Feuille 5 solutions

1. Pour I_1, I_2 intervalles, on a

$$\iint_{I_1\times I_2} f(x)g(y)\,dx\,dy = \int_{I_1} f(x)\,dx \cdot \int_{I_2} g(y)\,dy.$$

Une formule similaire est applicable pour les intégrales multiples de dimension ≥ 3 avec un domaine d'intégration rectangulaire. Donc

$$I_1 = \iint_{[0,3]\times[0,2]} (4-y^2)\,dx\,dy = \int_{[0,3]} dx \cdot \int_{[0,2]} (4-y^2)\,dy = 3\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = 3\cdot\frac{16}{3} = 16,$$

$$I_2 = \iint_{[0,3]\times[-2,0]} (x^2y - 2xy)\,dx\,dy = \int_{[0,3]} (x^2-2x)\,dx \cdot \int_{[-2,0]} y\,dy = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^3 \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-2}^0 = 0,$$

$$I_3 = \iint_{[\pi,2\pi]\times[0,\pi]} (\sin x + \cos y)\,dx\,dy = \pi\int_{[\pi,2\pi]} \sin x\,dx + \pi\int_{[0,\pi]} \cos y\,dy = -\pi[\cos x]_\pi^{2\pi} + \pi[\sin y]_0^\pi = -2\pi.$$

On a

$$\sin(x+y+z) = \cos x\cos y\sin z + \cos x\cos z\sin y + \cos y\cos z\sin x - \sin x\sin y\sin z$$

et alors

$$\begin{aligned} I_7 = \iiint_{[0,\frac{\pi}{2}]^3} \sin(x+y+z)\,dx\,dy\,dz &= \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx \cdot \int_0^{\pi/2}\cos y\,dy \cdot \int_0^{\pi/2}\sin z\,dz + \\ \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx \cdot \int_0^{\pi/2}\sin y\,dy \cdot \int_0^{\pi/2}\cos z\,dz &+ \int_0^{\pi/2}\sin x\,dx \cdot \int_0^{\pi/2}\cos y\,dy \cdot \int_0^{\pi/2}\cos z\,dz \\ - \int_0^{\pi/2}\sin x\,dx \cdot \int_0^{\pi/2}\sin y\,dy \cdot \int_0^{\pi/2}\sin z\,dz. \end{aligned}$$

Mais $\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx = 1$. Alors chaque facteur de chaque produit est égal à 1, et $I_7 = 1+1+1-1 = 2$.

Les autres intégrales multiples n'ont pas de domaine rectangulaire, on les calcule itérativement.

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^\pi\int_0^x x\sin y\,dy\,dx = \int_0^\pi x\,[-\cos y]_0^x\,dx = \int_0^\pi x(1-\cos x)\,dx = -\int_0^\pi (x-\sin x)\,dx + [x(x-\sin x)]_0^\pi \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} - \cos x + x^2 - x\sin x\right]_0^\pi = \left[\frac{x^2}{2} - \cos x - x\sin x\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} + 2, \end{aligned}$$

