Feuille 1 solutions

2. On note $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$, $w = \overrightarrow{AD}$. Alors $\overrightarrow{CD} = w - v$, $\overrightarrow{DB} = u - w$, $\overrightarrow{BC} = v - u$. On obtient

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = u \cdot (w - v) + v \cdot (u - w) + w \cdot (v - u) = 0$$

par bilinéarité et commutativité du produit scalaire.

3.

3.1. On note $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$, alors $\overrightarrow{BC} = v - u$, $\overrightarrow{BA} = -u$. On obtient

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = u \wedge v - (v - u) \wedge (-u) = u \wedge v + v \wedge u - u \wedge u = 0$$

par bilinéarité et anti-commutativité du produit vectoriel.

3.2. On note $u = \overrightarrow{DA}$, $v = \overrightarrow{DB}$, $w = \overrightarrow{DC}$. Alors $\overrightarrow{CA} = u - w$, $\overrightarrow{CB} = v - w$, et

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{DA} &= (u - w) \wedge (v - w) - u \wedge v - v \wedge w - w \wedge u \\ &= -u \wedge w - w \wedge v + w \wedge w - v \wedge w - w \wedge u = 0\end{aligned}$$

par bilinéarité et anti-commutativité du produit vectoriel.

4. En utilisant la formule on calcule

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} + (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} + (\vec{w} \cdot \vec{v})\vec{u} - (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v} = 0$$

par commutativité du produit scalaire.

5. On veut calculer la distance $d(P_0, D) = d(P_0, H)$ à partir de $P_1, P_0, \vec{d}$. Par Pythagoras nous avons $d^2(P_1, P_0) = d^2(P_1, H) + d^2(P_0, H)$ et $d(P_1, H) = \frac{\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{d}}{||\vec{d}||}$. Alors

$$d^2(P_0, H) = \overrightarrow{P_1P_0} \cdot \overrightarrow{P_1P_0} - \frac{(\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{d})^2}{\vec{d} \cdot \vec{d}}. \tag{1}$$

5.1. Nous avons

$$d^2(A, M) = (1-x)^2 + (2-(2x-1))^2 = x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 12x + 9 = 5x^2 - 14x + \frac{49}{5} + \frac{1}{5} = (\sqrt{5}x - \frac{7}{\sqrt{5}})^2 + \frac{1}{5}.$$

Le minimum par rapport à x est atteint à $x_{\min} = \frac{7}{5}$, et sa valeur est $d(A, D) = \min_x d(A, M) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

La projection est donnée par $H = (x_{\min}, 2x_{\min} - 1) = (\frac{7}{5}, \frac{9}{5})$.

5.2. Un vecteur directeur est donné par $\vec{d} = (1, 2)$, un point P_1 sur D par $(0, -1)$ en posant $x = 0$ dans l'expression pour un point général de D. Alors par la formule (1)

$$d(B, D) = \sqrt{\overrightarrow{P_1B} \cdot \overrightarrow{P_1B} - \frac{(\overrightarrow{P_1B} \cdot \vec{d})^2}{\vec{d} \cdot \vec{d}}} = \sqrt{5 - \frac{3^2}{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

