

# Etude des zéros et des maxima locaux du spectrogramme du bruit blanc

**Arnaud Poinas**



## Étude des zéros et des maxima du spectrogramme du bruit blanc

### Définition

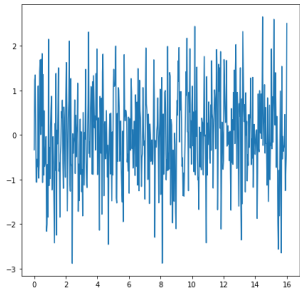
La transformée de Fourier à court terme (STFT) d'un signal  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  avec fenêtre Gaussienne est définie par :

$$STFT(s)(\tau, \omega) := \int_{\mathbb{R}} s(t) \exp(-\pi(t - \tau)^2) e^{-2i\pi\omega t} dt.$$

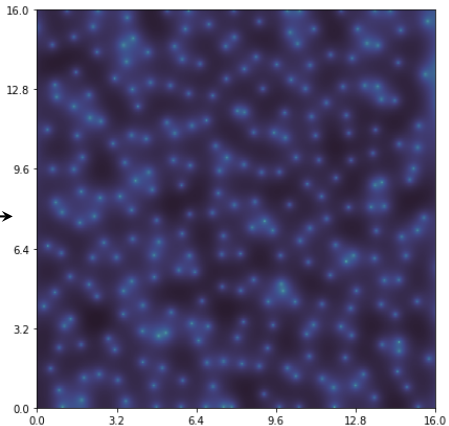
On définit ensuite le spectrogramme du signal comme

$$Spec(s)(\tau, \omega) := |STFT(s)(\tau, \omega)|^2.$$

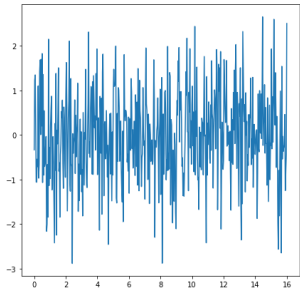
## Spectrogramme du bruit blanc Gaussien complexe



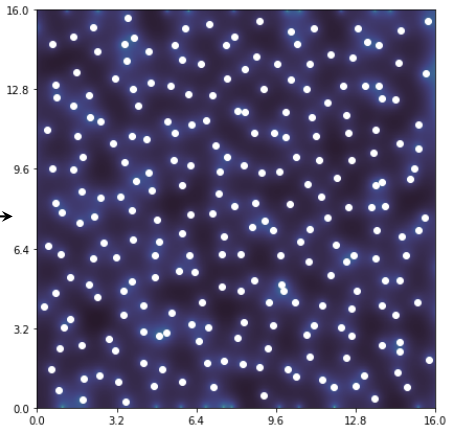
Bruit blanc



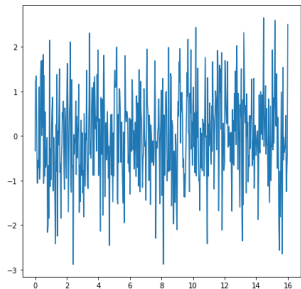
## Spectrogramme du bruit blanc Gaussien complexe



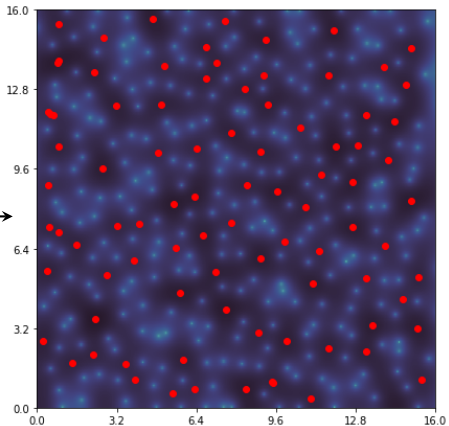
Bruit blanc



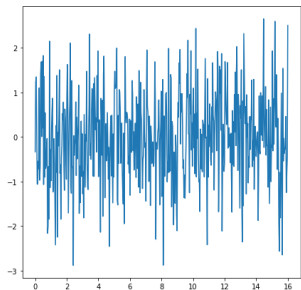
## Spectrogramme du bruit blanc Gaussien complexe