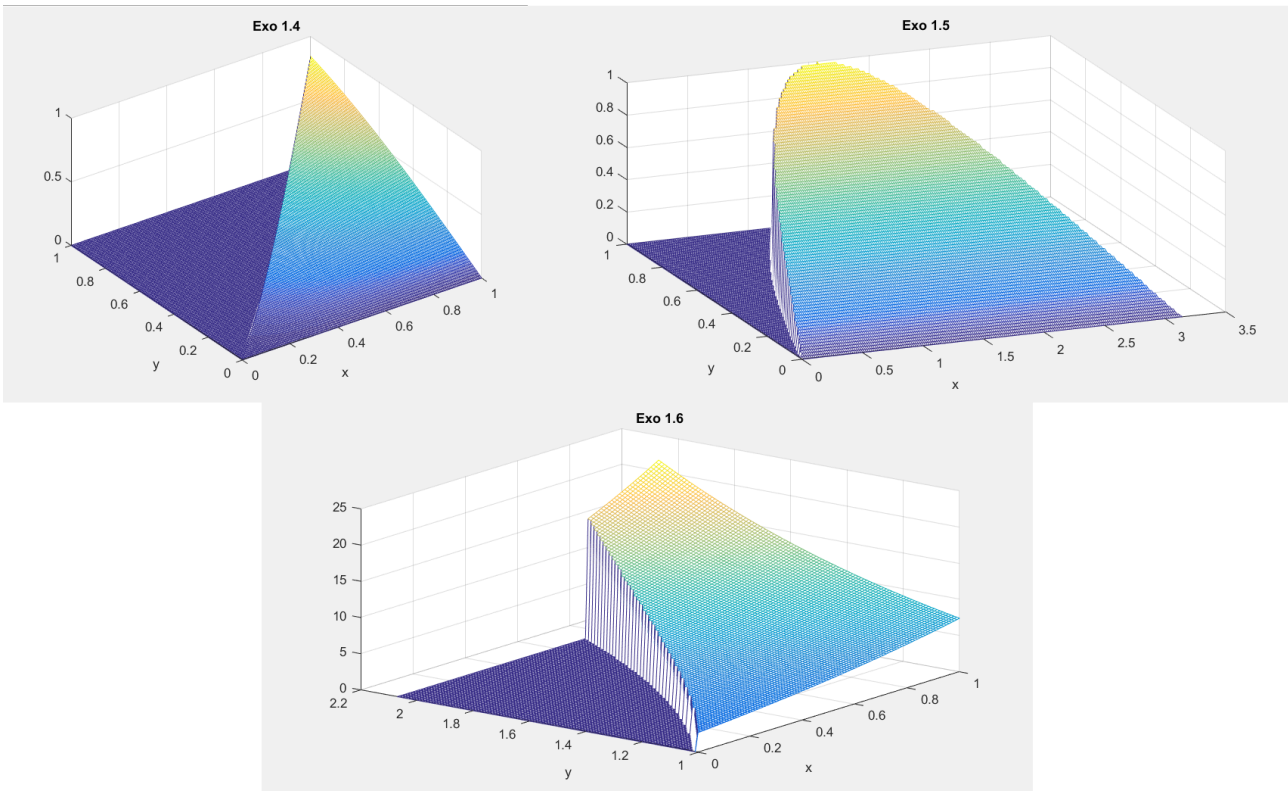
$$I_5 = \int_0^\pi\int_0^{\sin x} y\,dy\,dx = \int_0^\pi \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sin x} dx = \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{2}dx = \left[\frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{8}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{4},$$

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_1^{\ln 8}\int_1^{\ln y} e^{x+y}\,dx\,dy = \int_1^{\ln 8} e^y[e^x]_1^{\ln y}\,dy = \int_1^{\ln 8}(ye^y - e^{y+1})\,dy = \left[e^y(y-1) - e^{y+1}\right]_1^{\ln 8} \\ &= 8(\ln 8 - 1) - 8e + e^2. \end{aligned}$$

2. Nous déterminons d'abord le positionnement de la surface et calculons après l'intégrale multiple correspondant.

2.1. Les courbes s'intersectent dans les points données par les deux équations $xy = 1$ et $x + y = \frac{5}{2}a$. Cela mène à l'équation quadratique $x(\frac{5}{2}a - x) - 1 = 0$ qui les racines

$$x_{\min} = \frac{5}{4}a - \sqrt{\frac{25}{16}a^2 - 1}, \qquad x_{\max} = \frac{5}{4}a + \sqrt{\frac{25}{16}a^2 - 1}.$$



On observe que les racines sont réelles seulement si $|a| \geq \frac{4}{5}$, dans le cas contraire les courbes ne s'intersectent pas. Pour $c \in [x_{\min}, x_{\max}]$ la surface intersecte la droite $x = c$ dans l'intervalle $[c^{-1}, \frac{5}{2}a - c]$. L'aire est alors donnée par

$$I_1 = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (\frac{5}{2}a - x - x^{-1})\, dx = \left[\frac{5}{2}ax - \frac{x^2}{2} - \ln x\right]_{x_{\min}}^{x_{\max}} = \frac{5}{2}ax_{\max} - \frac{x_{\max}^2}{2} - \ln x_{\max} - \frac{5}{2}ax_{\min} + \frac{x_{\min}^2}{2} + \ln x_{\min}$$

$$= \frac{5}{2}a\sqrt{\frac{25}{4}a^2 - 4} - \frac{\frac{5}{2}a\sqrt{\frac{25}{4}a^2 - 4}}{2} + \ln\frac{x_{\min}}{x_{\max}} = \frac{5}{4}a\sqrt{\frac{25}{4}a^2 - 4} + 2\ln\left(\frac{5}{4}a - \sqrt{\frac{25}{16}a^2 - 1}\right).$$

Ici nous avons utilisé $x_{\min} + x_{\max} = \frac{5}{2}a$, $x_{\max} - x_{\min} = \sqrt{\frac{25}{4}a^2 - 4}$, $x_{\min}x_{\max} = 1$.