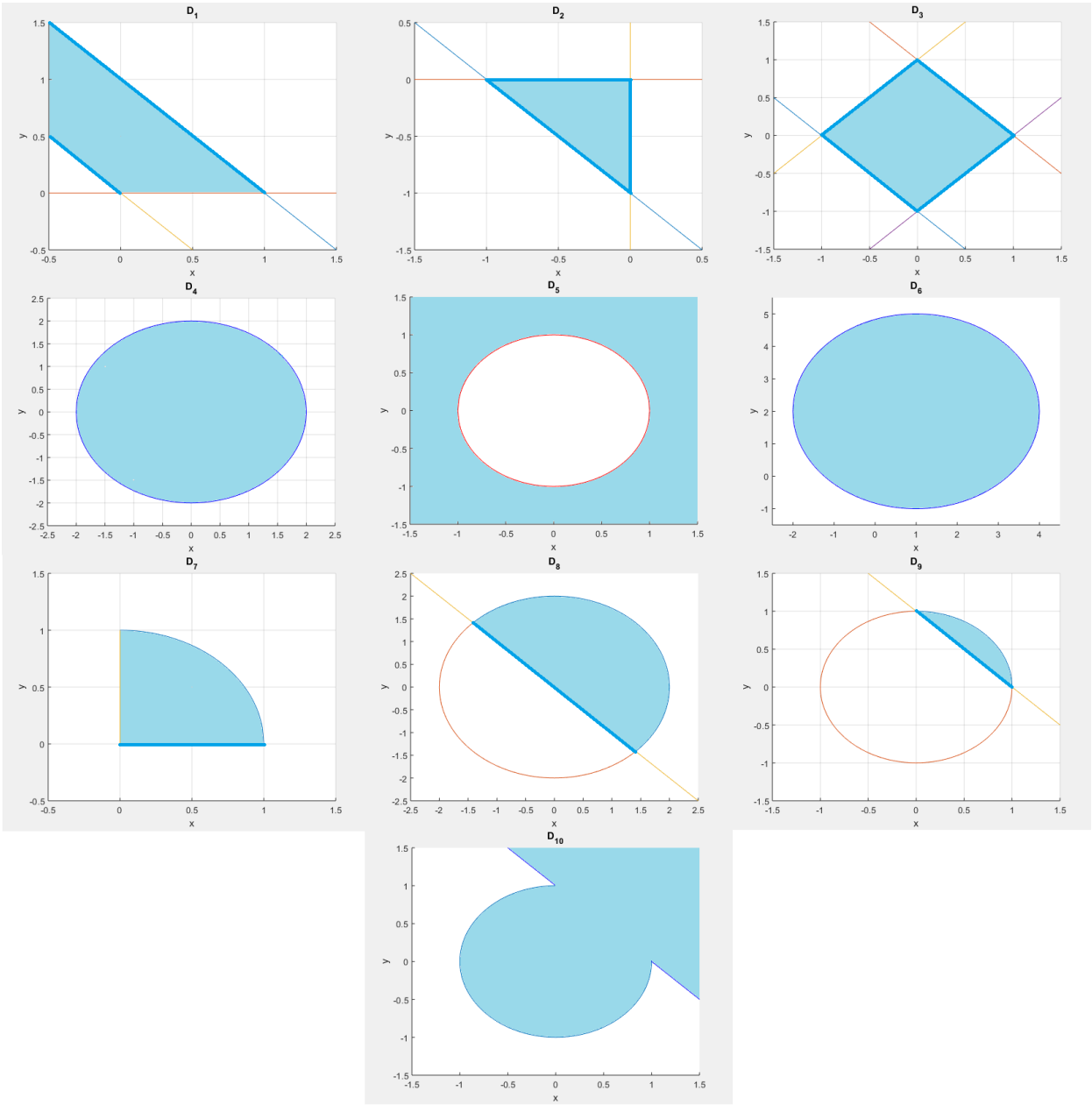

Figure 1: Exo 1: Domaines D_1 à D_{10} dans le plan

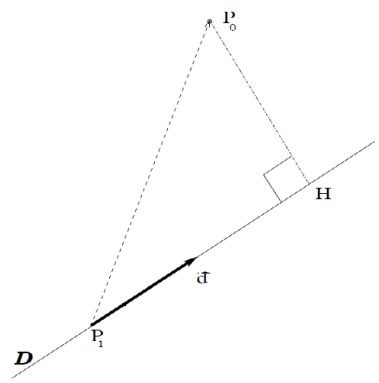

Figure 2: H est le point le plus proche à P_0 sur D

6.

6.1. Un vecteur directeur de D est donné par $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (-4, 1, 6)$. Pour avoir un vecteur directeur de norme 1 on pose $\vec{d} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = \frac{(-4,1,6)}{\sqrt{53}}$. La droite D est donnée par l'ensemble $\{P_1 + \alpha\vec{d} \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}$, mais on cherche une équation de D.

On pose $y = ax + b$, $z = cx + d$ comme système d'équations déterminant D. Les points P_1, P_2 doivent satisfaire le système, alors on a

$$1 = 3a + b, \quad -2 = 3c + d, \quad 2 = -a + b, \quad 4 = -c + d.$$

Cela donne les systèmes linéaires

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

sur les coefficients inconnus a, b, c, d qui ont pour solution

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Le système d'équations de D est alors donné par

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}, \qquad z = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}.$$

6.2. La formule pour le calcul de la distance restant la même, on obtient avec $\overrightarrow{P_1P_0} = (-2, 2, 1)$

$$d(P_0, D) = \sqrt{\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \overrightarrow{P_1P_0} - \frac{(\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{v})^2}{\vec{v} \cdot \vec{v}}} = \sqrt{9 - \frac{16^2}{53}} = \sqrt{\frac{221}{53}}.$$

