C. R. Acad. Sci. Paris, t.321, Série 1

Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

Ondelettes sur l'intervalle pour la prise en compte de conditions aux limites

Pascal MONASSE* Valérie PERRIER *†

24 Juillet 1995

Résumé

Nous présentons la construction théorique et pratique de bases d'ondelettes sur l'intervalle vérifiant des conditions homogènes de type Dirichlet ou Neumann. Ces ondelettes sont adaptées pour la prise en compte de conditions aux limites lors de la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles ; elles sont également associées à des algorithmes rapides de décomposition-recomposition. Enfin, l'opérateur de dérivation est calculé dans ces bases. Cette construction est illustrée pour des conditions aux limites de type Dirichlet.

Wavelet bases on the interval adapted for boundary conditions

Abstract

We introduce a theoretical and practical construction of wavelet bases on the interval that take into account homogeneous boundary conditions and are well suited to solve partial differential equations. We compute the derivative operator in these bases and give an example for Dirichlet boundary conditions.

Abridged English Version – This note is devoted to the practical construction of wavelet bases with boundary conditions. Wavelet bases on the interval characterizing functional spaces like $H^s(0,1)$ were first introduced by Y. Meyer [9] and then improved by Cohen-Daubechies-Vial [5]. In the meantime, P. Auscher explained [1] how to take into account boundary conditions with Meyer's construction. This paper shows how to adapt Auscher's theoretical ideas to the construction in [5]. By symmetry, we can focus on the condition at 0, and construct a multiresolution analysis of $L^2([0,+\infty[)$.

Starting from a multiresolution analysis $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ of $L^2(\mathbb{R})$ based on Daubechies's compactly supported wavelets [6] with N vanishing moments, and Φ the scaling function, supported on the interval $[-N+1,N]$, such that $\Phi(2^jx-k)$ generate the space V_j, we introduce, as suggested by Auscher [1], the scaling functions $\tilde{\Phi}_l$ at the edge 0 (with α a given parameter whose value is 0 or 1):

$$\tilde{\Phi}_l(x) = \sum_{k=-N+1}^{N-1-\alpha} P_l(k)\ \Phi(x-k)\ \chi_{[0,+\infty[}(x)$$

where the indexes k in the sum correspond to the scaling functions whose support contains 0 in its interior, to which we may add (if the parameter α equals 1) the one whose support begins at 0. The polynomials P_l are such that

$$\frac{x^l}{l!} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_l(k)\ \Phi(x-k).$$

*. Laboratoire de Météorologie Dynamique, E.N.S., 24 rue Lhomond, 75231 Paris cedex 05
†. Laboratoire d'Analyse, Géométrie et Applications, URA 742, Université Paris Nord, 93430 Villetaneuse

The boundary conditions at 0 are now defined by a subset Λ of $\{0, \ldots, N-1\}$, and the vector space $CL(\Lambda)$: $f \in CL(\Lambda)$ if $\forall \lambda \in \Lambda$, f is λ times differentiable at 0 and $f^{(\lambda)}(0) = 0$. Then, defining the space $V_j^{[0,+\infty[}(\Lambda)$ generated by the interior scaling functions $\Phi(2^j x - k)$ for $k \geq N - \alpha$, and the edge functions $\tilde{\Phi}_l(2^j x)$ for $l \notin \Lambda$, we demonstrate that $\left(V_j^{[0,+\infty[}(\Lambda)\right)_{j \in \mathbb{Z}}$ is a multiresolution analysis of $L^2([0, +\infty[)$.

