Feuille 9 solutions

1. Valeurs et vecteurs propres.

Une matrice A de taille $n \times n$ est diagonalisable s'il existe une matrice inversible S et une matrice diagonale $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tel que $A = S\Lambda S^{-1}$. Dans ce cas $AS = S\Lambda$, et les colonnes de S sont des vecteurs propres de A avec des valeurs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Alors $\mathbb{R}^n$ possède une base composée de vecteurs propres de A.

D'autre côté, supposons que $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}^n$ sont des vecteurs propres de A avec valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Posons $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $S = (s_1, \ldots, s_n)$, alors $AS = SD$. Si $\{s_1, \ldots, s_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, alors S est inversible, $A = SDS^{-1}$, et A est diagonalisable.

Alors A est diagonalisable si et seulement si A possède n vecteurs propres linéairement indépendents. Une condition suffisante est que toutes valeurs propres sont différentes, car pour chaque valeur propre il existe au moins un vecteur propre, et les vecteurs correspondants à des différentes valeurs sont linéairement indépendants.

1.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 7\lambda - 6$$

On devine $\lambda_1 = 1$. Après division $(\lambda^3 - 7\lambda + 6) : (\lambda - 1) = \lambda^2 + \lambda - 6$ on obtient les deux autres solutions $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 2$.

Le système $(A - I)x = 0$ mène à la solution $x_1 = x_2 = x_3$, alors le vecteur propre est donné par $x = (1, 1, 1)^T$.

Le système $(A + 3I)y = 0$ mène à la solution $y_2 = 7y_1$, $y_3 = 11y_1$, alors le vecteur propre est donné par $y = (1, 7, 11)^T$.

Le système $(A - 2I)z = 0$ mène à la solution $z_2 = 2z_1$, $z_3 = z_1$, alors le vecteur propre est donné par $z = (1, 2, 1)^T$.

La matrice A est diagonalisable.

1.2.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \det(B - \lambda I) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$$

Alors les valeurs propres sont la valeur simple $\lambda_1 = 1$ et la valeur double $\lambda_2 = -2$.

Le système $(B - I)x = 0$ a la solution $x_1 = x_2 = x_3$, alors le vecteur propre est donné par $x = (1, 1, 1)^T$.

Le système $(B + 2I)y = 0$ est équivalent à $y_1 + y_2 + y_3 = 0$, et l'espace propre pour λ_2 a dimension 2, avec solution générale $(-y_2 - y_3, y_2, y_3)^T$ paramétrée par y_2, y_3. Une base de cet espace est donnée p.ex. par $y^1 = (1, -1, 0)^T$ et $y^2 = (0, 1, -1)^T$.

La matrice B est diagonalisable.

1.3.

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det(C - \lambda I) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

Alors les valeurs propres sont la valeur simple $\lambda_1 = 1$ et la valeur double $\lambda_2 = 2$.

Le système $(C - I)x = 0$ a la solution $x_1 = -x_2 = -x_3$, alors le vecteur propre est donné par $x = (-1, 1, 1)^T$.

Le système $(C - 2I)y = 0$ a la solution $y_1 = -y_3$, $y_2 = 0$, alors le vecteur propre est donné par $y = (1, 0, -1)^T$.

Il n'y a que deux vecteurs propres linéairement indépendents, parce que l'espace propre de la valeur propre double n'a que dimension 1. Alors C n'est pas diagonalisable.

1.4.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det(D - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda + 2 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$$

Alors les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + i$, $\lambda_3 = 1 - i$.

Le système $(D - I)x = 0$ a la solution $x_2 = 2x_1$, $x_3 = x_1$, alors le vecteur propre est donné par $x = (1, 2, 1)^T$.

Le système $(D - (1 + i)I)y = 0$ a la solution $y_2 = y_1$, $y_3 = \frac{1-i}{2} y_1$, alors le vecteur propre est donné par $y = (2, 2, 1 - i)^T$.

Conjugaison complèxe donne $(D - (1 - i)I)\bar{y} = 0$, alors le vecteur propre pour λ_3 est donné par $z = \bar{y} = (2, 2, 1 + i)^T$.

La matrice D est diagonalisable.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 20\lambda + 16 = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 4)$$

Alors les valeurs propres sont la valeur double $\lambda_1 = 2$ et la valeur simple $\lambda_2 = 4$.