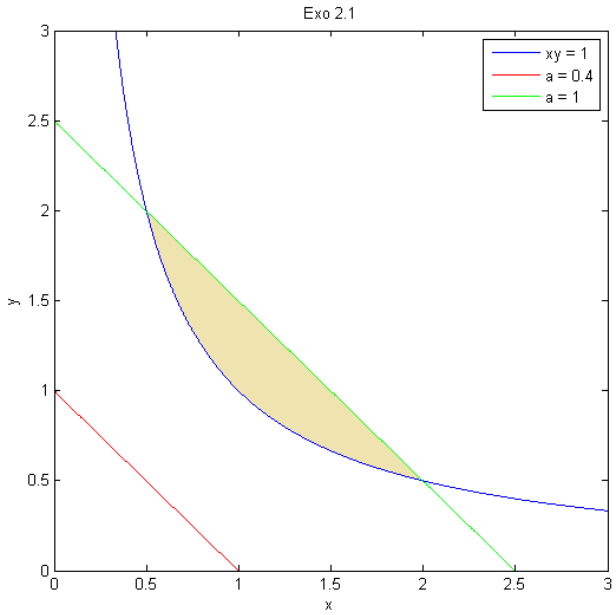
2.2. Soit D la surface en coordonnées cartésiennes et D' son image en coordonnées polaires. Alors l'aire de la surface est égale à

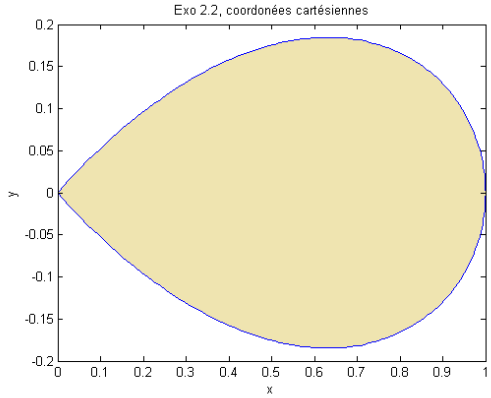
$$\iint_D dx\, dy = \iint_{D'} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| dr\, d\theta = \iint_{D'} \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} dr\, d\theta = \int_{-\pi/6}^{\pi/6}\int_0^{a\cos 3\theta} r\, dr\, d\theta$$

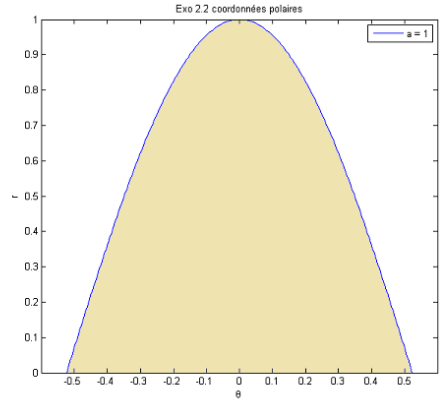
$$= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{a\cos 3\theta} d\theta = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{a^2\cos^2 3\theta}{2}\, d\theta = \frac{a^2}{4}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}(1 + \cos 6\theta)\, d\theta = \frac{a^2}{4}\left[\theta + \frac{1}{6}\sin 6\theta\right]_{-\pi/6}^{\pi/6}$$

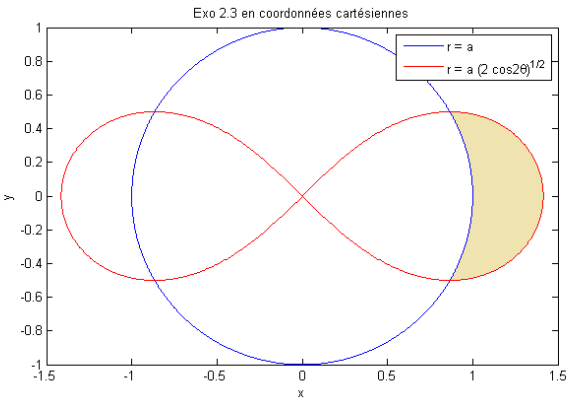
$$= \frac{a^2}{4}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{\pi a^2}{12}.$$

