Solutions du CC du 12 novembre 2021

Exercice 1: Le changement des variables est donné par

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Donc l'équation devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial(x,y)} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} &= \frac{\partial f}{\partial(u,v)} \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial(u,v)} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial(u,v)} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial v} \\ &= e^{x+y} = e^{-u+3v}. \end{aligned}$$

L'intégration donne

$$-f(u,v) = \frac{1}{3} e^{-u+3v} + h(u)$$

avec $h(u)$ une fonction arbitraire. Finalement on obtient

$$f(x,y) = -\frac{1}{3} e^{x+y} + h(5x+2y).$$

Exercice 2: Les coordonnés cartésiennes du point d'évaluation sont données par

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos \frac{\pi}{4} \\ 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le rotor est donné par

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2z-2z \\ 2y-2y \end{pmatrix} = 0.$$

Vu qu'il ne dépend pas du point (a,b,c), la réponse est 0.

Exercice 3:
1. Il faut que $x^2+y^2>0$, soit $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. On a $r^2 = x^2+y^2$, donc $f_\beta = \beta \cos r^2 + \log r^\beta = \beta(\cos r^2 + \log r)$.
3. En coordonées polaires on a

$$\nabla f_\beta = \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f_\beta}{\partial \theta} \right) = \beta \left(-2r \sin r^2 + \frac{1}{r}, 0 \right) = \beta(-2r \sin r^2 + \frac{1}{r}) \vec{e_r}.$$

4. En coordonnées cartésiennes on a

$$\nabla f_\beta = \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial x}, \frac{\partial f_\beta}{\partial y} \right) = \beta \left(-2x \sin(x^2+y^2) + \frac{x}{x^2+y^2}, -2y \sin(x^2+y^2) + \frac{y}{x^2+y^2} \right).$$

Une autre possibilité est d'utiliser l'expression déjà calculée,

$$\nabla f_\beta = \beta(-2r \sin r^2 + \frac{1}{r}) \frac{(x,y)}{r} = \beta \cdot \left(-2 \sin(x^2+y^2) + \frac{1}{x^2+y^2} \right) \cdot (x,y).$$

Exercice 4:
(a): Le domaine est borné par un cercle de rayon $\sqrt{2}$ et l'axe vertical, voir Fig. 1.
(b): Le domaine en coordonnées polaires devient $\{(r,\varphi) \mid 0 \le r \le \sqrt{2},\ \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}\}$. Donc on a

$$\begin{aligned} \iint_D e^{2x} y \, dx \, dy &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{2r\cos\varphi} r \sin\varphi \cdot r \, d\varphi \, dr = -\int_0^{\sqrt{2}} \frac{r}{2} [e^{2r\cos\varphi}]_{\pi/2}^{3\pi/2} \, dr \\ &= -\int_0^{\sqrt{2}} \frac{r}{2} (e^{2r\cos\frac{3\pi}{2}} - e^{2r\cos\frac{\pi}{2}}) \, dr = 0. \end{aligned}$$

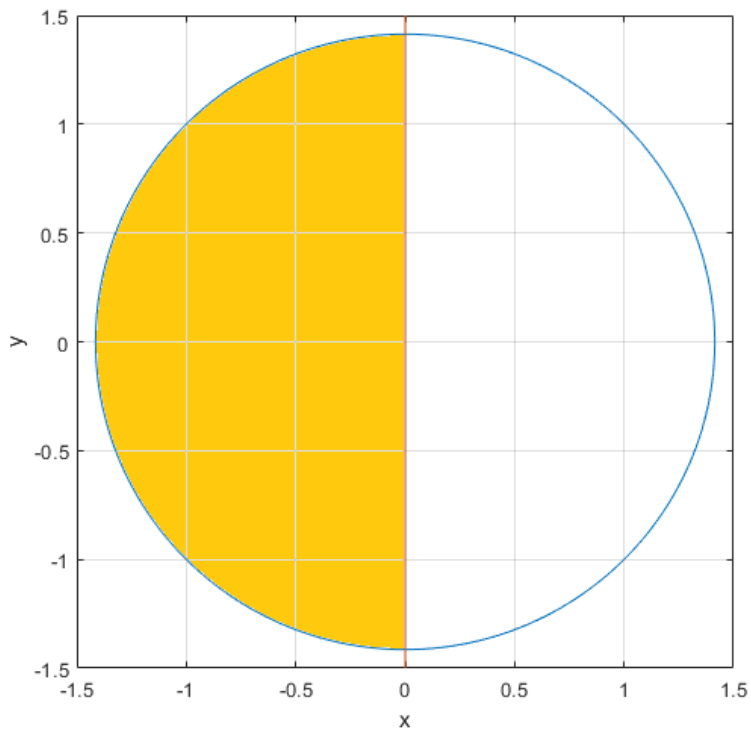

Figure 1: Domaine D