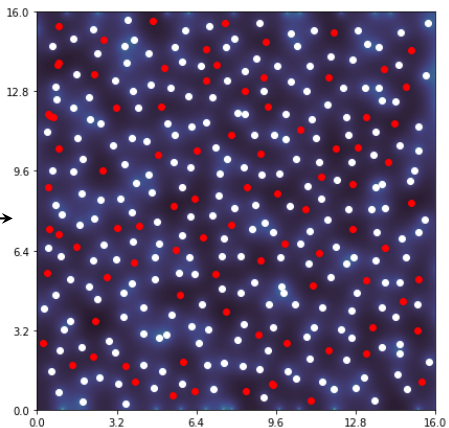
Bruit blanc



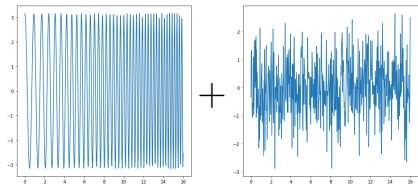
## Spectrogramme du bruit blanc Gaussien complexe



Bruit blanc

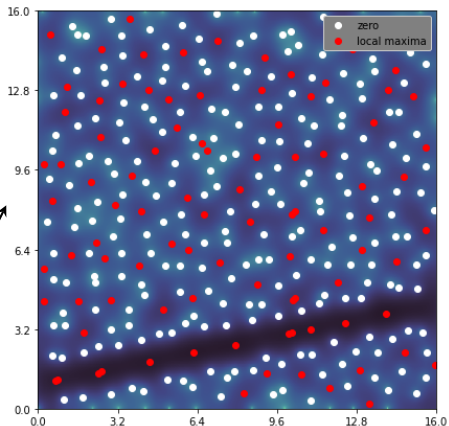
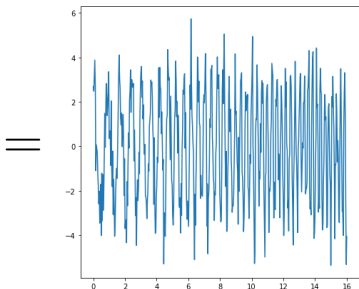


# Spectrogramme d'un chirp bruité

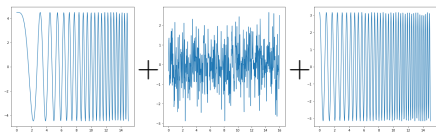


$$s(t) = \sqrt{10} \exp(2i\pi t(1 + t/10))$$

Bruit blanc



## Spectrogramme de deux chirps bruités

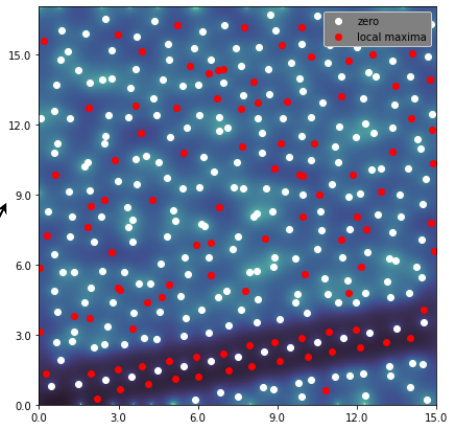
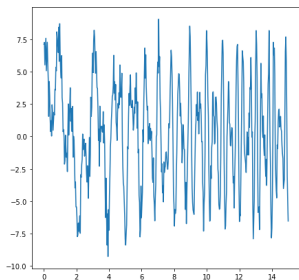


$$\propto \exp(i\pi t^2/5)$$

Bruit blanc

$$\propto \exp(2i\pi t(1 + t/10))$$

=





## Résultats connus

- Densité des zéros/maxima du spectrogramme du bruit blanc.
- Corrélation entre les zéros du spectrogramme du bruit blanc.

