

Institut Polytechnique de Grenoble

ENSIMAG

PRINCIPES ET MÉTHODES STATISTIQUES

TRAVAUX DIRIGÉS ET TP EN R

ANNÉE 2008-2009

Olivier GAUDOIN Maryse BÉGUIN

Olivier.Gaudoin@imag.fr Maryse.Beguin@imag.fr

Table des matières

1	Objectifs et planning	5
1.1	Ce qu'il faut savoir faire à l'issue du cours	5
1.2	Planning indicatif	5
2	Exercices	7
2.1	Fiche d'exercices n°1	7
2.2	Fiche d'exercices n°2	8
2.3	Fiche d'exercices n°3	9
2.4	Fiche d'exercices n°4	10
2.5	Fiche d'exercices n°5	11
2.6	Fiche d'exercices n°6	12
2.7	Documents dans la presse, sondages	13
3	Enoncé du TP de R, 2007	15
4	Introduction à R	17
4.1	Les bases de R	17
4.2	Commandes pour les deux premiers TD en R	18
4.3	Quelques commandes utiles de R	19
4.4	Les lois de probabilité usuelles en R	20
4.5	Les principaux tests d'hypothèses en R	22
4.6	Les graphiques dans R	23
4.6.1	Graphique simple	23
4.6.2	Paramétrage de la commande plot	24
4.6.3	Autres fonctions graphiques	25
5	Lois de probabilités usuelles	27

Chapitre 1

Objectifs et planning

1.1 Ce qu'il faut savoir faire à l'issue du cours

- Que faire avec un échantillon ?
 - Savoir interpréter les indicateurs statistiques (médiane, moyenne, variance, etc.)
 - Savoir choisir un modèle (histogramme, graphe de probabilité, etc)
- Savoir faire la distinction entre :
 - Observation et variable aléatoire
 - Paramètre et estimateur (exemple : espérance d'une loi et moyenne empirique d'un échantillon)
- Comprendre les notions de biais et de variance d'un estimateur.
- Savoir calculer un estimateur par les méthodes du maximum de vraisemblance et des moments.
- Comprendre le principe de construction d'un intervalle de confiance avec la fonction pivotale.
- Savoir interpréter un intervalle de confiance.
- Comprendre le principe de construction d'un test d'hypothèses.
- Savoir interpréter une p-valeur : est-ce que l'effet que je crois exister pourrait n'arriver que par hasard ?
- Savoir choisir le bon test pour un problème concret.
- Savoir mettre en œuvre une régression linéaire sur des données bidimensionnelles.
- Savoir interpréter les sorties des commandes de R vues en cours.
- Comprendre l'usage des statistiques dans les médias (sondages, etc).

1.2 Planning indicatif

- Semaines 1 et 2 : statistique descriptive.
- Semaines 3 et 4 : estimation ponctuelle.
- Semaines 5 et 6 : intervalles de confiance.
- Semaines 7 et 8 : tests d'hypothèses sur un échantillon.
- Semaines 9 et 10 : tests d'hypothèses sur deux échantillons et test du χ^2 .
- Semaines 11 et 12 : régression linéaire.

TP : l'énoncé est donné en semaine 6, le compte-rendu est à rendre en semaine 9, les soutenances ont lieu la semaine 10.

Chapitre 2

Exercices

2.1 Fiche d'exercices n°1

Exercice 1. On a relevé les magnitudes sur l'échelle de Richter des 15 derniers tremblements de terre les plus importants, dans l'ordre chronologique. On soustrait 8 et on obtient les données suivantes, que l'on notera x_1, \dots, x_n , avec $n = 15$:

0.516	0.887	0.783	0.613	0.697	0.459	0.724	0.755
0.867	0.893	0.835	0.718	0.851	0.386	0.855	

1. Construire un histogramme à classes de même largeur, puis à classes de même effectif pour ces données.
2. Un expert A affirme que ces données semblent être distribuées selon une loi uniforme. Un expert B prétend qu'elles proviennent plutôt d'une loi puissance $Pu(\theta, c)$, définie par sa densité :

$$f(x) = \frac{cx^{c-1}}{\theta^c} \mathbb{1}_{[0, \theta]}(x), \theta > 0, c > 0$$

- (a) Au vu de l'histogramme, que pensez-vous de ces affirmations ?
- (b) A l'aide de deux graphes de probabilité, montrer qu'il est vraisemblable que c'est l'expert B qui a raison, et donner des estimations graphiques de θ et c .