6.3. La projection orthogonale H satisfait $H = P_1 + \alpha\vec{v}$ parce que elle se situe sur D et $\overrightarrow{P_0H} \cdot \vec{v} = 0$ parce que H est le point le plus proche sur D. On a $\overrightarrow{P_0H} = \overrightarrow{P_0P_1} + \alpha\vec{v}$ donc $\alpha = -\frac{\overrightarrow{P_0P_1} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}$. Alors H est donné par

$$H = P_1 - \frac{\overrightarrow{P_0P_1} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = (3, 1, -2) - \frac{-16}{53}(-4, 1, 6) = \frac{(95, 69, -10)}{53}.$$

7. On détermine des vecteurs normaux $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ aux plans. Les vecteurs des coefficients dans les équations nous donnent $\vec{v}_1 = (2, 3, 1)$ et $\vec{v}_2 = (3, -1, -3)$.

7.1. Les plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont perpendiculaires. On vérifie bien $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$.

7.2. Soit H_1 (H_2) le point le plus proche de $\mathcal{P}_1$ ($\mathcal{P}_2$) à O. Alors $\overrightarrow{OH_1}$ ($\overrightarrow{OH_2}$) est perpendiculaire à $\mathcal{P}_1$ ($\mathcal{P}_2$) et donc collinéaire à $\vec{v}_1$ ($\vec{v}_2$). Pour calculer la distance $d(O,\mathcal{P}_1)$ ($d(O,\mathcal{P}_2)$) il suffit de projeter $\overrightarrow{OP_1}$ ($\overrightarrow{OP_2}$) sur la direction $\vec{v}_1$ ($\vec{v}_2$), où P_1 (P_2) est un point arbitraire dans $\mathcal{P}_1$ ($\mathcal{P}_2$). On peut choisir $P_1 = (0,0,4)$ et $P_2 = (0,-2,0)$. On obtient

$$d(O,\mathcal{P}_1) = \frac{\overrightarrow{OP_1}\cdot\vec{v}_1}{||\vec{v}_1||} = \frac{4}{\sqrt{14}}, \qquad d(O,\mathcal{P}_2) = \frac{\overrightarrow{OP_2}\cdot\vec{v}_2}{||\vec{v}_2||} = \frac{2}{\sqrt{19}}.$$

Le vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à la fois à $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. Donc on peut poser $\vec{d} = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = (-8,9,-11)$. Pour trouver un point $P \in \mathcal{D}$ il faut trouver une solution des deux équations des plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$. En posant $x = 0$ on obtient un système linéaire sur y, z,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

qui a pour solution $y = \frac{7}{4}$, $z = -\frac{5}{4}$. On pose $P = (0, \frac{7}{4}, -\frac{5}{4})$. Alors on obtient par la formule (1)

$$d(O,\mathcal{D}) = \sqrt{\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PO} - \frac{(\overrightarrow{PO}\cdot\vec{d})^2}{\vec{d}\cdot\vec{d}}} = \sqrt{\frac{74}{16} - \frac{(\frac{118}{4})^2}{266}} = \sqrt{\frac{5760}{16\cdot 266}} = \sqrt{\frac{180}{133}}.$$

7.3. Le centre de la sphère $\mathcal{S}$ est situé dans le point $C = (1,1,1)$ et son rayon est égal à 1. On calcule

$$d(C,\mathcal{P}_1) = \frac{\overrightarrow{P_1C}\cdot\vec{v}_1}{||\vec{v}_1||} = \frac{(1,1,-3)\cdot(2,3,1)}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{2}{7}}.$$

La distance étant plus petite que le rayon, la sphère intersecte $\mathcal{P}_1$.

De plus, on calcule

$$d(C,\mathcal{D}) = \sqrt{\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PC} - \frac{(\overrightarrow{PC}\cdot\vec{d})^2}{\vec{d}\cdot\vec{d}}} = \sqrt{\frac{106}{16} - \frac{(\frac{158}{4})^2}{266}} = \sqrt{\frac{106}{16} - \frac{\frac{24964}{16}}{266}} = \sqrt{\frac{101}{133}}.$$

Cette distance est aussi plus petite que le rayon, donc $\mathcal{S}$ intersecte $\mathcal{D}$.

8.