Le système $(A - 2I)x = 0$ est équivalent à $x_2 = x_1 + x_3$. Alors l'espace propre à λ_1 est 2-dimensionnel et une base est donnée par $x^1 = (1, 1, 0)^T$ et $x^2 = (0, 1, 1)^T$.

Le système $(A - 4I)y = 0$ a la solution $y_1 = y_3$, $y_2 = 0$, alors le vecteur propre est donné par $y = (1, 0, 1)^T$.

Posons

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice P est composée des vecteurs propres et Λ contient les valeurs propres correspondants sur sa diagonale. La matrice A se diagonalise par $A = P\Lambda P^{-1}$.

On obtient $A^n = (P\Lambda P^{-1})^n = P\Lambda^n P^{-1}$. On calcule

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 4^n \\ 2^n & 2^n & 0 \\ 0 & 2^n & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{2n-1} + 2^{n-1} & -2^{2n-1} + 2^{n-1} & 2^{2n-1} - 2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2^{2n-1} - 2^{n-1} & -2^{2n-1} + 2^{n-1} & 2^{2n-1} + 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Posons $q_n = (u_n, v_n, w_n)^T$. Alors $q_0 = (1, 1, 2)^T$ et $q_{n+1} = qx_n$. Il suit que

$$q_n = A^n q_0 = \begin{pmatrix} 2^{2n-1} + 2^{n-1} & -2^{2n-1} + 2^{n-1} & 2^{2n-1} - 2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2^{2n-1} - 2^{n-1} & -2^{2n-1} + 2^{n-1} & 2^{2n-1} + 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^n \\ 2^n \\ 4^n + 2^n \end{pmatrix}$$

3. Si $b = 0$, alors $A = aI$ et $A^n = a^n I$. On suppose alors $b \neq 0$.

On pose $u = (1, 1, 1)^T$ et calcule

$$Au = \begin{pmatrix} a + 2b \\ a + 2b \\ a + 2b \end{pmatrix} = (a + 2b)u$$

Alors u est un vecteur propre de A avec valeur propre $\lambda_1 = a + 2b$.

Soit x un vecteur propre de A avec valeur propre λ, $Ax = \lambda x$. Soit P une matrice de permutation. Alors $P^T AP = A$, et donc $P^T APx = \lambda x$. Multiplication de gauche avec $P^{-T} = P$ mène à $A(Px) =$

$\lambda(Px)$. Alors en permutant les éléments de x d'une manière arbitraire, on obtient un autre vecteur propre de A avec la même valeur propre. Le même est valable pour toute combinaison linéaire de tels vecteurs. Soit $\bar{x} = \frac{1}{6}\sum_P Px$ la moyenne de Px sur toutes les permutations. Ce vecteur est un multiple du vecteur $u = (1,1,1)^T$, $\bar{x} = \alpha u$. On obtient $\alpha Au = \alpha\lambda u$. Si $\alpha \neq 0$, λ doit être la valeur propre correspondante à u. Si $\lambda \neq \lambda_1$, alors $\alpha = 0$ et la somme des éléments du vecteur propre x est zéro. Autrement dit, x est orhtogonal à u.

On observe $A - b \cdot uu^T = (a-b)I$ et alors $A = (a-b)I + b\,uu^T$. Supposons v est un vecteur orthogonal à u. Alors

$$Av = ((a-b)I + b\,uu^T)v = (a-b)v + b \cdot (u^T v) \cdot u = (a-b)v$$

Tout vecteur v orthogonal à u est alors un vecteur propre avec valeur propre $\lambda_2 = a - b$. La valeur λ_2 a alors une multiplicité de $3-1=2$, et le complément orthogonal de u est l'espace propre correspondant.

La matrice A^n a alors les deux valeurs propres $\lambda_1' = \lambda_1^n = (a+2b)^n$ et $\lambda_2' = \lambda_2^n = (a-b)^n$, avec multiplicités 1 et 2. Le vecteur propre de λ_1' est u et l'espace propre de λ_2' est le complément orthogonal de u. Alors A^n a la même structure que A,

$$A^n = \begin{pmatrix} a' & b' & b' \\ b' & a' & b' \\ b' & b' & a' \end{pmatrix}$$

tel que $a' + 2b' = \lambda_1'$ et $a' - b' = \lambda_2'$. La résolution de ce système donne

$$a' = \frac{\lambda_1' + 2\lambda_2'}{3} = \frac{(a+2b)^n + 2(a-b)^n}{3}, \quad b' = \frac{\lambda_1' - \lambda_2'}{3} = \frac{(a+2b)^n - (a-b)^n}{3}$$

4. Supposons $A^p = 0$ et $Ax = \lambda x$ avec $x \neq 0$. Alors $0 = A^p x = \lambda^p x$. Il suit $\lambda^p = 0$ et $\lambda = 0$.