The wavelets at the edge 0 are now contructed by:

$$\tilde{\Psi}_k = \sqrt{2}\left(I - P_{V_0^{[0,+\infty[}(\Lambda)}\right)\left(\tilde{\Phi}_k(2x) - 2^k \tilde{\Phi}_k(x)\right), \quad k = 0, \ \ldots N-1.$$

We demonstrate that $N - \alpha$ of these functions are independent and, by adding the classical wavelets in W_0 $(= V_1 \backslash V_0)$, whose support is entirely in $[0, +\infty[$, they form a basis of $W_0^{[0,+\infty[}(\Lambda)$ the orthogonal complement of $V_0^{[0,+\infty[}(\Lambda)$ in $V_1^{[0,+\infty[}(\Lambda)$. After orthonormalization of the $\tilde{\Psi}_k$ it is easy to construct an orthonormal wavelet basis on $L^2([0, +\infty[)$ which belongs to $CL(\Lambda)$.

The derivative operator in $V_j^{[0,+\infty[}(\Lambda)$ is finally computed by means of the scalar products:

$$A_{k,l} =< \tilde{\Phi}_k(x), \frac{d\tilde{\Phi}_l}{dx}(x) >, \ B_{k,l} =< \tilde{\Phi}_k(x), \frac{d\Phi_l}{dx}(x) >, \text{ and } r_k =< \Phi(x-k), \frac{d\Phi}{dx}(x) > .$$

The computation of the r_k can be found in [2]. The coefficients $B_{k,l}$ can be obtained recursively through the definition of the $\tilde{\Phi}_l$, and the $A_{k,l}$ through the two-scale equation for the $\tilde{\Phi}_l$ (see equation (3)).

As an example, we draw in the figure the boundary scaling function $\tilde{\Phi}_0$ and the boundary wavelets (obtained by orthonormalization of $\tilde{\Psi}_k$) for Dirichlet conditions. The number of vanishing moments is taken equal to 2, and the parameter α is equal to 0 (left figures) or 1 (right figures): this parameter ($\alpha = 1$) allows the dimension of the space $V_j^{[0,1]}(\Lambda)$ to be adjusted to 2^j, in the case of the construction on the interval $[0, 1]$ with one boundary condition at each edge.

1 Introduction

Les bases d'ondelettes permettent une caractérisation simple d'espaces fonctionnels tels que les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ [8] et sont utilisées en analyse numérique dans les méthodes de Galerkin pour la résolution d'équations aux dérivées partielles. Dans le cas de domaines bornés les conditions aux limites les plus simples et les plus populaires sont les conditions aux limites périodiques, pour lesquelles on utilise des ondelettes périodiques. La construction d'ondelettes sur l'intervalle comme bases d'espaces tels que $H_0^s(0, 1)$ permettra de s'affranchir de ce cadre restrictif.

Depuis la première construction en 1989 (à partir des fonctions splines) de bases d'ondelettes dans des ouverts de $\mathbb{R}^n$ par Jaffard-Meyer [7], plusieurs constructions de bases d'ondelettes pour l'intervalle $[0, 1]$ ont été proposées : elles sont toutes fondées sur les bases de $L^2(\mathbb{R})$ d'ondelettes à support compact de Daubechies [6]. Y. Meyer a d'abord démontré [9] que la restriction à l'intervalle $[0, 1]$ de cette base formait une base de $L^2(0, 1)$ mais n'était pas optimale pour la caractérisation des espaces fonctionnels (perte de moments nuls par rapport à la base sur $\mathbb{R}$). Ces inconvénients disparaissent dans une construction ultérieure de Cohen-Daubechies-Vial [5], qui s'est maintenant généralisée à tout domaine borné de $\mathbb{R}^n$ dans un travail récent de Cohen-Dahmen-DeVore [4]. La prise en compte de conditions aux limites aux bords de l'intervalle a été résolue de façon théorique par Auscher [1] dans le cas de la construction de Meyer [9]. Les idées d'Auscher ont ensuite été reprises par Bertoluzza [3] pour pouvoir prendre en compte des conditions aux limites dans une analyse multirésolution, mais sans cependant construire les bases d'ondelettes associées.