Exercice 2.

1. Proposer une méthode graphique pour tester l'adéquation d'un échantillon à la loi de Poisson inspirée de celle des graphes de probabilités.
2. Sur un serveur, on a compté le nombre de requêtes reçues sur mille intervalles de temps d'une minute :

nombre de requêtes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	≥ 9
nombre d'intervalles	117	249	290	188	97	35	17	6	1	0

Est-il raisonnable de supposer que le nombre de requêtes reçues par minute sur ce serveur est une variable aléatoire de loi de Poisson ? Si oui, proposer plusieurs méthodes pour estimer le paramètre de cette loi et donner les estimations correspondantes.

2.2 Fiche d'exercices n°2

Exercice 1. Dans une rue passante de Montréal, on a mesuré le niveau de bruit en décibels émis par 20 véhicules pris au hasard. Les données ordonnées sont les suivantes :

54.8 55.4 57.7 59.6 60.1 61.2 62.0 63.1 63.5 64.2
65.2 65.4 65.9 66.0 67.6 68.1 69.5 70.6 71.5 73.4

1. Donner les moyenne, médiane, variance, écart-type, coefficients de variation et quartiles empiriques de cet échantillon.
2. Construire un histogramme à classes de même largeur, puis à classes de même effectif. En déduire que la loi normale est une loi de probabilité vraisemblable pour le niveau de bruit des véhicules passant dans cette rue. Confirmer ce résultat à l'aide d'un graphe de probabilités.
3. On suppose donc que cet échantillon est issu d'une loi normale.
 - (a) Estimer la moyenne et la variance de cette loi.
 - (b) Estimer la probabilité que le niveau de bruit dépasse 70 db, puis 74 db.
 - (c) La municipalité a décidé de taxer les 10 % de véhicules les plus bruyants. Comment déterminer le niveau de bruit limite au delà duquel les véhicules concernés seront mis à l'amende ?
4. Répondre aux mêmes questions en supposant que l'échantillon est issu d'une loi exponentielle. Montrez que cette hypothèse n'est pas vraisemblable.
5. Répondre aux mêmes questions sans supposer connue la loi de probabilité des observations.

Exercice 2. On considère un échantillon de taille n de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Calculer les estimateurs des moments et de maximum de vraisemblance de λ .

Exercice 3. On considère un échantillon de taille n de la loi de Laplace $\mathcal{L}(\theta)$, définie par la densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x; \theta) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}$$

Calculer les estimateurs des moments et de maximum de vraisemblance de θ .

2.3 Fiche d'exercices n°3

Exercice 1. Dans un laboratoire d'astrophysique, on s'intéresse à un certain type de particules cosmiques. Un détecteur a relevé les durées d'attente en heures entre les réceptions successives des premières particules captées.

75	265	225	402	35	105	411	346	159	229
62	256	431	177	56	144	354	178	386	294

On admet que ces durées sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes et de même loi.

1. Déterminer une loi de probabilité vraisemblable pour ces données.
2. Estimer le paramètre de cette loi par la méthode des moments.
3. Estimer ce paramètre par la méthode du maximum de vraisemblance.
4. Comparer les qualités de ces estimateurs. Que choisir comme estimateur ?
5. Quand, en moyenne arrivera la prochaine particule ? Quelle est la probabilité que la prochaine particule arrive avant les 100 prochaines heures ? Combien de particules peut-on s'attendre à recevoir en un an ?

Exercice 2. On considère un échantillon de taille n de la loi exponentielle $\exp(\lambda)$. On sait que l'estimateur de maximum de vraisemblance et l'estimateur des moments de λ sont égaux à $\hat{\lambda}_n = 1/\bar{X}_n$.

1. Montrer que cet estimateur est biaisé. Proposer un estimateur sans biais $\hat{\lambda}'_n$.
2. Montrer que cet estimateur sans biais est convergent, asymptotiquement efficace, mais pas efficace.
3. Déterminer une fonction pivotale pour λ .
4. Construire un intervalle de confiance bilatéral de seuil α pour λ .
5. Construire des intervalles de confiance unilatéraux du type $[0, \lambda_{sup}]$ et $[\lambda_{inf}, +\infty[$.
6. Dans l'exemple des ampoules, calculer toutes les estimations obtenues. Donner tous les intervalles de confiance en prenant comme seuil 50%, 10%, 5% et 1%.