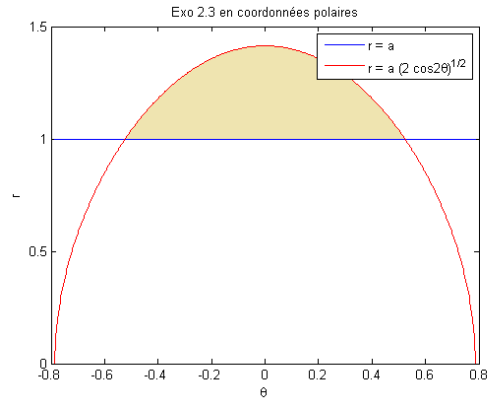
2.3. En passant aux coordonnées polaires les relations deviennent $r^4 = 2a^2r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$, $r^2 \geq a^2$, ce qui est équivalent à $r = a\sqrt{2\cos 2\theta}$ et $r \geq a$. Les courbes $r = a\sqrt{2\cos 2\theta}$ et $r = a$ s'intersectent dans les points $\theta = \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2} = \pm\frac{\pi}{6}$. L'aire de la surface entre les courbes est donc égale


Exo 2.1
xy = 1
a = 0.4
a = 1
x
y


Exo 2.2, coordonées cartésiennes
x
y


Exo 2.2 coordonnées polaires
a = 1
θ
r





à

$$\iint_D dx\,dy = \iint_{D'} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| dr\,d\theta = \int_{-\pi/6}^{\pi/6}\int_a^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/6}^{\pi/6}\left[\frac{r^2}{2}\right]_a^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} d\theta$$
$$= \int_{-\pi/6}^{\pi/6}\left(a^2\cos 2\theta - \frac{a^2}{2}\right) d\theta = \frac{a^2}{2}[\sin 2\theta - \theta]_{-\pi/6}^{\pi/6} = a^2\left(\sin\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right).$$

3. Pour calculer le volume d'un corps $D \subset \mathbb{R}^3$ il faut déterminer les nombres

$$z_{\min} = \min_{(x,y,z)\in D} z, \qquad z_{\max} = \max_{(x,y,z)\in D} z,$$

après pour $c \in [z_{\min}, z_{\max}]$ les fonctions d'une variable

$$y_{\min}(c) = \min_{(x,y,c)\in D} y, \qquad y_{\max}(c) = \max_{(x,y,c)\in D} y,$$

enfin pour $c \in [z_{\min}, z_{\max}]$, $c' \in [y_{\min}(c), y_{\max}(c)]$ les fonctions de deux variables

$$x_{\min}(c', c) = \min_{(x,c',c)\in D} x, \qquad x_{\max}(c', c) = \max_{(x,c',c)\in D} x.$$

Le volume est alors donné par le triple intégrale

$$\int_{z_{\min}}^{z_{\max}}\int_{y_{\min}(z)}^{y_{\max}(z)}\int_{x_{\min}(y,z)}^{x_{\max}(y,z)} dx\,dy\,dz.$$

On intègre alors sur $c \in [z_{\min}, z_{\max}]$ l'aire de l'intersection de D avec le plan $\{z = c\}$. De la même façon, l'aire de cette surface est l'intégrale sur $c' \in [y_{\min}(c), y_{\max}(c)]$ de la longueur de l'intersection de cette surface avec la ligne droite $\{y = c', z = c\}$.

On peut aussi choisir un autre ordre des variables.

3.1. Nous avons $z_{\min} = 0$, $z_{\max} = 1$. Pour $c \in [0, 1]$, l'intersection de D_1 avec le plan $\{z = c\}$ est un disque centré sur $(0, 0, c)$ et de rayon $r = \sqrt{1-c}$. L'aire de ce disque est $\pi r^2 = \pi(1-c)$. Alors

$$Vol(D_1) = \int_0^1 \pi(1-z)\,dz = \pi\left[z - \frac{z^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

3.2. De la même façon, $z_{\min} = -1$, $z_{\max} = 1$. Pour $c \in [-1, 1]$, l'intersection de D_2 avec le plan $\{z = c\}$ est un disque centré sur $(0, 0, c)$ et de rayon $r = \sqrt{1-c^2}$. L'aire de ce disque est $\pi r^2 = \pi(1-c^2)$. Alors

$$Vol(D_2) = \int_{-1}^1 \pi(1-z^2)\,dz = \pi\left[z - \frac{z^3}{3}\right]_{-1}^1 = \pi\left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi.$$