L'objectif de cette note est la construction pratique de bases orthonormées d'ondelettes de $L^2(0, 1)$ vérifiant des conditions aux limites homogènes, ainsi que le calcul des opérateurs de dérivation associés : nous suivrons la démarche de [5] en appliquant les idées d'Auscher [1]. Cette construction est extensible aux paquets d'ondelettes quand une seule condition aux limites est imposée à chaque bord. Par symétrie, nous nous limiterons au problème du bord gauche, en nous plaçant sur le demi-espace $[0,+\infty[$. Nous définissons en premier lieu les fonctions de bord utiles pour construire une analyse multirésolution de $L^2([0,+\infty[)$ avec conditions aux limites imposées, puis nous en déduisons les ondelettes correspondantes. Nous exprimons ensuite les opérateurs de dérivation dans les bases construites et enfin illustrons cette construction par un exemple.

2 Définition des fonctions de bord sur la demi-droite

Nous utilisons une analyse multirésolution $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ associée aux ondelettes à support compact d'I. Daubechies [6]. Nous notons Φ la fonction d'échelle engendrant par translations entières une base orthonormée de l'espace V_0, et Ψ l'ondelette génératrice de la base orthonormée $\left(2^{j/2}\Psi(2^j x-k)\right)_{j,k\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$. Rappelons que Ψ comporte N moments nuls, et que Φ et Ψ sont à support dans $[-N+1,N]$.
Dans la suite, l'espace $V_0^{[0,+\infty[}$ sera construit en conservant les fonctions de V_0 "intérieures" à l'intervalle $[0,+\infty[$, soit les $\Phi(x-k)$ pour $k\geq N-\alpha$ ($\alpha=0$ ou1) et en ajoutant des fonctions au bord 0 pour conserver en un certain sens les polynômes dans $V_0^{[0,+\infty[}$.

2.1 Expression des monômes dans V_0 et fonctions de bord

Les monômes ne sont pas au sens naïf dans V_0 puisque de carré non sommable. Pourtant :

Proposition 1 *Pour $l=0,\ldots,N-1$, il existe un polynôme P_l de degré l tel que*

$$\frac{x^l}{l!}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}P_l(k)\ \Phi(x-k) \tag{1}$$

et le polynôme P_l s'écrit $P_l(X)=\sum_{n=0}^{l}\frac{C_{l-n}}{n!}X^n$, avec $C_l\stackrel{\text{def}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^l}{l!}\Phi(x)dx$.

Il faut comprendre l'égalité (1) comme une convergence uniforme ou L^2 sur tout compact. Pour x fixé, la somme étant finie, la convergence a lieu dans le sens le plus fort possible. Comme suggéré par P. Auscher [1], nous définissons les fonctions de bord suivantes qui permettront, d'une part d'engendrer les polynômes sur $[0,+\infty[$, d'autre part de prendre en compte les conditions aux limites en 0:

Définition 2 *Pour $l=0,\ldots,N-1$, α étant un paramètre fixé ($\alpha=0$ ou 1),*

$$\tilde{\Phi}_l(x)=\sum_{k=-N+1}^{N-1-\alpha}P_l(k)\ \Phi(x-k)\ \chi_{[0,+\infty[}(x). \tag{2}$$

Le paramètre α dépend de notre choix de garder ou non la fonction d'échelle la plus extérieure. Nous reviendrons sur la détermination de sa valeur. Remarquons que pour $\alpha=0$ la fonction $\tilde{\Phi}_l$ est polynômiale sur $[0,1]$.