8.1. $r = const$ correspond à un cercle (ou un point dans le cas $r = 0$); $\theta = const$ correspond à un rayon émanant de l'origine.

8.2. $r = const$ correspond à un cylindre centré sur l'axe z; $\theta = const$ correspond à un demi-plan vertical borné par l'axe z; $z = const$ correspond à un plan horizontal.

$r = const$ et $\theta = const$ correspond à une droite verticale; $r = const$ et $z = const$ correspond à un cercle horizontal centré sur un point sur l'axe z.

8.3. $r = const$ correspond à une sphère centrée sur l'origine; $\theta = const$ correspond à un cône centré sur l'axe z; $\phi = const$ correspond à un demi-plan vertical borné par l'axe z.

$r = const$ et $\theta = const$ correspond à un cercle horizontal centré sur un point sur l'axe z; $r = const$ et $phi = const$ correspond à un demi-cercle vertical centré sur l'origine.

8.4. On substitue les valeurs $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ dans l'équation et on obtient

$$r^2\cos^2\theta - 2r\cos\theta + 1 + r^2\sin^2\theta = 1 \quad \Leftrightarrow \quad r(r - 2\cos\theta) = 0.$$

L'équation du cercle se reduit à $r = 2\cos\theta$.

8.5. On substitue les valeurs $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ dans l'équation et on obtient $z = r$.

9.

9.1. La normale $\vec{n}$ à $\mathcal{P}$ est orthogonale à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ à la fois, donc on peut poser $\vec{n} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$. L'équation de $\mathcal{P}$ peut s'écrire $\vec{n} \cdot X = c$, avec $X = (x_1, x_2, x_3)$ le point général de $\mathcal{P}$ et c une constante réelle. Pour déterminer c on insère le point M_1 dans l'équation, ce qui donne $c = \vec{n} \cdot M_1$. On obtient

$$(\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) \cdot \overrightarrow{M_1 X} = 0.$$

Soit $M' = M_2 + \alpha \vec{u}_2 \in \mathcal{D}_2$ un point arbitraire. Pour évaluer la distance $d(\mathcal{P}, M')$ on projette $\overrightarrow{M_1 M'}$ sur $\vec{n}$. On a

$$d(\mathcal{P}, M') = \left| \frac{\overrightarrow{M_1 M'} \cdot \vec{n}}{||\vec{n}||} \right| = \left| \frac{(\overrightarrow{M_1 M_2} + \alpha \vec{u}_2) \cdot \vec{n}}{||\vec{n}||} \right| = \left| \frac{\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \vec{n}}{||\vec{n}||} \right| = d(\mathcal{P}, M_2),$$

parce que $\vec{u}_2 \cdot \vec{n} = 0$.

9.2. Le volume est donné par $V = (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}$. Alors $d(\mathcal{P}, M_2) = \left| \frac{V}{||\vec{n}||} \right|$. La distance $d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ est égale à $d(\mathcal{P}, M_2)$ parce que $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ ne sont pas collinéaires et la projection de $\mathcal{D}_2$ sur $\mathcal{P}$ se croise avec $\mathcal{D}_1$.

10. En coordonnées sphériques (r, ϕ, θ) les coordonnées des villes sont $(R, Lo, -La + \frac{\pi}{2})$ avec Lo la longitude et La la latitude. En valeurs absolues on a

$$\phi_B = 0, \quad \phi_{NY} = 1.2886, \quad \theta_B = 0.7185, \quad \theta_{NY} = 0.8610.$$

Deduisons la formule de l'angle entre deux points sur la sphère. On a

$$\cos\theta_{12} = (\cos\phi_1 \sin\theta_1, \sin\phi_1 \sin\theta_1, \cos\theta_1) \cdot (\cos\phi_2 \sin\theta_2, \sin\phi_2 \sin\theta_2, \cos\theta_2) = \sin\theta_1 \sin\theta_2 (\cos\phi_1 \cos\phi_2 + \sin\phi_1 \sin\phi_2) + \cos\theta_1 \text{ co}$$

L'angle entre les villes s'élève alors à $\varphi = \arccos(0.6296) \approx 0.8897$. Alors la distance entre les villes s'élève à $0.8897 \cdot R \approx 5694$km.

11.

11.1. La fonction $\sin t$ est 2π-périodique, la fonction $\cos^2 t$ est π-périodique. Alors la période de la trajectoire est 2π.

