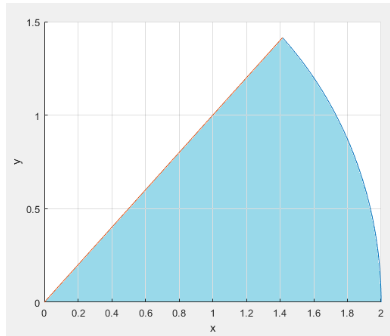

Figure 1: Exercice 1.2: domaine D

Solutions du CC2 du 21 octobre 2019

1.

1.1. $f(x,y) = \frac{1}{2}$ est équivalent à $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 = 0$, i.e., $x = y$. La ligne de niveau est alors une droite, excepté l'origine.

1.3.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^{\pi/4} \frac{r^2\cos\phi\sin\phi}{r^2} r\,d\phi\,dr = \int_0^2 r\,dr \cdot \int_0^{\pi/4} \cos\phi\sin\phi\,d\phi = [\frac{r^2}{2}]_0^2 \cdot [-\frac{\cos 2\phi}{4}]_0^{\pi/4} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

2.

2.1. Notons $\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k}$. On vérifie

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 3y^2, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0.$$

Alors $\vec{F}$ est conservatif.

Soit $\vec{F} = \nabla f$. On a

$$f = \int F_x\,dx = xy^3 + x^3z + f_1(y,z), \quad f = \int F_y\,dy = xy^3 + f_2(x,z), \quad f = \int F_z\,dz = x^3z + f_3(x,y),$$

où f_1, f_2, f_3 sont inconnues. Une comparaison de la première expression avec les deux autres montre que $f_1 = const$, d'où $f = xy^3 + x^3z + const$.

2.2. On a $\vec{F} = \nabla f$ et alors $\vec{rot}\vec{F} = 0$. Le produit s'annule par conséquence.

3.

3.1. Le domaine est donné par

$$D = \{(x,y) \mid y \neq 0\} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

3.2. On a $f = \frac{x^2+y^2}{2y}$ et alors

$$\nabla f = \left(\frac{x}{y}, \frac{y^2 - x^2}{2y^2}\right).$$

3.3. En coordonnées polaires on a

$$f = \frac{r^2}{2r\sin\phi} = \frac{r}{2\sin\phi}.$$

Le gradient est alors donné par

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u_r} + r^{-1}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{u_\phi} = \frac{1}{2\sin\phi}\vec{u_r} - r^{-1}\frac{r\cos\phi}{2\sin^2\phi}\vec{u_\phi} = \frac{1}{2\sin\phi}\vec{u_r} - \frac{\cos\phi}{2\sin^2\phi}\vec{u_\phi}.$$

3.4. En coordonnées polaires

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = r^{-1}\frac{1}{2\sin\phi} + r^{-2}\frac{r(2-\sin^2\phi)}{2\sin^3\phi} = \frac{\sin^2\phi}{2r\sin^3\phi} + \frac{2-\sin^2\phi}{2r\sin^3\phi} = \frac{1}{r\sin^3\phi}.$$

4. On a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$2y - x = (x+y) - (2x-y) = u - v.$$

Alors l'équation devient

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{e^{u-v}}{3}.$$

Il suit que

$$f = \int \frac{e^{u-v}}{3}\, du + h(v) = \frac{e^{u-v}}{3} + h(v) = \frac{e^{2y-x}}{3} + h(2x-y),$$

avec h une fonction arbitraire.