Application de la théorie des ondelettes *

Valérie Perrier

Laboratoire de Modélisation et Calcul de l'IMAG
Institut National Polytechnique de Grenoble

Valerie.Perrier@imag.fr

*Enseignement UNESCO *Traitement du signal et des images numériques*, Tunis, ENIT, 14-18 mars 2005

Débruitage par ondelettes orthogonales

Références : articles de Donoho et Johnstone

Mesures bruitées :

$$X[n] = f[n] + W[n], \quad n = 0, N-1$$

X : données mesurées,
f : signal (inconnu) de taille N contaminé par le bruit
W : *bruit blanc* gaussien de moyenne nulle et d'écart type σ.

L'objectif est de construire un *estimateur* $\tilde{F} = \mathcal{D}(X)$ de f minimisant le risque :

$$r(\mathcal{D}, f) = \mathbf{E}\left\{\|f - \tilde{F}\|^2\right\} = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{E}\left\{|f[n] - \tilde{F}[n]|^2\right\}$$

Estimateurs non linéaires sur bases

Soit $\mathcal{B} = \{g_k \in \mathbb{R}^N \ ; \ k = 0, N-1\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^N$. On décompose les données sur $\mathcal{B}$:

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} < X \ / \ g_k > \ \ g_k[n]$$

et les produits scalaires vérifient :

$$< X \ / \ g_k > = < f \ / \ g_k > + < W \ / \ g_k >$$

Remarques :

- $(< W \ / \ g_k >)$ est également un bruit blanc gaussien de variance σ^2 (car $\mathcal{B}$ est orthonormée).
- $\mathbf{E}\{< X \ / \ g_k >\} = | < f \ / \ g_k > |^2 + \sigma^2$

Opérateurs diagonaux

Un *opérateur diagonal* $\mathcal{D}$ dans la base $\mathcal{B}$ conduit à un estimateur de la forme :

$$\tilde{F} = \mathcal{D}X = \sum_{k=0}^{N-1} d_k \left(< X \ / \ g_k > \right) \ g_k$$

où les d_k sont des fonctions d'atténuation des coefficients bruités.

Estimateur idéal (*i.e.* qui minimise le risque $r(\mathcal{D}, f)$)

$$\tilde{F} = \mathcal{D}X = \sum_{k=0}^{N-1} < X \ / \ g_k > \theta(k) \ g_k$$

avec

$$\theta(k) = \begin{cases} 1 & si \quad | < f \ / \ g_k > | \geq \sigma \\ 0 & si \quad | < f \ / \ g_k > | < \sigma \end{cases}$$

Dans ce cas, l'opérateur $\mathcal{D}$ est un opérateur non linéaire.

Estimateurs par seuillage

Un estimateur par seuillage dans la base $\mathcal{B}$ est donné par un *opérateur* $\mathcal{D}$ *diagonal* :

$$\tilde{F} = \mathcal{D}X = \sum_{k=0}^{N-1} d_k \left(< X \ / \ g_k > \right) \ g_k$$

où les d_k sont des fonctions de seuillage (T un seuil):

$$d_k(x) = \rho_T(x) = \begin{cases} x & si \quad |x| > T \quad \text{(seuillage "dur")} \\ 0 & si \quad |x| \geq T \end{cases}$$

ou bien

$$d_k(x) = \rho_T(x) = \begin{cases} x - T & si \quad x \geq T \quad \text{(seuillage "doux")} \\ x + T & si \quad x \leq -T \\ 0 & si \quad |x| \leq T \end{cases}$$

Question : comment choisir T pour approcher le risque minimal de l'estimateur idéal?

Réponse : le choix $T = \sigma\sqrt{2\log_e N}$ conduit à un risque très légèrement supérieur (th. de Donoho-Jonstone).