## Projet de recherche

### Problèmes théoriques

- Corrélation entre les maxima du spectrogramme du bruit blanc.
- Corrélation entre les zéros et les maxima du spectrogramme du bruit blanc.
- Densité des zéros/maxima du spectrogramme d'un chirp bruité.

### Problèmes pratiques

- Détection de la présence d'un signal.
- Débruitage d'un chirp bruité.

Mêmes questions avec deux chirps et/ou des signaux plus complexes.

## Test de détection de la présence d'un signal.

On suppose qu'on observe le spectrogramme d'un signal.

$(\mathcal{H}_0)$  Spectrogramme d'un bruit blanc;

$(\mathcal{H}_1)$  Spectrogramme pas d'un bruit blanc.

Idée : On veut choisir  $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , une statistique descriptive fonctionnelle sur le processus ponctuel des zéros et des maxima qui prend des valeurs très différentes dans le cas d'un signal bruité comparé au cas du bruit blanc seul.

## Monte Carlo envelope tests

On considère la statistique

$$T = \sqrt{\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} |S(t) - S_0(t)|^2 dt}$$

où  $S_0$  est la vraie valeur de  $S$  sous  $(\mathcal{H}_0)$ . Soit  $t_{\text{exp}}$  la valeur de  $T$  pour les données observées et  $t_1, \dots, t_m$  des réalisations de  $T$  sur des données simulées sous  $(\mathcal{H}_0)$ . Si  $t_{\text{exp}}$  est plus grand que 95% des valeurs de  $t_i$  alors on rejette  $(\mathcal{H}_0)$ .

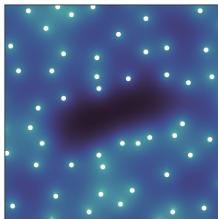
## Rank envelope tests

On considère  $S_{\text{exp}}$  la valeur de  $S$  sur les données observées et  $S_1, \dots, S_m$  des réalisations de  $S$  sous  $(\mathcal{H}_0)$ . On définit deux fonctions  $T_{\text{low}}$  et  $T_{\text{upp}}$  telles que la propriété

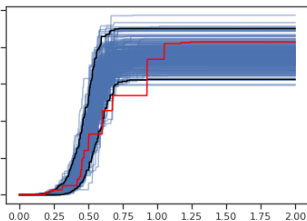
$$\forall t \in [r_{\min}, r_{\max}], T_{\text{low}}(t) \leq S_i(t) \leq T_{\text{upp}}(t)$$

est vérifiée pour au moins 95% des  $S_i$ . Si  $S_{\text{exp}}$  ne vérifie pas cette propriété alors on rejette  $(\mathcal{H}_0)$ .

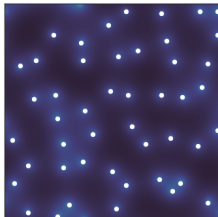
## Exemple ( $APF_{1,zero}$ )



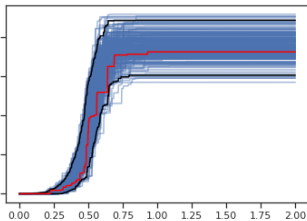
(a) Spectrogramme 1



(b) Rank enveloppe test 1



(c) Spectrogramme 2



(d) Rank enveloppe test 2

## Exemple de statistiques descriptives fonctionnelles :

### Ripley's K function

$$K_{\text{all}}, K_{\text{zero}}, K_{\text{max}}, K_{\text{zero},\bullet}, K_{\text{max},\bullet}, K_{\text{zero}, \text{max}}$$

### The nearest neighbour distance G function

$$G_{\text{all}}, G_{\text{zero}}, G_{\text{max}}, G_{\text{zero},\bullet}, G_{\text{max},\bullet}, G_{\text{zero}, \text{max}}$$

