. La valeur maximale de rang de A est
   ☐ 0 ; ☐ 1 ; ☐ 3 ; ☐ 10.
3. Le nombre de lignes indépendantes de A est
   ☐ 0 ; ☐ 3 ; ☐ 10 ; ☐ égal à $\dim(\mathrm{Im}(A))$.
4. On suppose que le rang de A est 2, alors $\ker A$ est de dimension
   ☐ 0 ; ☐ 1 ; ☐ 2 ; ☐ 4 ; ☐ 6 ; ☐ 8.
5. On suppose que le rang de A est 2, alors $\ker A^T$ est de dimension
   ☐ 0 ; ☐ 1 ; ☐ 2 ; ☐ 4 ; ☐ 6 ; ☐ 8.

Exercice 2. On considère le domaine D du plan $\mathbb{R}^2$ délimité par la courbe fermée simple Γ définie par ces équations paramétriques $y = y(t)$, $x = x(t)$, $t \in [-1, 1]$. On cherche à utiliser la formule de Green-Riemann

$$\oint_\Gamma Adx + Bdy = \iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dxdy.$$

pour calculer l'aire S de D.

1. Dans la liste ci-dessous, cochez les couples A, B tels que

$$S = \iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dxdy$$

   ☐ $A = 0,\ B = y$; ☐ $A = -y,\ B = x$; ☐ $A = -y/2,\ B = -x/2$;
   ☐ $A = -y/2,\ B = x/2$; ☐ $A = 0,\ B = x$.

2. Cochez les intégrales ci-dessous dont la valeur est égale à l'aire S de D :

   ☐ $\oint_\Gamma y\,dx$; ☐ $\int_{-1}^{1} y(t)dt$; ☐ $\int_{-1}^{1} x(t)x'(t)dt$; ☐ $\frac{1}{2}\oint_\Gamma (xdy - ydx)$.

3. L'aire du domaine D délimité par la courbe Γ d'équations

$$x(t) = 1 - t^2,\ y(t) = t - t^3,\ -1 \leq t \leq 1,$$

   est égal à

   ☐ 0 ; ☐ $\frac{8}{15}$; ☐ 1 ; ☐ $\frac{17}{15}$; ☐ $\frac{19}{15}$; ☐ 2 ; ☐ $\frac{32}{15}$.

Exercice 3. On se donne les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$u = (1,2,1), \quad v = (2,1,2), \quad w = (1,1,-1)$$

ainsi que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. $\det(u,v,w)$ est égal à

   ☐ -6 ; ☐ 6 ; ☐ 18 ; ☐ 3

   (on admet que $\det(u,v,w)$ est le déterminant de la matrice 3×3 avec des colonnes u, v et w).

   On en déduit que $\{u,v,w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Donner la matrice de passage P de la base canonique à la base $\{u,v,w\}$.

3. Soit $Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Calculer le produit PQ.

4. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\{u,v,w\}$ est A. Déterminer la matrice B représentant f dans la base canonique.

5. Rang de B est

   ☐ 0 ; ☐ 1 ; ☐ 2 ; ☐ 3.

6. Dans la liste ci-dessous, cochez les vecteurs qui sont orthogonaux au noyau de B :

   ☐ $(1, 2, 3)$, ☐ $(-1, 0, 1)$,
   ☐ $(0, -1, 0)$, ☐ $(0, 1, 0)$,
   ☐ $(1, 0, 1)$, ☐ $(1, 1, 1)$,
   ☐ $(0, 1, 1)$, ☐ $(-5, 4, 3)$.

Université de Grenoble Alpes. Année 2016-2017
Module MAT 304

Examen 2ème session, juin 2017

Calculettes, téléphones portables, interdits. Une feuille recto-verso A4 manuscripte autorisée.

Durée 1h30.

Exercice 1. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est elle diagonalisable ? Calculer rang$A$ et déduire la dimension de Ker$A$. En déduire une valeur propre de A.
2. Donner une base de Ker$A$.
3. Trouver toutes les valeurs propres de A.
4. Calculer une base (e_1, e_2, e_3) de vecteurs propres de A tels que $e_1^T e_1 = e_2^T e_2 = e_3^T e_3 = 1$.
5. Donner P, la matrice de passage de la base canonique vers la base (e_1, e_2, e_3). Verifier que P est orthogonale.
6. Diagonaliser A et en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 *Les parties I et II de l'exercice sont indépendantes*

I. Soit D le domaine

$$D = \{(x, y) \mid x \geq -1,\, y \geq -1,\, x + y \leq 2\}.$$

1. Dessiner D dans le plan.
2. Calculer l'intégrale double
$$\int_D xy\,dx\,dy$$

II. Soit B_r le disque de rayon r, $B_r = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$, et soit C_r le cercle de rayon r centré en $(0, 0)$, parcouru en sens trigonométrique.

1. Justifier que $\int_{C_r} x^2 y\, dy = \int_{B_r} 2xy\, dxdy$.
2. Calculer $\int_{C_r} x^2 y\, dy$.

Exercice 3. Soit $F : \begin{array}{ccc} R^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \to & x^2 y - xy^2. \end{array}$.

1. Trouves tous les points critiques de F.
2. Determiner la nature de tous les points critiques de F pour lequels det$H_F \neq 0$, où H_F est le Hessian de F.

3. Par un argument *ad hoc*, montrer que l'unique point de F ou det$H_F = 0$ n'est ni un maximum ni un minimum local.

Exercice 4. Résoudre l'équation en dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbf{0}$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

par un passage en coordonnees polaires (r, θ).