La réciproque est aussi vraie: Si 0 est l'unique valeur propre de A, alors $A^n = 0$, où n est la taille de la matrice.

5. Chaque matrice A est similaire à une matrice triangulaire T, $A = STS^{-1}$ avec S inversible. Alors on a $\det A = \det S \cdot \det T \cdot (\det S)^{-1} = \det T$, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} TS^{-1}S = \operatorname{tr} T$. De plus, A et T ont les mêmes valeurs propres parce que elles sont similaires. Mais pour une matrice triangulaire les valeurs propres se trouvent sur la diagonale, et $\det T = \Pi_j \lambda_j(T)$, $\operatorname{tr} T = \sum_j \lambda_j(T)$. Alors on a aussi $\det A = \Pi_j \lambda_j(A)$, $\operatorname{tr} A = \sum_j \lambda_j(A)$.

6. Si $\lambda = 0$ est une valeur propre de AB, on a $\det(AB) = \det A \cdot \det B = 0$. Alors aussi $\det(BA) = 0$, et 0 est une valeur propre de BA.

Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de AB. Alors il existe un vecteur $x \neq 0$ tel que $ABx = \lambda x \neq 0$. Posons $y = Bx$, on a $y \neq 0$ sinon $ABx = Ay = 0$. Donc $BAy = BABx = \lambda Bx = \lambda y$, et λ est une valeur propre de BA.

7.

7.1. On a $x^{(0)} = (1,1)^T$ et

$$x^{(k)} = \begin{pmatrix} f_k + f_{k-1} \\ f_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k-1} \end{pmatrix} = Ax^{(k-1)}$$

Alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

7.2. On a $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda - 1$ avec les racines $\lambda_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Les vecteurs propres sont égaux à $v_{1/2} = (\lambda_{1/2}, 1)^T$. Alors

$$A = VDV^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \\ 0 & \lambda_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

La matrice est donc diagonalisable.

7.3. Pour $k \geq 1$ on a

$$A^k = VD^kV^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{pmatrix} \lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1} & -\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^k - \lambda_2^k) \\ \lambda_1^k - \lambda_2^k & \lambda_1\lambda_2^k - \lambda_1^k\lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$x^{(k)} = A^k x^{(0)} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{pmatrix} \lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1} - \lambda_1\lambda_2(\lambda_1^k - \lambda_2^k) \\ \lambda_1^k - \lambda_2^k + \lambda_1\lambda_2^k - \lambda_1^k\lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{pmatrix} \lambda_1^{k+2} - \lambda_2^{k+2} \\ \lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1} \end{pmatrix}$$

où on a utilisé $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Alors $f_k = \frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{k+1}}{\sqrt{5}}$.

8. On note qu'après échange des colonnes 2 et 3 et échange des lignes 2 et 3 la matrice A devient bloc-diagonale. Les matrices dans les blocs diagonaux est $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $\det(B - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$. Les valeurs propres de B sont alors $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$.

Le système $(B + I)u = 0$ a la solution $u_1 = -2u_2$ et donc le vecteur propre $u = (-2, 1)^T$.

Le système $(B - 3I)v = 0$ a la solution $v_1 = 2v_2$ et donc le vecteur propre $v = (2, 1)^T$.

Les valeurs propres de A sont donc λ_1 avec les vecteurs propres $u^1 = (-2, 0, 1, 0)^T$ et $u^2 = (0, -2, 0, 1)^T$ et λ_2 avec les vecteurs propres $v^1 = (2, 0, 1, 0)^T$ et $v^2 = (0, 2, 0, 1)^T$. On a donc la représentation $A = SDS^{-1}$ avec

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On note $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et alors

$$S^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La solution générale du système