2.4 Fiche d'exercices n°4

Exercice 1. Soient X_1, \dots, X_n n variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi dépendant d'un paramètre inconnu θ . On sait que l'estimateur de maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n$ vérifie :

$$\sqrt{\mathcal{I}_n(\theta)} (\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

On admettra que sous certaines conditions de régularité, on a aussi :

$$\sqrt{\mathcal{I}_n(\hat{\theta}_n)} (\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

1. Utiliser ce résultat pour déterminer un intervalle de confiance asymptotique de seuil α pour θ , c'est-à-dire un intervalle I_n tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\theta \in I_n) = 1 - \alpha$.
2. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique de seuil α pour le paramètre p de la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.
3. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique de seuil α pour le paramètre λ de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
4. Application : en reprenant les données des requêtes de l'exercice 2 de la fiche 1, donner un intervalle de confiance asymptotique de seuil 5% pour le nombre moyen de requêtes arrivant par minute sur ce serveur.

Exercice 2. Les habitants d'une zone proche d'un aéroport affirment que le niveau de bruit moyen perçu dans cette zone dépasse la limite tolérée de 80 décibels, à partir de laquelle l'aéroport doit indemniser les riverains. L'aéroport soutient qu'au contraire, cette limite n'est pas atteinte.

1. Des experts sont chargés de mettre en place une procédure permettant de trancher entre les deux parties. Expliquer pourquoi le choix des hypothèses nulle et alternative peut varier suivant que les experts sont mandatés par l'aéroport ou par les riverains.
2. Les experts ont relevé les niveaux de bruits perçus dans la zone pour le passage de $n = 100$ avions. On admet que ces niveaux sont distribués selon une loi normale. Le niveau moyen observé est $\bar{x}_n = 81.6$ db et l'écart-type observé est $s'_n = 7$ db. Au vu de ces mesures, les riverains demandent une indemnisation, mais l'aéroport prétend que le niveau moyen observé n'est pas suffisamment supérieur à 80 db pour pouvoir conclure avec une confiance de 95 % que le niveau limite toléré est dépassé. Qu'en pensez-vous ?

2.5 Fiche d'exercices n°5

Exercice 1. Une machine A fabrique des baguettes dont la longueur suit une loi normale de moyenne 4 mm et d'écart-type 0.1 mm. On teste une nouvelle machine B. Sur 25 baguettes fabriquées, on constate une moyenne empirique de 4 mm et un écart-type estimé de 0.08 mm. Au seuil 5%, peut-on conclure que la machine B est plus précise que la machine A ?

Exercice 2. Une ville a l'opportunité de faire installer la télévision par câble dans tous ses immeubles. L'opération ne sera rentable que si au moins 40% des habitants concernés s'abonnent. La municipalité a effectué un sondage sur 400 personnes, parmi lesquelles 175 ont déclaré vouloir s'abonner au câble. Au vu de ce sondage, si on lance l'opération, quel est le risque qu'elle ne soit pas rentable ?

Exercice 3. Un fabricant de composants électroniques a effectué un test sur un nouveau type de transistors au silicium, et relevé les durées de vie suivantes, en milliers d'heures :

19.3 16.4 35.9 5.8 47.0 3.9 30.4 15.1 2.6 20.1

On admettra que la loi exponentielle est un bon modèle pour la durée de vie de ces transistors.

1. Dans un premier temps, on suppose que la durée de vie des transistors équivalents de la génération précédente était de loi exponentielle de moyenne 10000 heures. Un expert affirme que le résultat de l'expérience montre que les nouveaux transistors sont plus fiables que les anciens. Qu'en pensez-vous ?
2. Dans un deuxième temps, on utilise des relevés de durées de vie effectués sur les transistors de la génération précédente :

8.3 10.1 8.5 11.6 24.8 6.7 4.8 7.1

On suppose toujours que ces durées sont de loi exponentielle, mais on ne suppose plus que leur moyenne est connue. Construire un test d'hypothèses permettant de déterminer si les nouveaux transistors sont plus fiables que les anciens.

Exercice 4. Un ingénieur a mesuré les durées en minutes de réalisation d'une tâche complexe réalisée par 6 robots dans deux environnements différents A et B.