Seuillage dans une base d'ondelettes

On choisit comme base (cas périodique) :
$\mathcal{B} = \{\varphi, \psi_{j,k}\ ;\ 0 \geq j \geq J-1, k = 0, 2^j - 1\}$ ($N = 2^J$=taille des données).
L'estimateur de seuillage sur base d'ondelettes est :

$$\tilde{F} = \rho_T(< X\ /\ \varphi >)\ \varphi + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^J-1} \rho_T\ (< X\ /\ \psi_{j,k} >)\ \psi_{j,k}$$

Estimation de la variance σ^2 du bruit W :

Si f est régulier par morceaux, un estimateur du bruit robuste est calculé à partir de la *médiane* des coefficients d'ondelettes à l'échelle la plus fine :

- $\{< X\ /\ \psi_{J-1,k} >\}_{k=0,2^{J-1}-1}$: $2^{J-1} = \frac{N}{2}$ coefficients d'ondelettes des données à l'échelle la plus fine.

- Si $< f\ /\ \psi_{J-1,k} >$ est petit (f est régulier sur le support de $\psi_{J-1,k}$), on a : $< X\ /\ \psi_{J-1,k} > \approx < W\ /\ \psi_{J-1,k} >$.

- Si $< f\ /\ \psi_{J-1,k} >$ est grand, cela correspond à une singularité de f,

mais si f est régulière/morceaux, peu de coefficients $< X \ / \ \psi_{J-1,k} >$ sont affectés à la plus petite échelle.

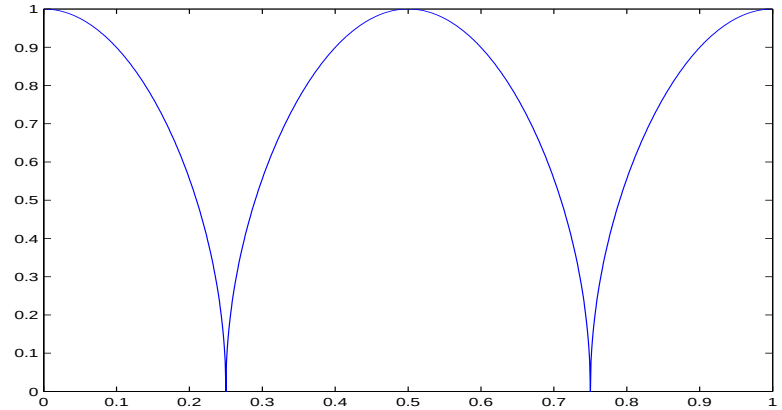
Donc $< X \ / \ \psi_{J-1,k} >$ est une variable aléatoire de variance σ^2.

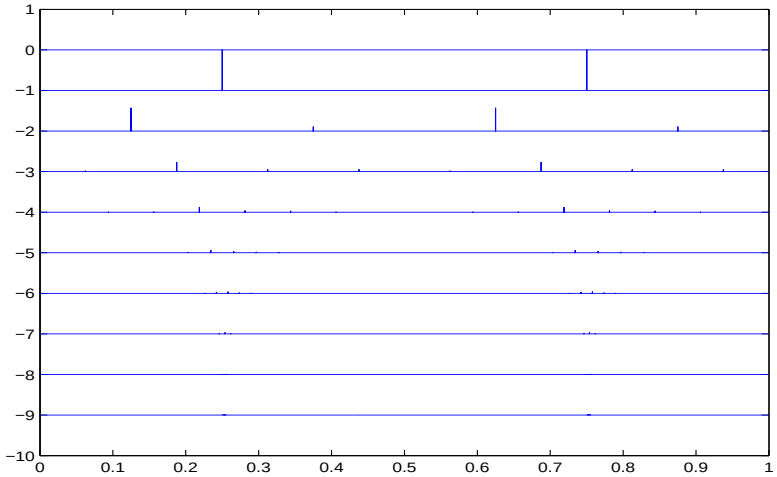
On calcule alors σ par la formule (exacte dans le cas de $P = 2^{J-1}$ variables aléatoires gaussiennes indépendantes, de moyenne nulles, et de variance σ^2) :