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \\ \dot{w}(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$$

est une combinaison linéaire des colonnes de la matrice

$$e^{tA} = Se^{tD}S^{-1} = S\,\mathrm{diag}(e^{-t}, e^{-t}, e^{3t}, e^{3t})S^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2e^{-t} & 0 & 2e^{3t} & 0 \\ 0 & -2e^{-t} & 0 & 2e^{3t} \\ e^{-t} & 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{e^{-t}+e^{3t}}{2} & 0 & e^{3t} - e^{-t} & 0 \\ 0 & \frac{e^{-t}+e^{3t}}{2} & 0 & e^{3t} - e^{-t} \\ \frac{e^{3t}-e^{-t}}{4} & 0 & \frac{e^{-t}+e^{3t}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{e^{3t}-e^{-t}}{4} & 0 & \frac{e^{-t}+e^{3t}}{2} \end{pmatrix}$$

La solution particulière avec valeur initiale $(x(0), y(0), z(0), w(0))^T = (0, 0, 0, 2)^T$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{-t}+e^{3t}}{2} & 0 & e^{3t}-e^{-t} & 0 \\ 0 & \frac{e^{-t}+e^{3t}}{2} & 0 & e^{3t}-e^{-t} \\ \frac{e^{3t}-e^{-t}}{4} & 0 & \frac{e^{-t}+e^{3t}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{e^{3t}-e^{-t}}{4} & 0 & \frac{e^{-t}+e^{3t}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^{3t}-2e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t}+e^{3t} \end{pmatrix}$$

9. On a $\det(A - \lambda I) = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 13\lambda^2 - 12\lambda + 4 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2$. La matrice A a donc les valeurs doubles $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

Le système $(A - I)x = 0$ a la solution $-x_1 = x_2 = x_3$, $x_4 = 0$ si $a \neq 0$ et $x_2 = x_3 = -x_1 - x_4$ si $a = 0$. On a donc le vecteur propre $(-1, 1, 1, 0)^T$ si $a \neq 0$ et un deuxième vecteur $(1, 0, 0, -1)^T$ si $a = 0$.

Le système $(A - 2I)y = 0$ a la solution $x_1 = -x_3$, $x_2 = x_4 = 0$ si $a \neq 0$ et $x_1 = -x_3$, $x_2 = 0$ si $a = 0$. On a donc le vecteur propre $(-1, 0, 1, 0)^T$ si $a \neq 0$ et un deuxième vecteur $(0, 0, 0, 1)^T$ si $a = 0$.

Alors A est diagonalisable pour $a = 0$ et trigonalisable pour tout a.

Pour $a = 0$ on a $A = SDS^{-1}$ avec

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La solution générale du système

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \\ \dot{w}(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$$

est une combinaison linéaire des colonnes de la matrice

$$e^{tA} = Se^{tD}S^{-1} = S\,\mathrm{diag}(e^t, e^t, e^{2t}, e^{2t})S^{-1} = \begin{pmatrix} -e^t & e^t & -e^{2t} & 0 \\ e^t & 0 & 0 & 0 \\ e^t & 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & -e^t & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & e^{2t}-e^t & e^t-e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t-e^{2t} & e^{2t} & 0 \\ e^{2t}-e^t & 0 & e^{2t}-e^t & e^{2t} \end{pmatrix}$$

La solution particulière avec valeur initiale $(x(0), y(0), z(0), w(0))^T = (0, 0, 1, 0)^T$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t}-e^t & e^t-e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t-e^{2t} & e^{2t} & 0 \\ e^{2t}-e^t & 0 & e^{2t}-e^t & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t-e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \\ e^{2t}-e^t \end{pmatrix}$$

10.

10.1.

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix} = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

10.2. On a $\det(M - \lambda I) = (-2\frac{k}{m} - \lambda)^2 - \frac{k^2}{m^2}$. Les valeurs propres de M sont alors $\lambda_1 = -\frac{k}{m}$, $\lambda_2 = -\frac{3k}{m}$.