3.3. Le pair (x, y) parcourt le triangle $\{x \geq 0,\ y \geq x,\ x + y \leq 2\}$, et $0 \leq z \leq x^2 + y^2$. Alors

$$Vol(D_3) = \int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 + y^2)\, dy\, dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_x^{2-x} dx = \int_0^1 \left(2x^2 - x^3 + \frac{(2-x)^3}{3} - \frac{4x^3}{3}\right) dx$$
$$= \int_0^1 \frac{8 - 12x + 12x^2 - 8x^3}{3}\, dx = \frac{4}{3}\left[2x - \frac{3}{2}x^2 + x^3 - \frac{x^4}{2}\right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

4. Calculer les intégrales doubles.

4.1. Le domaine D est le disque unitaire, qui est symétrique par rapport à la transformation $(x, y) \mapsto (x, -y)$. Par contre, la foncion à intégrer change le signe sous cette transformation. Alors $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = -\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$, et la valeur de l'intégrale est égale à 0.

4.2.

$$\iint_D xy\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy\, dy\, dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{2}\, dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{24}.$$

4.3. On a $x^2 \leq x$ sur D et alors $x \in [0, 1]$. Alors

$$\iint_D x^2\, dx = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} x^2\, dy\, dx = \int_0^1 (x^3 - x^4)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{20}.$$

4.4. Avec $X = x + y$, $Y = x - y$ on a $|\frac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)}| = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$ et $|\frac{\partial(x,y)}{\partial(X,Y)}| = \frac{1}{2}$. Dans les nouvelles coordonnées nous avons $x^2 + y^2 = \frac{X^2+Y^2}{2}$, et le domaine devient $D' = \{(X, Y) \,|\, X \geq 1,\ Y \geq 0,\ X^2 + Y^2 \leq 2\}$. On a aussi $x^2 - y^2 = XY$, $xy = \frac{X^2-Y^2}{4}$, et la fonction à intégrer devient $XYe^{(X^2-Y^2)/4}$. On obtient

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \frac{1}{2}\iint_{D'} XYe^{(X^2-Y^2)/4}\, dX\, dY = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-X^2}} XYe^{(X^2-Y^2)/4}\, dY\, dX$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} Xe^{X^2/4}\left[-2e^{-Y^2/4}\right]_0^{\sqrt{2-X^2}} dX = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} Xe^{X^2/4}\left(-2e^{-(2-X^2)/4} + 2\right) dX$$
$$= \int_1^{\sqrt{2}} \left(-Xe^{(X^2-1)/2} + Xe^{X^2/4}\right) dX = \left[2e^{X^2/4} - e^{(X^2-1)/2}\right]_1^{\sqrt{2}}$$
$$= \left(e^{1/2} - 2e^{1/4} + 1\right) = (e^{1/4} - 1)^2.$$

4.5. On passe aux coordonnées polaires. Le domaine D devient $D' = \{(r, \theta) \,|\, r \leq \sqrt{\pi},\ \theta \in [0, \pi/4]\}$. La fonction f devient $r \cos\theta \cos r$. Le Jacobien du changement des coordonnées est donné par $|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}| = r$. On obtient

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D'} r^2 \cos\theta \cos r\, dr\, d\theta = \int_0^{\sqrt{\pi}} r^2 \cos r\, dr \cdot \int_0^{\pi/4} \cos\theta\, d\theta$$
$$= [r^2 \sin r - 2\sin r + 2r\cos r]_0^{\sqrt{\pi}} \cdot [\sin\theta]_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\pi \sin\sqrt{\pi} - 2\sin\sqrt{\pi} + 2\sqrt{\pi}\cos\sqrt{\pi}).$$

L'intégrale de $r^2 \cos r$ peut être obtenu par intégration partielle.

5. Le barycentre C d'une surface D est donné par $\frac{\iint_D (x,y)\, dx\, dy}{\iint_D dx\, dy}$. Si la surface possède une densité ρ, la formule devient $\frac{\iint_D (x,y)\rho(x,y)\, dx\, dy}{\iint_D \rho(x,y)\, dx\, dy}$.

