Solutions du CC1b du 8 décembre 2020

1. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$
On a
$$\mathrm{tr}\ A = a + c, \quad \det\ A = ac - b^2.$$
Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique
$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = \lambda^2 - \mathrm{tr}\ A \cdot \lambda + \det\ A.$$
On a
$$\lambda_{1/2} = \frac{\mathrm{tr}\ A \pm \sqrt{(\mathrm{tr}\ A)^2 - 4\det A}}{2}.$$

Le vecteur propre à la valeur λ est une solution x du système $(A - \lambda I)x = 0$. Les deux équations du système sont dépendantes, donc on ne considère qu'une des équations, disons
$$(a-\lambda)x_1 + bx_2 = 0.$$
Une solution est donnée par $x = \begin{pmatrix} -b \\ a-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ \frac{a-c\mp\sqrt{(\mathrm{tr}\ A)^2-4\det A}}{2} \end{pmatrix}$.

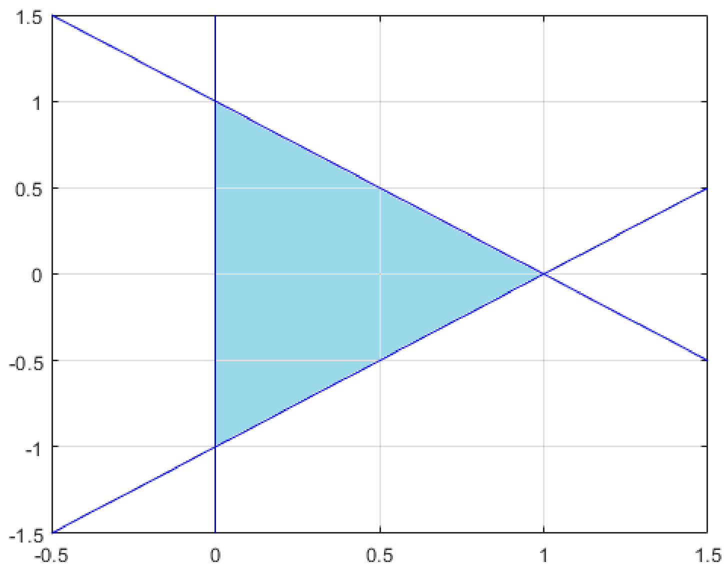
La deuxième équation $bx_1 + (c-\lambda)x_2 = 0$ donne $x = \begin{pmatrix} c-\lambda \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c-a\mp\sqrt{(\mathrm{tr}\ A)^2-4\det A}}{2} \\ -b \end{pmatrix}$.

Bien sur des multiples de ces vecteurs sont aussi possibles.

On a donc p.ex.
$$P = \begin{pmatrix} -b & -b \\ \frac{a-c-\sqrt{(\mathrm{tr}\ A)^2-4\det A}}{2} & \frac{a-c+\sqrt{(\mathrm{tr}\ A)^2-4\det A}}{2} \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{tr}\ A+\sqrt{(\mathrm{tr}\ A)^2-4\det A}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\mathrm{tr}\ A-\sqrt{(\mathrm{tr}\ A)^2-4\det A}}{2} \end{pmatrix}.$$

On considère la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}.$$
Le rang de B est la dimension de l'espace engendré par les colonnes de B. La dernière colonne est toujours non-zéro, et la deuxième est linéairement indépendente de la dernière si et seulement si $a \neq 0$. Donc
$$\mathrm{rk}\ B = \begin{cases} 2, & a > 0, \\ 1, & a = 0. \end{cases}$$
L'espace nul de B a dimension
$$\dim\ker B = 3 - \mathrm{rk}\ B = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ 2, & a = 0. \end{cases}$$
La dimension de l'espace nul de B^T est égal à celle de $\ker B$.

On considère la matrice
$$C = \begin{pmatrix} 2 & a+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
On calcule la décomposition $C = PDP^{-1}$ en éléments propres. Les valeurs propres de la matrice triangulaire C sont les éléments diagonaux $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Les vecteurs propres correspondants sont
$$x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} a+1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



D'ailleurs $P = \begin{pmatrix} 1 & a+1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1}$. Alors

$$C^n = \begin{pmatrix} 1 & a+1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a+1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n & (2^n-1)(a+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère la suite $\{x_n\}$ donnée par $x_0 = 0$, $x_{k+1} = 2x_k + a + 1$. On observe qu'avec $y_k \equiv 1$ on a

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = C^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & (2^n-1)(a+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2^n-1)(a+1) \\ 1 \end{pmatrix},$$

ce qui implique $x_n = (2^n - 1)(a + 1)$.

2. Le domaine D est délimité par les droites $x = 0$ et $x \pm y = 1$, ce qui donne un triangle comme sur la figure.

On a par la formule de Green-Riemann

$$\frac{1}{2}\int_\Gamma (a+b)xy^2\,dx-(a+c)x^2y\,dy = \frac{1}{2}\iint_D \frac{\partial(-(a+c)x^2y)}{\partial x} - \frac{\partial((a+b)xy^2)}{\partial y}\,dx\,dy = -(2a+b+c)\iint_D xy\,dx\,dy.$$

L'intégral s'évalue selon

$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} xy\,dy\,dx = \int_0^1 [\frac{xy^2}{2}]_{x-1}^{1-x}\,dx = 0.$$