2.2 Relation entre deux échelles

La proposition suivante montre qu'en définissant par $V_j^{[0,+\infty[}$ l'espace vectoriel engendré par les $\tilde{\Phi}_l(2^j x)$ et les $\Phi(2^j x-k)$ pour $k\geq N-\alpha$, nous obtenons une analyse multirésolution de $L^2([0,+\infty[)$:

Proposition 3 *Il existe une matrice b de taille N x $(2N-1-\alpha)$ et de rang $N-\alpha$ telle que, en notant D la matrice diagonale de terme général $d_{ii}=1/2^{i-1}$:*

$$\begin{pmatrix}\tilde{\Phi}_0\\ \vdots\\ \tilde{\Phi}_{N-1}\end{pmatrix}(\frac{x}{2})=D\begin{pmatrix}\tilde{\Phi}_0\\ \vdots\\ \tilde{\Phi}_{N-1}\end{pmatrix}(x)+b\begin{pmatrix}\Phi_{N-\alpha}\\ \vdots\\ \Phi_{3N-2-2\alpha}\end{pmatrix}(x). \tag{3}$$

La démonstration découle directement de (1) et sera détaillée dans [10]. Remarquons que cette formule présente l'avantage de faire intervenir une matrice diagonale D, à comparer avec la matrice triangulaire de [5]. Ceci nous sera particulièrement utile pour le calcul de la matrice de dérivation. Par contre, contrairement à [5], les supports des fonctions $\tilde{\Phi}_k$ ne sont pas emboîtés.

3 Multirésolution avec conditions aux limites

Définition 4 *Soit $\Lambda \subset \{0, \ldots, N-1\}$ (éventuellement $\emptyset$). Nous dirons que f de $L^2([0,+\infty[)$ appartient à $CL(\Lambda)$ si f est au moins $\max \Lambda$ fois dérivable en 0 et*

$$\forall \lambda \in \Lambda, \quad f^{(\lambda)}(0) = 0. \tag{4}$$

A condition d'être suffisamment régulières, il est clair que toutes les fonctions $\Phi(x-k)$ pour $k \geq N - \alpha$ sont $CL(\Lambda)$, et ce quel que soit Λ. D'autre part, d'après (1) et (2), seuls les $\tilde{\Phi}_k$ pour $k \notin \Lambda$ sont $CL(\Lambda)$. Remarquons que pour $\alpha = 0$, les fonctions $\tilde{\Phi}_l$ étant purement polynômiales sur $[0,1]$, le problème de la régularité en 0 ne se pose pas. Pour $\alpha = 1$, cela n'est plus vrai.

Proposition 5 *Soit $V_j^{[0,+\infty[}(\Lambda)$ la fermeture dans $L^2([0,+\infty[)$ de l'espace vectoriel engendré par les fonctions $\tilde{\Phi}_k(2^j x)$ et $\Phi(2^j x - l)$ pour $k \notin \Lambda$ et $l \geq N - \alpha$. Alors $(V_j^{[0,+\infty[}(\Lambda))_{j \in \mathbb{Z}}$ est une analyse multirésolution de $L^2([0,+\infty[)$.*

Cela découle directement de la proposition 3 et des résultats de [5]. Les fonctions $\tilde{\Phi}_k$ pour $k \notin \Lambda$ sont ensuite orthonormalisées par le procédé d'orthonormalisation de Gram (voir par exemple [8]), leur matrice de Gram se calculant aisément grâce à la relation d'échelle (3).

4 Construction des ondelettes

Nous allons construire une base de $W_0^{[0,+\infty[}(\Lambda)$, espace orthogonal à $V_0^{[0,+\infty[}(\Lambda)$ dans $V_1^{[0,+\infty[}(\Lambda)$. Nous commençons par inclure les ondelettes intérieures $\Psi(x-k)$ pour $k \geq N - \alpha$ et définissons des ondelettes de bord :

Définition 6 *Nous définissons les fonctions $\tilde{\Psi}_k$ pour $k \in \{0, \ldots, N-1\}$ par :*

$$\tilde{\Psi}_k = \sqrt{2}\left(I - P_{V_0^{[0,+\infty[}(\Lambda)}\right)\left(\tilde{\Phi}_k(2x) - 2^k \tilde{\Phi}_k(x)\right)$$

où $P_{V_0^{[0,+\infty[}(\Lambda)}$ désigne la projection orthogonale sur $V_0^{[0,+\infty[}(\Lambda)$.