5.1.

$$C = \frac{\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}(x,y)\,dy\,dx}{\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\,dy\,dx} = \frac{\int_{-1}^{1}\left[(xy,\frac{y^2}{2})\right]_{x^2}^{1}\,dx}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx} = \frac{\int_{-1}^{1}(x-x^3,\frac{1-x^4}{2})\,dx}{\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}} = \frac{\left[(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4},\frac{5x-x^5}{10})\right]_{-1}^{1}}{\frac{4}{3}}$$
$$= \frac{3}{4}(0,\frac{4}{5}) = (0,\frac{3}{5}).$$

5.2. Ici le domaine est donné par $D = \{(x,y)\,|\,0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$. Son image en coordonnées polaires est $D' = \{(r,\theta)\,|\,r \le 1,\ \theta \in [0,\pi]\}$. Son barycentre est alors donné par

$$C = \frac{\iint_D (x,y)\,dx\,dy}{\iint_D\,dx\,dy} = \frac{\iint_{D'} r(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr\,d\theta}{\iint_{D'} r\,dr\,d\theta} = \frac{\int_0^1 r^2\,dr\cdot\int_0^\pi(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta}{\int_0^1 r\,dr\cdot\int_0^\pi\,d\theta} = \frac{\frac{1}{3}(0,2)}{\frac{\pi}{2}} = (0,\frac{4}{3\pi}).$$

5.3. Le disque est symétrique par rapport à la transformation $(x,y)\mapsto(x,-y)$. Alors son barycentre est de la forme $(c,0)$. On a

$$c = \frac{\int_0^2\int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} x\cdot x|y|\,dy\,dx}{\int_0^2\int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} x|y|\,dy\,dx} = \frac{2\int_0^2\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} x^2y\,dy\,dx}{2\int_0^2\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} xy\,dy\,dx} = \frac{\int_0^2\left[x^2\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx}{\int_0^2\left[x\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx}$$
$$= \frac{\int_0^2 x^2\frac{1-(x-1)^2}{2}\,dx}{\int_0^2 x\frac{1-(x-1)^2}{2}\,dx} = \frac{\int_0^2 x^3(2-x)\,dx}{\int_0^2 x^2(2-x)\,dx} = \frac{8/5}{4/3} = \frac{6}{5}.$$

Ici nous avons utilisé que $\int_{-a}^{a} f(y)\,dy = 2\int_0^a f(y)\,dy$ pour $f(y)$ une fonction paire, en particulier $f(y) = |y|$.

6. La longueur d'une courbe σ donnée sous forme paramétrisée $(x(t),y(t),z(t))$, $t\in[a,b]$, est calculée par

$$l(\sigma) = \int_a^b ||\frac{d\sigma}{dt}||\,dt = \int_a^b \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2+(\frac{dz}{dt})^2}\,dt.$$

6.1. L'intervalle d'intégration est $t\in[0,1]$. Alors

$$l = \int_0^1 \sqrt{3^2+(6t)^2+(6t^2)^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{(3+6t^2)^2}\,dt = [3t+2t^3]_0^1 = 5.$$

Par comparaison, la longueur du segment entre les extrémités de la courbe est égale à $\sqrt{22}$.

6.2.

$$l = \int_0^1 \sqrt{(-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t)^2 + (-e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t)^2 + (-e^{-t})^2}\,dt$$
$$= \int_0^1 e^{-t}\sqrt{(\cos t+\sin t)^2+(-\sin t+\cos t)^2+1}\,dt = \sqrt{3}[-e^{-t}]_0^1 = \sqrt{3}(1-e^{-1}).$$

6.3. Pour obtenir une paramétrisation de la courbe, on passe de x,y aux coordonnées polaires r,θ. Les équations deviennent $r^2 = z$, $\tan\theta = \tan z$. Il suit que $r = \sqrt{z}$, $\theta = z$. Alors on peut utiliser z comme paramètre, et $x = \sqrt{z}\cos z$, $y = \sqrt{z}\sin z$. L'intervalle d'intégration est $[0,\frac{\pi}{6}]$. La longueur de la courbe est donc donnée par

$$l = \int_0^{\pi/6} \sqrt{(\frac{\cos z}{2\sqrt{z}} - \sqrt{z}\sin z)^2 + (\frac{\sin z}{2\sqrt{z}} + \sqrt{z}\cos z)^2 + 1}\,dz$$
$$= \int_0^{\pi/6} z^{-1/2}\sqrt{(\frac{\cos z}{2} - z\sin z)^2 + (\frac{\sin z}{2} + z\cos z)^2 + z}\,dz = \int_0^{\pi/6} z^{-1/2}\sqrt{\frac{1}{4}+z^2+z}\,dz$$
$$= \int_0^{\pi/6} (\sqrt{z}+\frac{1}{2\sqrt{z}})\,dz = [\frac{2}{3}z^{3/2}+z^{1/2}]_0^{\pi/6} = \frac{2}{3}(\frac{\pi}{6})^{3/2}+(\frac{\pi}{6})^{1/2}.$$

