Feuille 8 solutions

1.

1.a.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

$$L_2 \mapsto L_2 - L_1,\ L_3 \mapsto L_3 - L_1 : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$L_3 \mapsto -L_3 + 2L_2 : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \mapsto L_1 - L_2,\ L_2 \mapsto L_2 - 2L_3 : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \mapsto L_1 + L_3 : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Solution : $(x, y, z) = (-1, 0, 1)$.

1.b.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 9 \\ 3 & 9 & -3 & 27 \\ -2 & 1 & -5 & 10 \end{array}\right)$$

$$L_2 \mapsto L_2 - 3L_1,\ L_3 \mapsto L_3 + 2L_1 : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 28 \end{array}\right)$$

$$L_1 \mapsto L_1 - \tfrac{3}{7}L_3,\ L_2 \mapsto \tfrac{1}{7}L_3,\ L_3 \mapsto \emptyset : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

La variable z peut être utilisée comme paramètre. La solution est donnée par $(x, y, z) = (-3-2z, 4+z, z)$.

1.c.
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$L_2 \mapsto L_2 - 2L_1,\ L_3 \mapsto L_3 - 3L_1 : \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$L_2 \mapsto -L_2,\ L_3 \mapsto L_3 - L_2 : \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

La dernière équation mène à une contradiction, pas de solutions.

1.d.
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$L_1 \mapsto \tfrac{1}{2}(L_1 - L_3),\ L_2 \mapsto L_2 - \tfrac{1}{2}(L_1 - L_3),\ L_3 \mapsto \tfrac{1}{2}(L_1 + L_3) : \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$L_1 \mapsto -\tfrac{1}{2}L_2,\ L_2 \mapsto L_1 : \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

La variable x_2 peut être utilisée comme paramètre. La solution est donnée par $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2x_2, x_2, 0, 0)$.

1.e.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \mapsto L_2 - 2L_1,\ L_3 \mapsto L_3 - L_1 : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \mapsto \tfrac{1}{3}L_2,\ L_3 \mapsto L_3 - \tfrac{1}{3}L_2 : \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$L_1 \mapsto L_1 - L_2,\ L_3 \mapsto \emptyset : \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}$$

La variable x_3 peut être utilisée comme paramètre. La solution est donnée par $(x_1, x_2, x_3) = (3 - 2x_3, -1 - x_3, x_3)$.

2.

2.1. On a $\det M' = 2 \det M$.

2.2. Non : contre-example $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2.3. Oui, on a $(M - M')x = 0$, et $M - M'$ n'est pas inversible.

2.4. Oui : on a

$$(v_2, v_3, v_1) = (v_1, v_2, v_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =: (v_1, v_2, v_3) \cdot P$$

et $\det P = 1$.

2.5. Non : contre-example $n = 3$, $v_1 = v = e_1$, $v_2 = v_3 = e_2$.

3. $\det A = -6$, $\det B = 4$, $\det C = 4$, $\det D = 2$.

a. On remplace $L_2 \mapsto L_2 - 4L_1$, $L_3 \mapsto L_3 + L_1$, $L_4 \mapsto L_4 - L_1$. Le déterminant reste inchangé, et

$$a = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & -1 & -11 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -8 & -1 & -11 \\ 4 & -2 & 3 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} = -140.$$

b. On a $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$. On remplace $C_3 \mapsto C_3 + C_1$ et obtient

$$b = \det \begin{pmatrix} 1 & \cos x & 2\cos^2 x \\ 1 & \cos y & 2\cos^2 y \\ 1 & \cos z & 2\cos^2 z \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & \cos x & \cos^2 x \\ 1 & \cos y & \cos^2 y \\ 1 & \cos z & \cos^2 z \end{pmatrix} = 2(\cos z - \cos x)(\cos x - \cos y)(\cos y - \cos z).$$

c. On remplace $L_3 \mapsto L_3 - L_2$, $L_4 \mapsto L_4 - L_2$. Le déterminant reste inchangé, et

$$\tilde{c} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 0 & c^2 & -c^2 & a^2 - b^2 \\ 0 & b^2 & a^2 - c^2 & -b^2 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c^2 & b^2 \\ c^2 & -c^2 & a^2 - b^2 \\ b^2 & a^2 - c^2 & -b^2 \end{pmatrix} = a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2.$$

4.

4.1. La quantité $||v|| \cdot ||w|| \cdot \sin\theta$ est égale à l'aire du parallélogramme généré par v, w.

4.2. L'hauteur du parallélépipède est donnée par $\frac{u \cdot (v \wedge w)}{||v \wedge w||}$, la projection de u sur la direction $v \wedge w$. Donc le volume est donné par $u \cdot (v \wedge w) = \det(u, v, w)$.

4.3. Le volume est 0 si $\det(u, v, w) = 0$, c'est-à-dire si u, v, w sont linéairement dépendents.

5.

5.1. On a $\operatorname{rk} A = 1$, alors il existent $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T \neq 0$ et $C \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $A = C\lambda^T$. Alors $C_i = \lambda_i C$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

5.2. On choisit $e'_1 = C$ et complémente ce vecteur avec de vecteurs linéairement indépendents $e'_2, \ldots, e'_n$ orthogonaux à C pour construire une base. Soit P la matrice de passage à la base $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$. Alors la première colonne de P est égale à C et les autres colonnes sont orthogonales aux colonnes de A. La

première ligne l_1 de P^{-1} est la solution du système linéaire $P^T l_1 = e_1$. Par construction de P on a $P^T\lambda = (||\lambda||^2, 0, \dots, 0)^T$ et alors $l_1 = \frac{\lambda}{||\lambda||^2}$. On obtient

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} l_1^T \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} C\lambda^T P = \begin{pmatrix} l_1^T C \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ||\lambda||^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^T C \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A' est donc triangulaire inférieure avec les éléments $\lambda^T C, 0, \dots, 0$ sur la diagonale. On obtient

$$\det(I_n + A) = \det(P^{-1}(I_n + A)P) = \det(I_n + A') = 1 + \lambda^T C = 1 + \operatorname{tr} A' = 1 + \operatorname{tr}(PA'P^{-1}) = 1 + \operatorname{tr} A.$$

6.

6.1. En échangeant les n premières colonnes avec les n dernières colonnes de A on obtient

$$\det A = (-1)^n \cdot \det \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & -I_n \end{pmatrix} = (-1)^n \cdot (-1)^n = 1.$$

6.2. Soit A inversible, et $S^T AS = A$. Alors $(\det S)^2 \cdot \det A = \det(S^T AS) = \det A$ et $((\det S)^2 - 1)\det A = 0$. Il suit que $\det S = \pm 1$ et S est inversible. De plus, $S^{-1} = A^{-1}S^T A$, ce qui montre que S^T, S^{-1} sont semblables.