Université Grenoble Alpes MAT304 Année 2019-2020

CC2 : examen partiel du 21 octobre 2019

Une feuille A4 recto-verso <u>*manuscrite*</u> *est autorisée*

Calculettes, téléphones portables interdits

Durée 1h30

Les réponses brouillonnes seront systématiquement refusées

Exercice 1

(Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes entre elles)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

1. Déterminer la ligne de niveau $L_{\frac{1}{2}} = \{(x,y) \in D_f :\ f(x,y) = \frac{1}{2}\}$.

Soit D le domaine

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq y \leq x,\ x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

2. Dessiner le domaine D dans le plan.
3. Calculer l'intégrale double

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

en effectuant un changement de variables en coordonnées polaires.

Exercice 2. On dit qu'un champ de vecteurs $\vec{F}$ dérive d'un potentiel scalaire s'il existe une fonction scalaire f telle que $\vec{F} = \operatorname{grad} f$ (ou $\vec{F} = \vec{\nabla} f$).

1. Montrer que le champ $\vec{F}$ défini sur $\mathbb{R}^3$ par $\vec{F}(x,y,z) = (y^3+3zx^2,\ 3xy^2,\ x^3)$ dérive d'un potentiel scalaire et déterminer tous les potentiels scalaires f dont il dérive.
2. Calculer le produit vectoriel $\vec{F}(1,-1,2) \wedge \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{F})\right)(2,0,1)$.

Exercice 3. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{2y} - x$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Calculer le gradient $\vec{\nabla} f$ en coordonnées cartésiennes.
3. Donner la fonction f en coordonnées polaires. Recalculer $\vec{\nabla} f$ en coordonnées polaires.
4. Calculer le laplacien Δf en coordonnées polaires.

Exercice 4. Déterminer les fonctions $f :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to f(x,y)$, de classe C^1, vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} = e^{2y-x}$$

à l'aide du changement de variables $(u,v) = (x+y, 2x-y)$.