Le système $(M + \frac{k}{m}I)x = 0$ a la solution $x_1 = x_2$, et alors le vecteur propre est $(1,1)^T$. Le système $(M + \frac{3k}{m}I)x = 0$ a la solution $x_1 = -x_2$, et alors le vecteur propre est $(1,-1)^T$. La matrice M s'écrit alors

$$M = SDS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{k}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{3k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Posons $y = S^{-1}x$. Alors le système devient $y'' = Dy$, ou $y_i'' = -\omega_i^2 y_i$, $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$. Il a pour solution générale

$$y_i(t) = c_{1i}\cos\omega_i t + c_{2i}\sin\omega_i t = r_i \sin\omega_i(t - t_{0i}).$$

Alors $x = Sy$ est donné par

$$x = \begin{pmatrix} r_1 \sin\omega_1(t - t_{01}) + r_2 \sin\omega_2(t - t_{02}) \\ r_1 \sin\omega_1(t - t_{01}) - r_2 \sin\omega_2(t - t_{02}) \end{pmatrix}.$$

10.3. La mode correspondante à la valeur $\lambda_1 = -\frac{k}{m}$ est une oscillation où les masses se déplacent d'une manière parallèle, $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$. La mode correspondante à la valeur $\lambda_2 = -\frac{3k}{m}$ est une oscillation où les masses se déplacent d'une manière anti-parallèle, $x_1 = -x_2$ et $y_1 = -y_2$.

10.1'. Le système devient

$$mx_1'' = -2kx_1 + kx_2, \quad mx_2'' = kx_1 - 2kx_2 + kx_3, \quad mx_3'' = kx_2 - 2kx_3$$

10.2'. On a alors

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

10.3'. On a $\det(\frac{m}{k}M - \lambda I) = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 10\lambda - 4 = -(\lambda+2)(\lambda^2 + 4\lambda + 2)$. Alors les valeurs propres sont $\lambda_1 = -\frac{2k}{m}$, $\lambda_{2/3} = \frac{k}{m}\left(-2 \pm \sqrt{2}\right)$. Après calcul des vecteurs propres on a

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{k}{m}(-2-\sqrt{2}) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2k}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{m}(-2+\sqrt{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

10.4'. Le vecteur propre pour la valeur $-\frac{2k}{m}$ est égal à $(-1,0,1)^T$. Alors dans ce mode la masse 2 reste sur place et les deux autres masses se déplacent d'une manière anti-parallèle, $x_1 = -x_3$, $x_1' = -x_3'$.

11. On vérifie directement $AA^T = I$ pour les trois matrices. Les valeurs propres sont $\{-1, i, -i\}$ pour (a), $\{\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}\}$ pour (b), et $\{-1,1,1\}$ pour (c).

12. La symétrie est évidente. On a

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 36 \\ 36 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -25 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

13.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = I \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot I$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}^T$$

14. On note $\bar{\Sigma} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_p)$. Alors $\bar{U}$ est de taille $m \times p$, $\bar{\Sigma}$ de taille $p \times p$, et $\bar{V}$ de taille $n \times p$. On a alors $A^+ = \bar{V}\bar{\Sigma}^{-1}\bar{U}^T$. On note que $\bar{U}^T\bar{U} = I$, $\bar{V}^T\bar{V} = I$.

14.1. A^+ est de taille $n \times m$. On a $AA^+ = \bar{U}\bar{\Sigma}\bar{V}^T\bar{V}\bar{\Sigma}^{-1}\bar{U}^T = \bar{U}\bar{U}^T$ et $A^+A = \bar{V}\bar{\Sigma}^{-1}\bar{U}^T\bar{U}\bar{\Sigma}\bar{V}^T = \bar{V}\bar{V}^T$. On a alors

$$\begin{aligned} AA^+A &= \bar{U}\bar{\Sigma}\bar{V}^T\bar{V}\bar{V}^T = \bar{U}\bar{\Sigma}\bar{V}^T = A \\ A^+AA^T &= \bar{V}\bar{V}^T\bar{V}\bar{\Sigma}\bar{U}^T = \bar{V}\bar{\Sigma}\bar{U}^T = A^T \\ A^TAA^+ &= \bar{V}\bar{\Sigma}\bar{U}^T\bar{U}\bar{U}^T = \bar{V}\bar{\Sigma}\bar{U}^T = A^T \end{aligned}$$

Cela signifie que la restriction de AA^+ à l'image de A vaut l'identité, et la restriction de A^+A sur l'image de A^T vaut aussi l'identité. En fait, AA^+ et A^+A sont les projections orthogonales sur les images correspondantes.

14.2. Si le système $Ax = b$ est soluble alors b est dans l'image de A. Il suit que $AA^+b = b$. On a alors $Ax = AA^+b = b$ et $x = A^+b$ est une solution du système. Mais la solution est unique, parce que le rang de A est égal au nombre de colonnes et le noyau de A est $\{0\}$.