Cette formule se simplifie pour $k \notin \Lambda$, car alors $\left(I - P_{V_0^{[0,+\infty[}(\Lambda)}\right)(\tilde{\Phi}_k(x)) = 0$.

Proposition 7 *Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *Les fonctions $\tilde{\Psi}_k(x)$ sont dans $V_1^{[0,+\infty[}(\Lambda)$.*
2. *Les fonctions $\tilde{\Psi}_k(x)$ sont orthogonales à $V_0^{[0,+\infty[}(\Lambda)$.*
3. *Les fonctions $\tilde{\Psi}_k(x)$ sont orthogonales aux fonctions $\Psi(x-k)$ pour $k \geq N - \alpha$.*
4. *La famille $\{\tilde{\Psi}_0(x), \ldots, \tilde{\Psi}_{N-1}(x)\}$ engendre un espace de dimension $N - \alpha$.*

Démonstration : Le point 1 se démontre par réecriture des fonctions $\tilde{\Psi}_k$ en utilisant (3). Le point 2 est évident. Pour le point 3, il suffit de vérifier l'orthogonalité des $\Psi(x-k)$ avec les fonctions $\tilde{\Phi}_l(2x)$ et $\tilde{\Phi}_l(x)$. En ce qui concerne les $\tilde{\Phi}_l(x)$, l'orthogonalité vient de la définition 2 et de l'orthogonalité des $\Phi(x-k)$ entre elles. Pour les $\tilde{\Phi}_l(2x)$, il suffit d'écrire les $\Psi(x-k)$ pour $k \geq N - \alpha$ comme combinaisons linéaires des $\Phi(2x - l)$ pour $l \geq N - 2\alpha + 1$ et d'utiliser le même argument. Le point 4 découle de la proposition 3 : la famille $\left(\tilde{\Phi}_k(2x) - 2^k\tilde{\Phi}_k(x)\right)_{k=0,\ldots N-1}$ est de rang $N-\alpha$ par propriété de la matrice b. L'orthogonalité des $\tilde{\Psi}_k$ avec $V_0^{[0,+\infty[}(\Lambda)$ (point 2) implique enfin que la famille $\tilde{\Psi}_k$ est exactement de rang $N-\alpha$. □

Si $\alpha = 1$, nous démontrons que nous pouvons supprimer n'importe laquelle de ces fonctions pour obtenir une famille libre : cela découle des propriétés de la matrice b introduite dans (3).

Proposition 8 *Les fonctions $2^{j/2}\Psi(2^jx-k)$ pour $k \geq N-\alpha$ et $j \in \mathbb{Z}$ et $2^{j/2}\tilde{\Psi}_k(2^jx)$ pour $k \in \{0,\ldots,N-\alpha-1\}$ et $j \in \mathbb{Z}$ forment une base d'ondelettes de $L^2([0,+\infty[)$ qui satisfont aux conditions aux limites en 0 définies en (4).*

Il suffit ensuite d'orthonormaliser les $\tilde{\Psi}_k$ pour obtenir une base orthonormée de $L^2([0,+\infty[)$.

5 Calcul de l'opérateur de dérivation

Nous calculons dans cette partie l'expression de l'opérateur $P_{V_j^{[0,+\infty[}(\Lambda)}\left(\frac{d}{dx}\right)P_{V_j^{[0,+\infty[}(\Lambda)}$.