7. Un point mobile se déplace le long d'une courbe $\sigma = (x(t), y(t), z(t))$ paramétrée par $t \in [a, b]$. Le travail de force $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ est alors donné par

$$W = \int_a^b \langle \frac{d\sigma}{dt}, \vec{F}\rangle \, dt = \int_a^b (\frac{dx}{dt}F_x + \frac{dy}{dt}F_y + \frac{dz}{dt}F_z) \, dt.$$

Alors on obtient

$$W = \int_0^{2\pi} (-a\sin t \cdot a\cos t + a\cos t \cdot a\sin t + b \cdot bt) \, dt = b^2 \int_0^{2\pi} t \, dt = b^2 \frac{(2\pi)^2}{2} = 2b^2\pi^2.$$

Le cas spécial $\vec{F} = -\nabla\phi$, c'est-à-dire si la force est moins le gradient d'un potentiel ϕ, est plus simple. On obtient

$$W = -\int_a^b \langle \frac{d\sigma}{dt}, \nabla\phi\rangle \, dt = -\int_a^b \frac{d\phi(\sigma(t))}{dt} \, dt = -[\phi(\sigma(t))]_a^b = \phi(\sigma(a)) - \phi(\sigma(b)).$$

Le travail ne dépend donc pas de la courbe même, il dépend seulement de ses extrémités.

Dans notre cas on peut mettre $\phi = -\frac{x^2+y^2+z^2}{2}$. Sur la courbe on a $\phi(\sigma(t)) = -\frac{a^2+b^2t^2}{2}$. On obtient donc

$$W = \phi(\sigma(0)) - \phi(\sigma(2\pi)) = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2 + b^2(2\pi)^2}{2} = 2b^2\pi^2.$$

8. *8.1.* On note $l(t)$ pour la longueur de la courbe $\sigma = (x, y, z)$ entre $\sigma(0)$ et $\sigma(t)$.

$$\begin{aligned} l(t) &= \int_0^t \sqrt{(\frac{dx}{ds})^2 + (\frac{dy}{ds})^2 + (\frac{dz}{ds})^2} \, ds = \int_0^t \sqrt{(e^t\cos t - e^t\sin t)^2 + (e^t\sin t + e^t\cos t)^2 + (e^t)^2} \, dt \\ &= \int_0^t \sqrt{3}e^t \, dt = \sqrt{3}(e^t - 1). \end{aligned}$$

La longueur entre $\sigma(0)$ et $\sigma(1)$ est donc égale à $l(1) = \sqrt{3}(e-1)$. L'équation $l(t) = 4\sqrt{3}$ nous donne $t = \ln 5$.

8.2. La force s'exprime comme $\vec{F} = -\nabla\phi$ pour $\phi = -\frac{z^2}{2}$. Sur la courbe on a $\phi(\sigma(t)) = -\frac{e^{2t}}{2}$. Alors

$$W = \phi(\sigma(0)) - \phi(\sigma(1)) = -\frac{1}{2} + \frac{e^2}{2}.$$

9. *9.1.* On a $r\vec{u}_r = (x, y)$. La force $\vec{F}$ s'exprime alors comme $-\nabla\phi$ pour $\phi = \frac{k(x^2+y^2)}{2}$. On a alors

$$W = \phi(M_1) - \phi(M_2) = \frac{ka^2}{2} - \frac{kb^2}{2}.$$

9.2. Le champ de vecteurs $\vec{F}$ s'écrit comme $-\nabla\phi$ avec $\phi = \frac{k}{r}$. Ici ϕ est le potentiel gravitationnel, avec $k < 0$. Le travail entre M_1 et M_2 est donné par $\phi(M_1) - \phi(M_2) = k(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$.

10. Soit $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée, $t \in [a, b]$, et $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j}$ un champ de vecteurs. Alors par définition

$$\int_\Gamma u_x \, dx + u_y \, dy = \int_a^b (u_x\frac{dx}{dt} + u_y\frac{dy}{dt}) \, dt = \int_a^b \langle \vec{u}, \frac{d\Gamma}{dt}\rangle \, dt.$$

On observe que l'intégrale est du même type que dans les exercices précédents.