Robot	1	2	3	4	5	6
Environnement A	15	27	38	19	45	8
Environnement B	10	23	35	10	45	10

On admet que la durée de réalisation de la tâche est une variable aléatoire de loi normale dans les deux environnements. Peut-on conclure que les robots travaillent plus vite dans l'environnement B que dans l'environnement A ?

2.6 Fiche d'exercices n°6

Exercice 1. Une étude a été faite sur 320 familles de 5 enfants pour déterminer la répartition entre filles et garçons. Les résultats sont les suivants :

nombre de filles	0	1	2	3	4	5
nombre de familles	18	56	90	88	53	15

1. On admet que les naissances des filles et des garçons sont équiprobables. Peut-on conclure de cette étude que les sexes des différents enfants d'une même famille sont indépendants ?
2. Peut-on utiliser ces données pour tester l'hypothèse que les naissances des filles et des garçons sont équiprobables ?

Exercice 2. Démontrer la propriété 22 du cours, c'est-à-dire que, dans un modèle de régression linéaire simple, on a :

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{ns_x^2}, \quad Var(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma^2}{n} \left(1 + \frac{\bar{x}_n^2}{s_x^2}\right), \quad Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0) = -\frac{\sigma^2 \bar{x}_n}{ns_x^2}, \quad Cov(\hat{\beta}_1, \bar{Y}_n) = 0.$$

Exercice 3. On reprend les données du cours sur la dépendance entre la vitesse et la distance de freinage d'un véhicule. Ayant constaté que le modèle linéaire $Y_i = \beta_1 x_i + \beta_0 + \varepsilon_i$ n'est pas pertinent à cause d'une ordonnée à l'origine estimée négative, on propose d'imposer à la droite des moindres carrés de passer par l'origine. On va donc considérer le modèle linéaire suivant :

$$\forall i, Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$$

où les ε_i sont indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

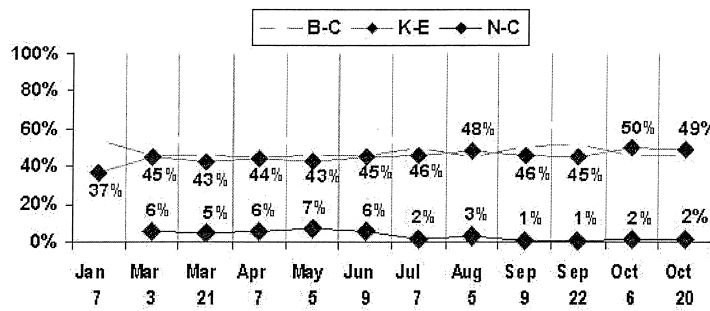
1. Déterminer l'estimateur des moindres carrés $\hat{\beta}_n$ de β . En donner une expression sous forme de combinaison linéaire des Y_i et une autre comme une fonction de C_{xY} , s_x^2 , \bar{x}_n et \bar{Y}_n .
2. Montrer que $\hat{\beta}_n$ est un estimateur sans biais et convergent de β . Donner sa loi de probabilité.
3. Calculer l'erreur quadratique moyenne minimum. Déterminer son espérance. En déduire un estimateur sans biais $\hat{\sigma}_n^2$ de σ^2 . On admettra que $(n-1) \frac{\hat{\sigma}_n^2}{\sigma^2}$ est de loi χ_{n-1}^2 et est indépendant de $\hat{\beta}_n$.
4. Déterminer les estimateurs de maximum de vraisemblance de β et σ^2 .
5. Donner des intervalles de confiance de seuil α pour β et σ^2 .
6. Sur les données de l'exemple, calculer $\hat{\beta}_n$ et $\hat{\sigma}_n^2$. Donner des intervalles de confiance de seuil 5% pour β et σ^2 .

2.7 Documents dans la presse, sondages

Présidentielle US - www.ipsos.fr

Face à face : Bush/Cheney vs. Kerry/Edwards vs. Nader/Camejo

Si l'élection du Président et du Vice-Président se tenait aujourd'hui et que les candidats étaient George W. Bush au poste de Président et Dick Cheney au poste de Vice-Président, les Républicains, et John Kerry au poste de Président et John Edwards au poste de Vice-Président, les Démocrates, et Ralph Nader au poste de Président et Peter Camejo au poste de Vice-Président, les Indépendants, pour qui voteriez-vous ?