Grâce à l'invariance des $V_j^{[0,+\infty[}(\Lambda)$ par changement d'échelle, il suffit de calculer les produits scalaires

$$r_k =< \Phi(x-k), \frac{d\Phi}{dx}(x) >,\ A_{k,l} =< \tilde{\Phi}_k(x), \frac{d\tilde{\Phi}_l}{dx}(x) > \text{ et } B_{k,l} =< \tilde{\Phi}_k(x), \frac{d\Phi_l}{dx}(x) > .$$

Le calcul des r_k est classique et expliqué dans [2]. Nous noterons A la matrice (carrée de taille $N-\#\Lambda$) correspondant aux termes $A_{k,l},\ k,l \in \{0,1\ldots N-1\}\backslash\Lambda$ et B la matrice (rectangulaire de taille $(N-\#\Lambda)$ x $(2N-2)$) correspondant aux $B_{k,l},\ k \in \{0,1,\ldots,N-1\}\backslash\Lambda,\ l \geq N-\alpha$.

Commençons par calculer B. En utilisant (2), nous obtenons tout de suite :

$$B_{i+1,j-N+\alpha+1} = \sum_{k=-N+1}^{N-1-\alpha} P_i(k)\ r_{k-j}. \tag{5}$$

La matrice A se déduit de la relation d'échelle (3):

$$A = D\ A\ D\ -\ b\ {}^tB\ D\ +\ D\ B\ {}^tb\ +\ b\ r\ {}^tb$$

où r est la matrice carrée de taille $2N-1-\alpha$ et de terme général r_{i-j}, D et b les matrices introduites dans la proposition 3. La formule ci-dessus est absurde pour $\alpha = 0$: il faut en fait rajouter une colonne formée de 0 à droite de la matrice B ($< \tilde{\Phi}_k(x), \frac{d\Phi_{3N-2}}{dx}(x) >= 0$, les supports de ces fonctions n'ont qu'un point en commun).

Chaque terme de la matrice A se calcule alors en effectuant une division terme à terme, sauf le terme en haut à gauche si la valeur en 0 n'est pas imposée. Son calcul est direct :

$$A_{1,1} = \int_0^{+\infty} \tilde{\Phi}_0(x)\frac{d\tilde{\Phi}_0}{dx}(x)dx = -\frac{1}{2}\tilde{\Phi}_0(0)^2 = -\frac{1}{2}.$$

Par changement de base, nous en déduisons les coefficients de l'opérateur de dérivation sur la base (orthonormée cette fois) de $V_0^{[0,+\infty[}(\Lambda)$, ainsi que sur la base d'ondelettes de $L^2([0,+\infty[) \cap CL(\Lambda)$.

L'expression de l'opérateur de dérivée seconde se calcule de manière analogue et est légèrement plus compliquée [10].

6 Exemple

Notons que sans imposer de conditions aux limites, notre construction conduit à des bases d'ondelettes différentes de celles de [5]. A titre d'exemple nous traçons sur la figure les graphes des fonctions de bord (pour $N = 2$) s'annulant en 0 (adaptées pour des conditions aux limites