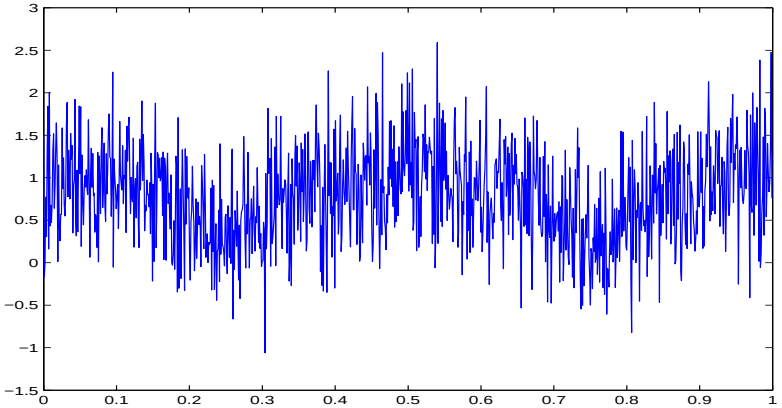
$$\sigma \approx \frac{M_X}{0,6745}$$

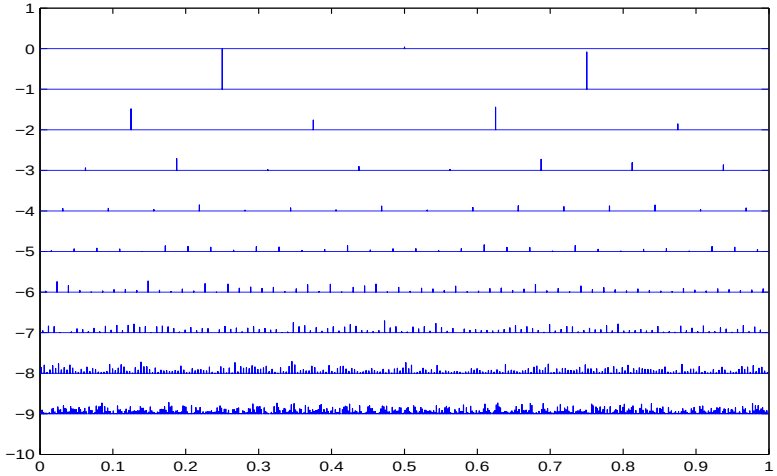
où M_X est la médiane des coefficients $\{< X \ / \ \psi_{J-1,k} >\}_{k=0,2^{J-1}-1}$ à l'échelle la plus fine.