Méthodologie : Date de terrain : 18-20 Octobre (976 personnes interrogées)
Marge d'erreur : ± 3.1 sur l'ensemble de l'échantillon

Source: AP/Ipsos
© Ipsos-Public Affairs 2004



Philippe Hubert, rédacteur en chef d' ipsos.fr

© Ipsos - 2004. Tous droits réservés.



Les sondages n'ont plus qu'à engueuler les électeurs

La vague rose a viré au bouillon, les échantillons étaient ridicules et les "redressements" des chiffres, fort brutaux. Les sondages ont influencé les futurs sondés, et les médias, comme les politiques, ont amplifié le bon accord aux socialistes.

« O N a l'impression qu'il y a une campagne des sondeurs. On nous juge par rapport aux résultats annoncés par les sondages et non par rapport aux chiffres des élections précédentes. »

De qui cette ambre diatribe ? De Joseph so-même, au lendemain de la relative déconvenue de ses troupes s'attendant à une « vague rose ». Et, au PS, le refrain de la « campagne » est repris avec renouveau. Particulièrement visé, la Sofres, qui depuis des semaines dans le « Figaro Magazine » annonçait un raz de marée de la gauche parisienne.

Sous-entendu de ces camarades accrus au « Fig-Mag » : ces chiffres trop optimistes ont démoobilisé les troupes, sûres de gagner d'avance. A droite, bien sûr, la rengaine inverse se fait entendre : leurs estimations déflatées, les sondages avaient « intoxiqué » (comme l'a dit le RPR Deydieu) l'électeur séguiste ou libéral en sapant son moral.

Grand écart

Une certitude : à Paris, clou de la campagne, le PS a bénéficié d'un bon sens presque systématique dans les estimations. Ainsi, selon l'institut CSA (pour « Le Parisien » du 8 février), le socialiste Michèle Blumenthal distancait, dans le XI^e arrondissement, le RPR Jean-François Perrin de 16 points. A l'arrivée : 2,2 points d'avance seulement !

Plus fort : le triomphal annonce de Lyne Cohen-Solal dans le V^e. Pour USA et « Le Parisien » (3 mars), celle-ci totalisait 38 % d'intentions de vote, tandis que Jean-Yves n'en recueillait que 27 %, alors qu'il attendra 40 % ! La socialiste a été

« dopée » de 11 % et l'ibéri puni de 13 %.

C'est une grande première : les sondages se sont tous trompés dans le même sens. A Paris comme en province, le PS a partout bénéficié d'une « prime ».

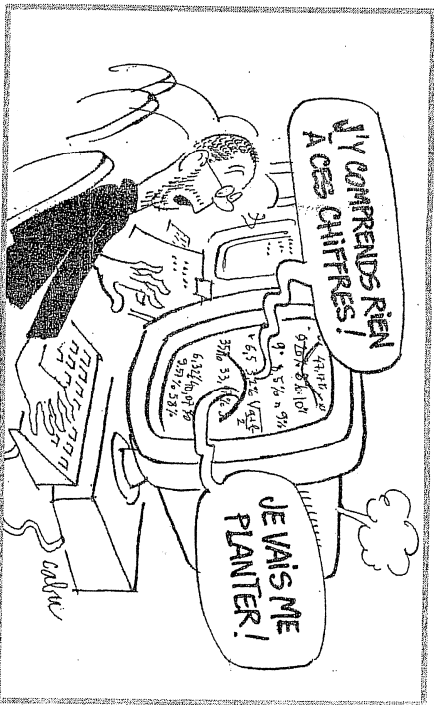
Marthe Aubry, à Lille, par exemple, pouvait-elle imaginer un score inférieur à 35 %, alors que la plupart des enquêtes la juchait aux alentours de 45 % ?

Et Catherine Mégrét, maire (MNR) de Vitrolles, n'était-elle pas « manate » elle aussi par la fameuse « vague rose » ? Or, au premier tour, elle a devancé le candidat PS de 15,7 %, quant aux Verts, ils ont été souvent sous-évalués (moins 4 à 5 points à Paris). Mais la droite a encore plus souffert des sondages.

A Lyon, si la cote de l'UDF Michel Merlier était pâle, son collègue Charles Millon s'était vu, lui, enterrer par plusieurs sondages. Ainsi, l'édition lyonnaise de « L'Express » titrait en couverture quelques jours avant le scrutin, et chiffres à l'appui : « Million distancé, avantage Merrier ? ». La suite est connue.