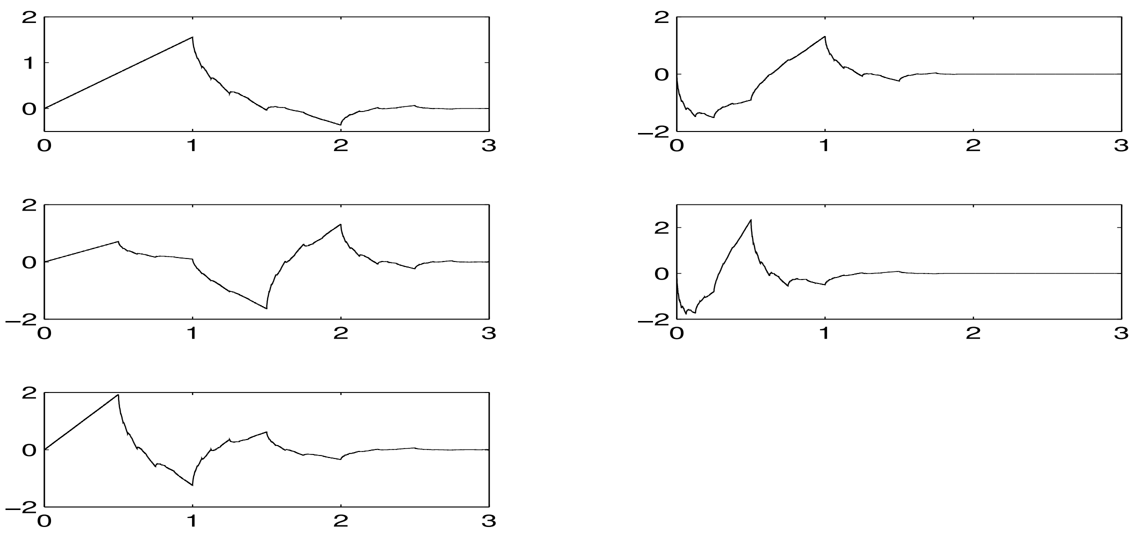

FIG. - *Fonction d'échelle $\tilde{\Phi}_0$ (première ligne) et ondelettes de bord vérifiant des conditions de Dirichlet en 0 ($N = 2$, $\alpha = 0$ pour les figures de gauche, $\alpha = 1$ pour les figures de droite)*

FIG. - *Scaling function $\tilde{\Phi}_0$ (first row) and edge wavelets satisfying Dirichlet conditions at* 0 *($N = 2$, $\alpha = 0$ for left figures, $\alpha = 1$ for right figures)*

de Dirichlet) et pour les deux valeurs de α. Pour $\alpha = 0$, les fonctions d'échelle et ondelettes sont indéfiniment dérivables en 0, pour $\alpha = 1$, les fonctions d'échelle et ondelettes ont simplement une régularité au bord fonction de N.

L'intérêt du paramètre $\alpha = 1$ réside dans le fait que dans la base de $W_0^{[0,+\infty[}(\Lambda)$, une ondelette de bord disparait en faveur de l'ondelette intérieure qui touche le bord : dans le cas de construction d'ondelettes sur [0,1] avec une seule condition aux limites à chaque bord les dimensions des espaces $V_j^{[0,1]}(\Lambda)$ et $W_j^{[0,1]}(\Lambda)$ sont alors égales à 2^j.

Les démonstrations détaillées des propositions, le calcul explicite des filtres utilisés dans les algorithmes rapides de décomposition et des opérateurs de dérivation, ainsi que des tableaux de valeurs correspondants figureront dans [10].

Références bibliographiques

[1] P. Auscher, Ondelettes à support compact et conditions aux limites, *J. Funct. Anal.* **111** (1993).

[2] A. G. Beylkin, On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets, *SIAM J. Numer. Anal.* **6** (1992).

[3] S. Bertoluzza, G. Naldi et J.C. Ravel, Wavelet methods for the numerical solution of boundary value problems on the interval, *Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*, Chui, Montefusco, and Puccio (eds), p. 425-448 (1994).

[4] A. Cohen, W. Dahmen et R. DeVore, Multiscale decompositions on bounded domains, *Preprint*, 1995.

[5] A. Cohen, I. Daubechies et P. Vial, Wavelets on the interval and fast wavelet transforms, *Appl. Comp. Harmonic Analysis* **1** (1993).

[6] I. Daubechies, Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.* **41** (1988).

[7] S. Jaffard, Y. Meyer, Bases d'ondelettes dans des ouverts de $\mathbb{R}^n$, *J. Math. Pures et Appl.* 68, p. 95-108 (1989).

[8] Y. Meyer, Ondelettes et opérateurs, *Hermann*, Paris (1990).

[9] Y. Meyer, Ondelettes sur l'intervalle, *Rev. Mat. Iberoamericana* **7** (1992).

[10] P. Monasse, V. Perrier, Wavelets adapted for Partial Differential Equations with boundary conditions, *preprint* (1995).