### The empty space F function

$$F_{\text{all}}, F_{\text{zero}}, F_{\text{max}}$$

### The J-function

$$J_{\text{all}}, J_{\text{zero}}, J_{\text{max}}, J_{\text{zero},\bullet}, J_{\text{max},\bullet}, J_{\text{zero}, \text{max}}$$

### The accumulated persistence function

$$\text{APF}_{0,\text{all}}, \text{APF}_{1,\text{all}}, \text{APF}_{0,\text{zero}}, \text{APF}_{1,\text{zero}}, \text{APF}_{0,\text{max}}, \text{APF}_{1,\text{max}}$$

## Exemple de statistiques descriptives fonctionnelles :

### Ripley's K function

$$K_{\text{all}}, K_{\text{zero}}, K_{\text{max}}, K_{\text{zero},\bullet}, K_{\text{max},\bullet}, K_{\text{zero},\text{max}}$$

### The nearest neighbour distance G function

$$G_{\text{all}}, G_{\text{zero}}, G_{\text{max}}, G_{\text{zero},\bullet}, G_{\text{max},\bullet}, G_{\text{zero},\text{max}}$$

### The empty space F function

$$F_{\text{all}}, F_{\text{zero}}, F_{\text{max}}$$

### The J-function

$$J_{\text{all}}, J_{\text{zero}}, J_{\text{max}}, J_{\text{zero},\bullet}, J_{\text{max},\bullet}, J_{\text{zero},\text{max}}$$

### The accumulated persistence function

$$APF_{0,\text{all}}, APF_{1,\text{all}}, APF_{0,\text{zero}}, APF_{1,\text{zero}}, APF_{0,\text{max}}, APF_{1,\text{max}}$$

## Résultats théoriques

Soit  $\rho_{\text{cross}}(z, z')$  défini comme la densité de probabilité d'observer un zéro au point  $z$  et un maximum local au point  $z'$ . Comme  $\rho_{\text{cross}}(z, z')$  ne dépend que de  $|z' - z|$ , on note  $\rho_{\text{cross}}(r)$  par abus de notation.

### Propriété

$$\rho_{\text{cross}}(r) = \int_{\mathbb{C}^3} |u|^2 (|v|^2 - |w|^2) \mathbb{1}_{|v| \geq |w|} \frac{e^{-(0, u, 0, v, w) \Lambda(r\sqrt{\pi})^{-1} (0, u, 0, v, w)^*}}{\det(\Lambda(r\sqrt{\pi})) \pi^5} du dv dw,$$

où

$$\Lambda(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -r & r^2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 - r^2 & -r(2 - r^2) & -r \\ -r & 1 - r^2 & e^{r^2} & 0 & 0 \\ r^2 & -r(2 - r^2) & 0 & 2e^{r^2} & 0 \\ -1 & -r & 0 & 0 & e^{r^2} \end{pmatrix}$$

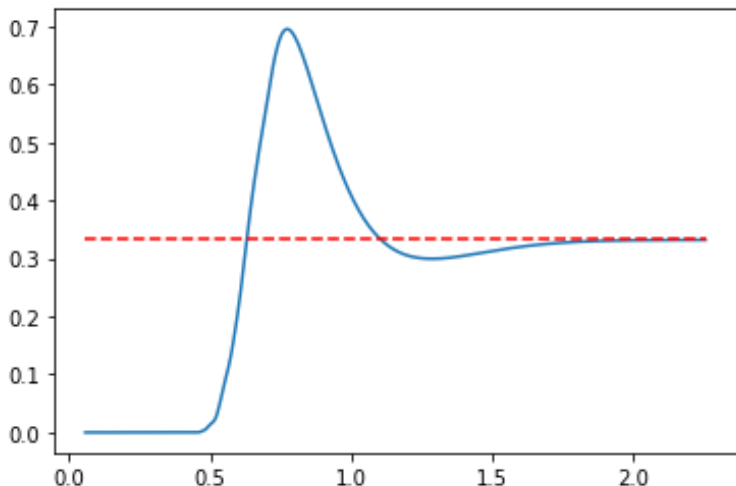


FIGURE – Simulation de  $\rho_{\text{cross}}(r)$  par Monte-Carlo.