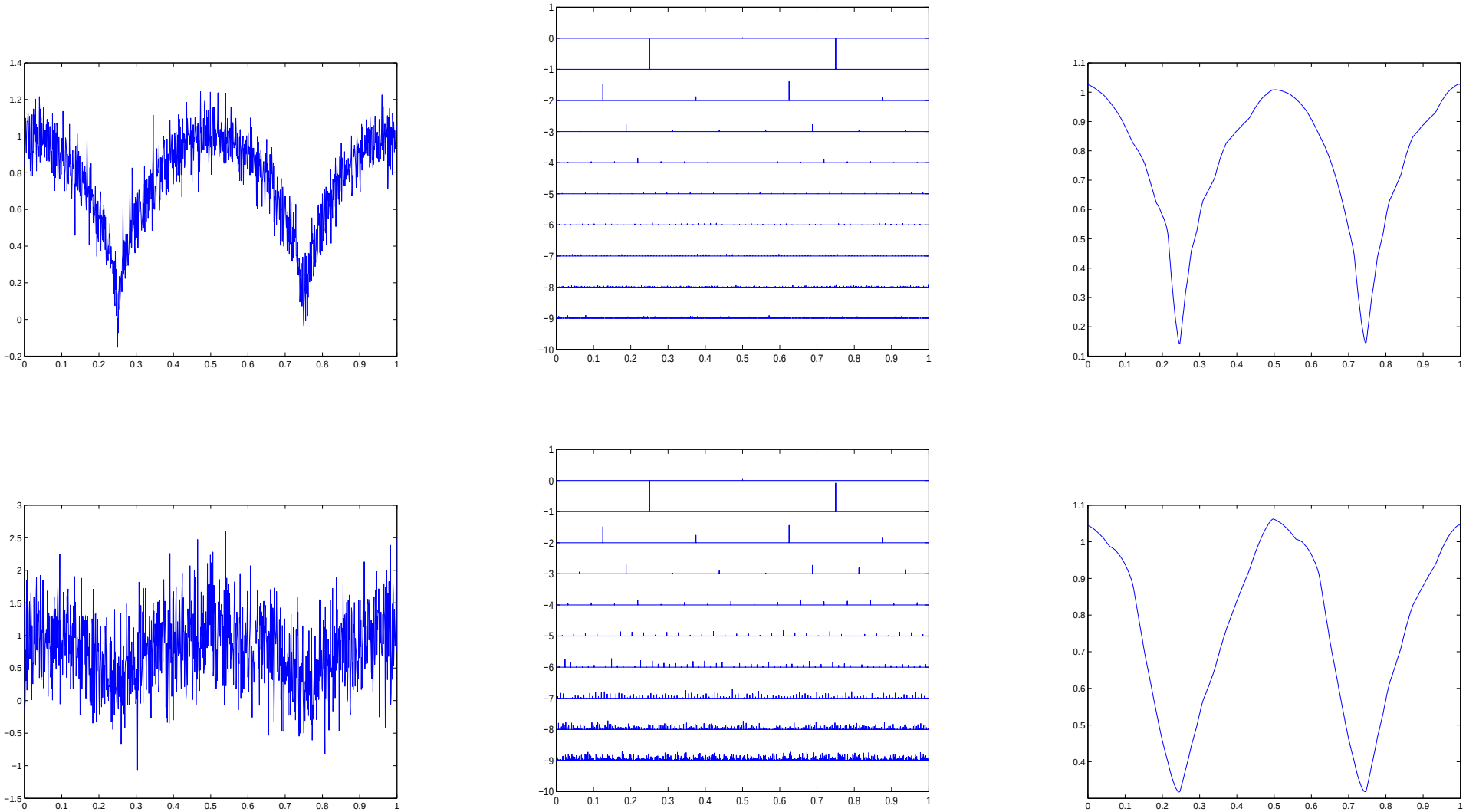
Exemple : $f(x) = \sqrt{|\cos 2\pi x|} + bruit$
(discrétisée sur $1024 = 2^{10}$ valeurs)