11.2. La vitesse est donnée par $(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (\cos t, -2\cos t \sin t) = (\cos t, -\sin 2t)$. Ce vecteur est nul si $t = (k_1 + \frac{1}{2})\pi$ et $2t = k_2 \pi$ pour $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, alors pour $t = (k + \frac{1}{2})\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. La norme de la vitesse est égale à $\sqrt{\cos^2 t + 4\cos^2 t \sin^2 t}$. La vitesse atteint son extremum où la dérivée de l'expression sous la racine s'annule.

On derive l'expression sous la racine et on obtient $\sin 2t(-1 + 4\cos 2t) = 0$. Les points où $\sin 2t = 0$ correspond à des minima locaux de la vitesse, les points où $1 = 4\cos 2t$ correspond à des maxima. On obtient alors $t = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

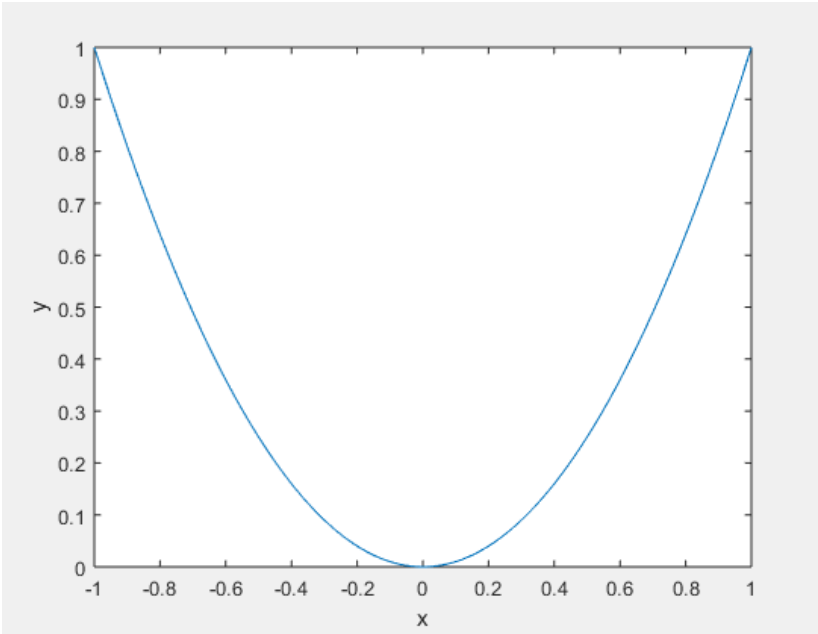

Figure 3: Exo 11.1: Trajectoire $(x(t), y(t))$ sur le plan

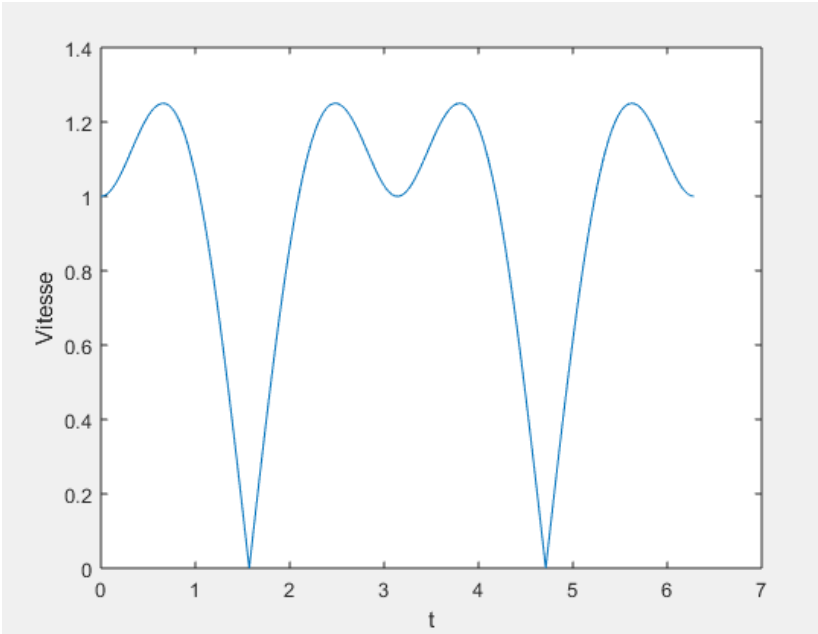

Figure 4: Exo 11.2: Vitesse en fonction de t