Note : Les cross-correlations d'ordre  $\geq 2$  et les corrélations des maxima d'ordre  $\geq 2$  donnent des formules beaucoup plus compliquées.



Soit  $\rho(z)$  la densité de probabilité d'observer un zéro au point  $z$  pour le spectrogramme du signal

$$s(t) = \sqrt{\gamma} \exp(2\pi i \times t(a + bt)) + \xi(t),$$

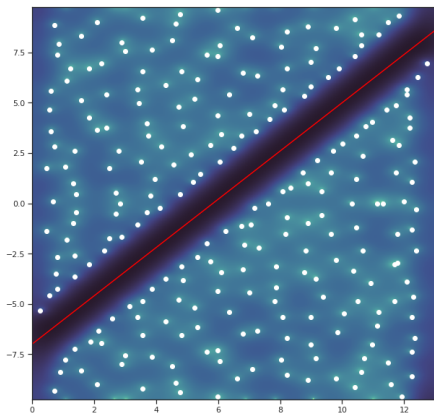
où  $\xi(t)$  est un bruit blanc Gaussien complexe.

### Propriété

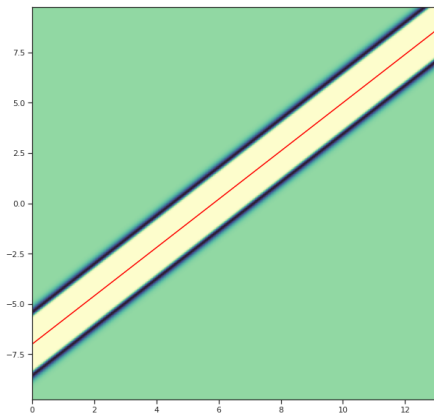
Pour tout  $z = u + iv \in \mathbb{C}$ , on a

$$\rho(z) = \left(1 + 4\gamma\pi\sigma_b r^2 \exp(-2\pi r^2)\right) e^{-\gamma\sigma_b \exp(-2\pi r^2)}$$

où  $\sigma_b = \sqrt{\frac{2}{1+4b^2}}$  et  $r$  correspond à la distance entre  $z$  et la ligne  $y = 2bx + a$



(a) Simulation



(b) Densité théorique

FIGURE – Simulation du spectrogramme d'un chirp bruité avec la densité théorique de ses zéros.

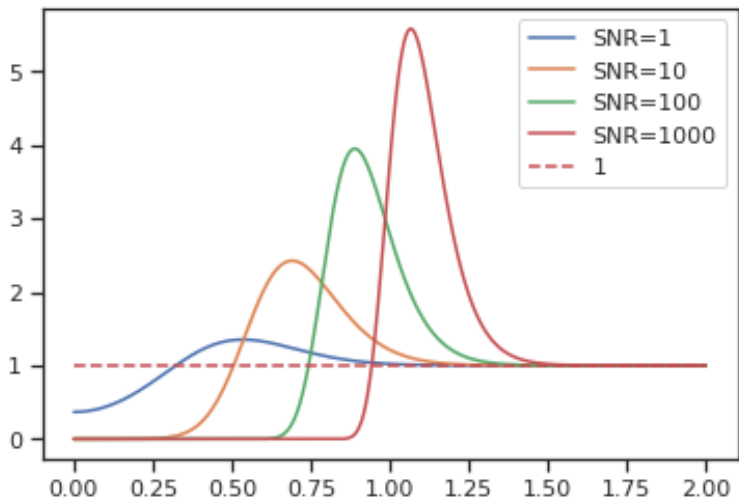


FIGURE – Simulation de  $\rho(z)$  en fonction de la distance de  $z$  à la ligne  $y = 2bx + a$  pour  $b = 1/2$  et divers valeur de  $\gamma$ .