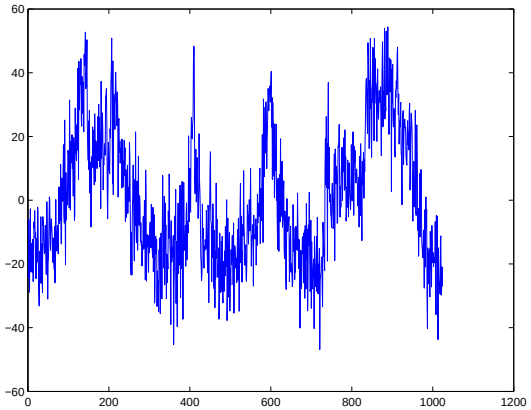

1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1

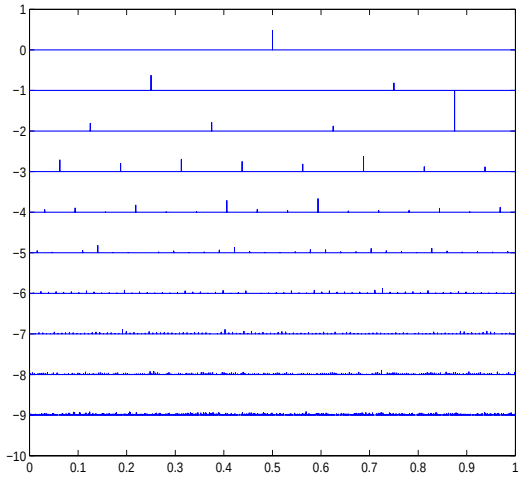

1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1

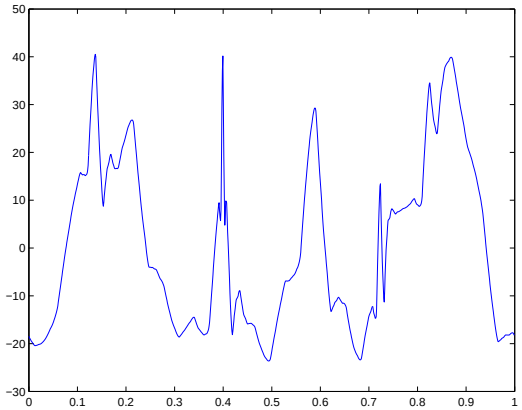

3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1

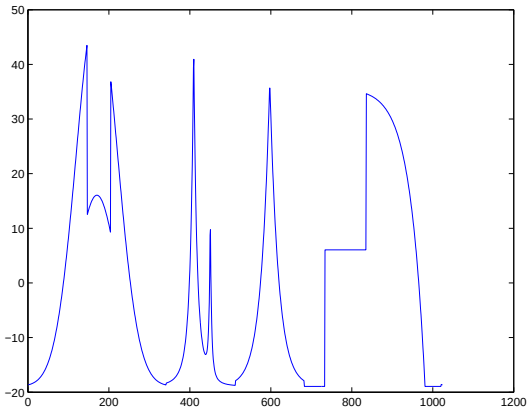

1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1

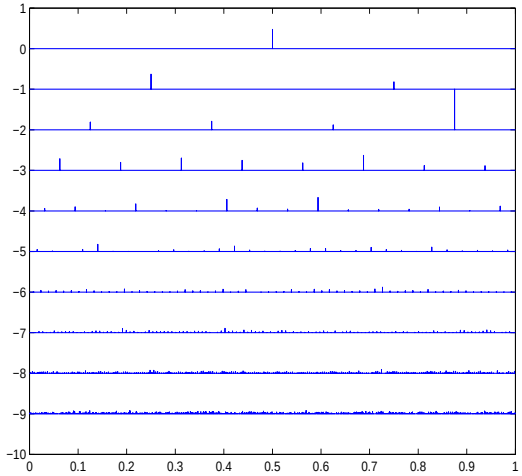

1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1


60
40
20
0
−20
−40
−60
0
200
400
600
800
1000
1200


1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


50
40
30
20
10
0
−10
−20
−30
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


50
40
30
20
10
0
−10
−20
0
200
400
600
800
1000
1200


1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Exemple de programme WaveLab de débruitage

```
%Génération d'un signal y
n=1024;dx=1/n;x=(0:n-1)/n;
alpha=0.1 % rapport du bruit
y=sqrt(abs(cos(2*pi*x)));

ou

y=MakeSignal('Piece-Regular',n);

%
y=y+alpha*randn(size(y)); % ajout d'un bruit gaussien
plot(x,y) % trace du signal bruité

% Débruitage par seuillage "dur" sur base orthonormee 'Symmlet 4'

out=ThreshWave(y);

plot(x,out) % trace du signal débruité
```

Extensions des bases d'ondelettes

- Les bases d'ondelettes biorthogonales (utilisées en pratique dans JPEG2000),
- Les bases d'ondelettes sur l'intervalle $[0, 1]$,
- Les bases de paquets d'ondelettes,
- Les bases adaptées à la géométrie de l'image : curvelets, bandelettes, etc...