10.1. On paramètre la courbe par la variable x. Alors

$$I_1 = \int_0^1 (-\sqrt{x}\ln(x+1) + \sqrt{x}\frac{dy}{dx})\,dx = \int_0^1 \sqrt{x}(-\ln(x+1) + \ln(x+1) + \frac{x-1}{x+1})\,dx = \int_0^1 2z^2\frac{z^2-1}{z^2+1}\,dz$$
$$= 2\int_0^1 \left(z^2 - 2 + \frac{2}{z^2+1}\right)\,dz = 2\left[\frac{z^3}{3} - 2z + 2\arctan z\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{3} - 2 + 2\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{10}{3} + \pi.$$

Ici nous avons fait le changement de variables $z = \sqrt{x}$.

10.2. On paramètre le cercle par l'angle $\theta \in [0, 2\pi]$, $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$. Alors

$$I_2 = \int_0^{2\pi} ((2x-y)\frac{dx}{d\theta} + (x+y)\frac{dy}{d\theta})\,d\theta = \int_0^{2\pi} ((2R\cos\theta - R\sin\theta)(-R\sin\theta) + (R\cos\theta + R\sin\theta)R\cos\theta)\,d\theta$$
$$= R^2\int_0^{2\pi} (-\sin\theta\cos\theta + 1)\,d\theta = R^2\left[\theta + \frac{1}{4}\cos 2\theta\right]_0^{2\pi} = 2\pi R^2.$$

10.3. Le champ $\vec{u} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ est le gradient d'une fonction scalaire, $\vec{u} = -\nabla\phi$ avec $\phi = -xyz$. Introduisons une paramétrisation de Γ par $t \in [a, b]$. Alors

$$I_3 = \int_a^b \langle \vec{u}, \frac{d\Gamma}{dt}\rangle\,dt = -\int_a^b \frac{d\phi(\Gamma(t))}{dt}\,dt = \phi(\Gamma(a)) - \phi(\Gamma(b)).$$

Mais la courbe Γ est fermée, et $\Gamma(a) = \Gamma(b)$. Alors $I_3 = 0$.

11. La formule de Green-Riemann postule que pour une courbe Γ fermée lisse délimitant un domaine D on a

$$\int_\Gamma u_x\,dx + u_y\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\,dx\,dy.$$

Ici u_x, u_y sont des fonctions lisses.

11.1. L'aire de D est donné par $A = \iint_D 1\,dx\,dy$. Posons $u_x = -\frac{y}{2}$, $u_y = \frac{x}{2}$. Alors $\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 1$. L'application de la formule de Green-Riemann donne le résultat désiré.

11.2. On prend pour Γ le bord de l'ellipse et le parametrise par $\theta \in [0, 2\pi]$. On obtient

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(x\frac{dy}{d\theta} - y\frac{dx}{d\theta}\right)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos\theta \cdot b\cos\theta - b\sin\theta \cdot (-a\sin\theta))\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,d\theta = \pi ab.$$

12. On a $u_x = xy^2$ and $u_y = 2xy$. Alors $\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 2x(1-y)$. On a alors

$$\int_\gamma \omega = \iint_K 2x(1-y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} 2x(1-y)\,dx\,dy = \int_0^1 [x^2(1-y)]_0^{\sqrt{1-y^2}}\,dy$$
$$= \int_0^1 (1 - y - y^2 + y^3)\,dy = [y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4}]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

13. On peut, p.ex., prendre $u_x = 0$, $u_y = \frac{1}{2}x^2y$ tel que $\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = xy$. On pose $\gamma = \partial D$. On a alors

$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_\gamma \frac{1}{2}x^2y\,dy = \int_0^2 \frac{1}{2}(2-y)^2y\,dy = \frac{1}{2}[2y^2 - \frac{4}{3}y^3 + \frac{y^4}{4}]_0^2 = \frac{1}{2}(8 - \frac{32}{3} + 4) = \frac{2}{3}.$$

Ici on a utilisé que la forme $\omega = \frac{1}{2}x^2y\,dy$ s'annule sur les axes. L'intégrale sur γ se reduit alors à l'intégrale sur le segment entre $(2, 0)$ et $(0, 2)$.