Soit  $\rho(z)$  la densité de probabilité d'observer un zéro au point  $z$  pour le spectrogramme du signal

$$s(t) = \sqrt{\gamma_1} \exp(2\pi i \times t(a_1 + bt)) + \sqrt{\gamma_2} \exp(2\pi i \times t(a_2 + bt)) + \xi(t),$$

où  $\xi(t)$  est un bruit blanc Gaussien.

## Propriété

$$\rho(z) = \left( 1 + 4\pi\sigma_b \left( \gamma_1 r^2 e^{-2\pi r^2} + \gamma_2 (r-a)^2 e^{-2\pi(r-a)^2} + 2\sqrt{\gamma_1\gamma_2} r(r-a) e^{-\pi r^2 - \pi(r-a)^2} \cos(2as) \right) \right) \exp \left( -\sigma_b \left( \gamma_1 e^{-2\pi r^2} + \gamma_2 e^{-2\pi(r-a)^2} + 2\sqrt{\gamma_1\gamma_2} e^{-\pi r^2 - \pi(r-a)^2} \cos(2as) \right) \right).$$

où  $\sigma_b = \sqrt{\frac{2}{1+4b^2}}$ ,  $r$  correspond à la distance (signée) entre  $z$  et la ligne  $y = 2bx + a_1$ ,  $a$  correspond à la distance entre la ligne  $y = 2bx + a_1$  et la ligne  $y = 2bx + a_2$  et  $s$  correspond à la distance (signée) entre  $z$  et la ligne  $x = -2by + (a_1 + a_2)b$

Soit  $\rho(z)$  la densité de probabilité d'observer un zéro au point  $z$  pour le spectrogramme du signal

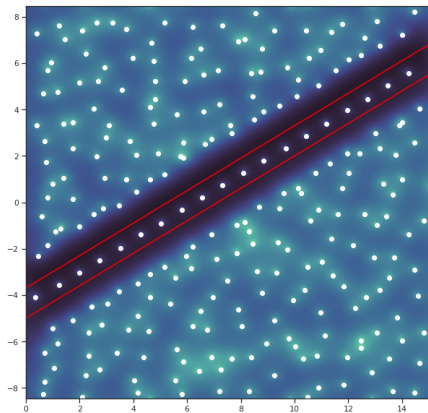
$$s(t) = \sqrt{\gamma_1} \exp(2\pi i \times t(a_1 + bt)) + \sqrt{\gamma_2} \exp(2\pi i \times t(a_2 + bt)) + \xi(t),$$

où  $\xi(t)$  est un bruit blanc Gaussien.

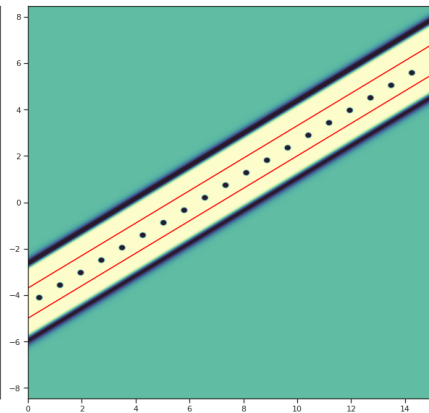
## Propriété

$$\rho(z) = \left( 1 + 4\pi\sigma_b \left( \gamma_1 r^2 e^{-2\pi r^2} + \gamma_2 (r-a)^2 e^{-2\pi(r-a)^2} + 2\sqrt{\gamma_1\gamma_2} r(r-a) e^{-\pi r^2 - \pi(r-a)^2} \cos(2as) \right) \right) \exp \left( -\sigma_b \left( \gamma_1 e^{-2\pi r^2} + \gamma_2 e^{-2\pi(r-a)^2} + 2\sqrt{\gamma_1\gamma_2} e^{-\pi r^2 - \pi(r-a)^2} \cos(2as) \right) \right).$$

où  $\sigma_b = \sqrt{\frac{2}{1+4b^2}}$ ,  $r$  correspond à la distance (signée) entre  $z$  et la ligne  $y = 2bx + a_1$ ,  $a$  correspond à la distance entre la ligne  $y = 2bx + a_1$  et la ligne  $y = 2bx + a_2$  et  $s$  correspond à la distance (signée) entre  $z$  et la ligne  $x = -2by + (a_1 + a_2)b$