Pourtant, les premières victimes de la sondagite sont des socialistes et des membres du gouvernement, parachutés, la fleur au fusil, sur la foi d'études prometteuses. Durant des semaines, Elisabeth Ginepro était annoncée sur les escarpements de la RPR Marie-Josée Roig-Erreur funeste : la candidate-ministre lui a rendu 19,3 % le 11 mars.

Avant de tomber en torche à Bézières, Jean-Claude Gayssot avait eu le tort d'ajouter foi à une enquête qui, admettons, les forces socialistes et communistes, menaçait le haut-niveau de l'UDF Raymond Condeat. Et Dominique Voinet n'a-t-elle pas rêvé à la lecture d'un sondage de l'Ilofop en novembre 2000 ? A



en croire les sondages, les Dolots voulaient un maître de gauche...

Dès le soir du scrutin, les pros de la décimale le répétaient, à l'exemple de Pierre Giacometti (Ipsos) dans « Libération » (13/3) : « Nous sommes les boucs émissaires. Les journalistes se sont trompés dans leurs analyses, c'est toujours notre faute. »

Sau Didier Witkowski (Sofres) risquait un aveu : « C'est vrai, le poids du PS a été surestimé. » Et d'inviter un transfert d'électeurs, certains d'une victoire de la gauche, au profit des Verts.

Aucun de ces experts n'avance une explication plus vulgaire, mais que la plupart des sondages glissent en privé : les

manipulés sont, comme à l'habitude, l'occasion d'une orgie de sondages. Et les affaires sont bonnes pour les instituts. Ainsi, les nombreuses enquêtes réalisées dans la capitale et publiées durant plusieurs semaines par « Le Parisien » ont rapporté 11 millions de francs à CSA.

Cela dit, la qualité n'a pas suivi la quantité. Exemple : BVA a utilisé des échantillons de 400 personnes pour lesquels, selon la table de Ganss (table des statistiques), l'« marge d'incertitude » peut atteindre 10 %. La Sofres, elle, s'est parfois contentée d'interroger des groupes de 200 personnes. Cette fois les chiffres étaient affectés d'une incertitude de 14 points. Excusez du peu...

Soumis à des résultats aussi flottants, les sondages appliquent une vieille recette maison : le « redressement ». Autrement dit, la modification, « à la main », des chiffres bruts obtenus à la sortie de leurs ordinateurs en utilisant comme critère les « souvenirs de vote » des sondés lors d'élections précédentes. Aux européennes de 1999, les chiffres du PS, « sortants » à 27 %, étaient ainsi « redressés » à 22 %.

Pourtant ces redressements ont-ils, cette fois, tous favorisé le PS ? Parce que les sondages se sont fondés sur des scrutins (législatives de 1997, régionales de 1998, européennes de 1999) plutôt favorables à l'équipe Jospin.

Ce n'est pas tout : les commentaires des médias, comme les discours des politiques, influencent eux aussi les colporteurs de chiffres. Et réciproquement. Encore plus subtil : les sondés (sur qui déteignent parfois d'autres sondages) influencent eux aussi leur marque en livrant — à la demande des instituts — des pronostics sur le résultat final. Et les réponses s'ajoutent conditions au discours ambiant. En prévoyant (en moyenne à 60 %) une victoire de la gauche, les sondés ont à leur tour participé à la spirale de l'erreur.

Résultat, et malgré leurs dénégations, de nombreux sondages étaient les premiers à croire à l'idée de la « vague rose ».

Stéphane Rozes (CSA) ne déclarait-il pas à « Combattant » (quotidien réalisé par des étudiants journalistes) : « Tibert doit espérer que Philippe Séguin résiste au raz de marée annoncé de la gauche... » Annoncé par qui, au fait ?

Jean-François Julliard

Chapitre 3

Enoncé du TP de R, 2007

Un compte-rendu est à rendre pour le 23 novembre 2007 (date impérative). Il comprendra, suivant la nature des questions posées, des calculs mathématiques et des sorties numériques et graphiques de R, ainsi que tout commentaire que vous jugerez utile. Ce compte-rendu au format pdf sera déposé sur le site TEIDE. Tout retard sera pénalisé. Le travail sera conduit par groupes de 3 personnes, ces groupes étant tirés au hasard.

