
CC1b PM3, 8 décembre 2020

Durée 1h.

Soient a, b, c les trois derniers chiffres de votre numéro d'étudiant ***** abc .

Exercice 1.

1. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Calculez

- la trace et le déterminant de A
- les valeurs et vecteurs propres de A
- une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$

2. Soit B la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}.$$

Quel est

- le rang de B
- la dimension de l'espace nul de B
- la dimension de l'espace nul de B^T

3. Soit C la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 2 & a+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculez C^n pour $n \in \mathbb{N}$.

4. Soit x_k la suite donnée par

$$x_0 = 0, \quad x_{k+1} = 2x_k + a + 1.$$

Calculez x_k pour $k \in \mathbb{N}$.

Astuce : définissez une autre suite $y_k \equiv 1$, alors

$$(x_0, y_0) = (0, 1), \quad x_{k+1} = 2x_k + (a+1)y_k, \quad y_{k+1} = y_k.$$

Exercice 2.

Soit

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + |y| \leq 1, x \geq 0\}.$$

1. Dessiner le domaine D .

2. Soit Γ la courbe qui représente le bord du domaine D , parcourue une seule fois dans le sens anti-horaire. Utiliser la formule de Green-Riemann pour calculer l'intégrale

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma} (a+b)xy^2 dx - (a+c)x^2 y dy.$$