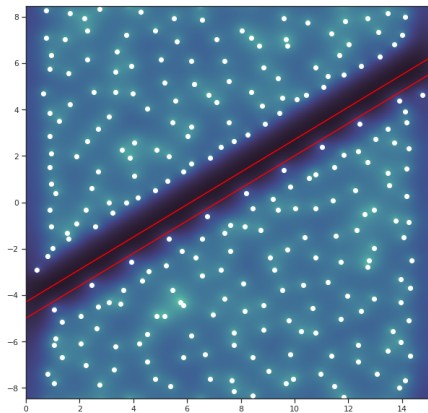


(a) Simulation

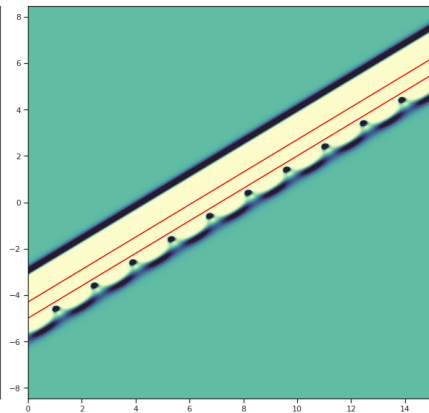


(b) Densité théorique

FIGURE – Exemple avec  $\gamma_1 = 60$ ,  $\gamma_2 = 30$ ,  $a_1 = -5$ ,  $a_2 = -3.7$  et  $b = 0.35$



(a) Simulation



(b) Densité théorique

FIGURE – Exemple avec  $\gamma_1 = 20$ ,  $\gamma_2 = 1000$ ,  $a_1 = -5$ ,  $a_2 = -4.3$  et  $b = 0.35$

## Questions

- Estimation de  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  et  $b$  ?
- Calcul de l'intensité des maxima locaux ?
- Comprendre les différents régimes d'interférence.



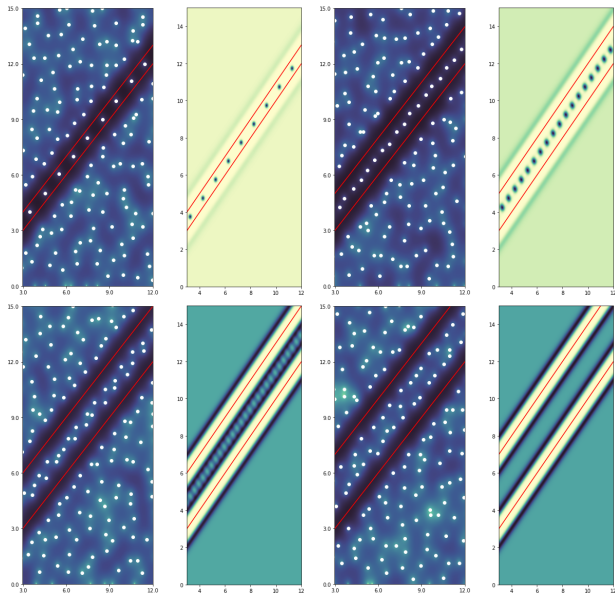


FIGURE – Spectrogramme de deux chirps bruités et leur  $\rho$  correspondant avec  $\gamma_1 = \gamma_2 = 10$ ,  $b = 1/2$ ,  $a_1 = 0$  et  $a_2$  qui est 1 (top left), 2 (top right), 3 (bottom left) ou 4 (bottom right).