On s'intéresse à un système de capteurs permettant de mesurer la vitesse du vent, dans le but d'étudier la production d'une éolienne. Les capteurs mesurent les coordonnées A_1 et A_2 du vecteur vitesse dans un plan rapporté à un repère orthonormé. Les fichiers A1.txt et A2.txt contiennent les mesures correspondantes pour un réseau de 100 capteurs indépendants. La commande `scan` permet de créer des vecteurs dans R à partir du contenu de ces fichiers.

1. Expliquer pourquoi, au vu des données, il est raisonnable d'admettre que A_1 et A_2 sont des variables aléatoires de loi normale centrée et de même variance σ^2 , que l'on estimera. On admettra de plus que A_1 et A_2 sont indépendantes.
2. On note $X = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ la norme du vecteur vitesse. Montrer que X^2/σ^2 est de loi exponentielle, dont vous préciserez le paramètre. Vérifiez que cette hypothèse est validée par les données.
3. Montrer que X suit une loi (nommée loi de Rayleigh et notée $\mathcal{R}(\sigma^2)$) de densité

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

4. Calculer $E(X)$. On admettra que $Var(X) = \frac{4 - \pi}{2} \sigma^2$. Valider ces résultats sur les données.

5. Donner l'expression d'un graphe de probabilités pour la loi $\mathcal{R}(\sigma^2)$. Le tracer pour les données et conclure.
6. Pour estimer σ^2 , calculer l'estimateur de maximum de vraisemblance $\hat{\sigma}_n^2$ et l'estimateur par la méthode des moments $\tilde{\sigma}_n^2$. Montrer que $\hat{\sigma}_n^2$ est sans biais et que $\tilde{\sigma}_n^2$ est biaisé. Construire un estimateur sans biais $\tilde{\sigma}_n'^2$ à partir de $\tilde{\sigma}_n^2$. Donner les estimations correspondantes sur les données.
7. Simuler un nombre m d'échantillons de taille n de la loi $\mathcal{R}(\sigma^2)$, les valeurs de m , n et σ^2 étant à choisir par vos soins. Pour chaque échantillon obtenu, calculer les trois estimations de σ^2 . Estimer le biais et la variance des 3 estimateurs. Qu'en concluez-vous ?
8. Vérifier empiriquement que ces estimateurs sont non gaussiens mais asymptotiquement gaussiens.
9. Pour tout α dans $]0, 1[$, déterminer un intervalle de confiance de seuil α pour σ^2 . Donner cet intervalle de confiance au seuil 5 % pour les données.
10. Vérifier empiriquement que quand on simule un grand nombre d'échantillons de loi $\mathcal{R}(\sigma^2)$, alors seule une proportion approximativement égale à $1 - \alpha$ des intervalles de confiance calculés contient la vraie valeur du paramètre. Qu'en déduisez-vous concrètement ?

Chapitre 4

Introduction à R

Ce chapitre fournit une introduction élémentaire à R un peu plus complète que celle présente dans le poly de cours. Pour plus de détails, voir les liens présentés sur le Kiosk.

4.1 Les bases de R

R est un logiciel de statistique dédié à l'analyse des données et à leur visualisation. Il contient une collection d'outils pour la statistique, un environnement graphique et un langage de programmation orienté objet. La plupart des entités créées en R sont permanentes. Ces entités sont les objets “données, résultats, fonctions”, et sont stockées dans le répertoire `.RData` créé par défaut. Le résultat d'une procédure statistique peut être ainsi réutilisé lors de différentes sessions. Il est donc important de créer un répertoire pour chaque projet statistique effectué en R.

On ouvre une session de R par la commande :

```
$ R
```

Pour clôturer une session, utiliser :

```
> q()
```

L'historique d'une session est conservé dans le fichier `.Rhistory`.

R possède une documentation en ligne accessible par :

```
> help.start()
```

L'environnement graphique de R est initialisé par la commande

```
> motif()
```

Techniquement, R est un langage fonctionnel. Les commandes élémentaires sont constituées d'expressions et d'affectations. Par exemple :

```
> 2 + 5
```

```
[1] 7
```

```
> a <- c(9,3,7,5)
```

```
> a
```

```
[1] 9 3 7 5
> a + 3
[1] 12 6 10 8
> a[2 :4]
[1] 3 7 5
> a[a>6]
[1] 9 7
```

R peut être complété en écrivant de nouvelles fonctions. Voici un exemple où l'on souhaite calculer la statistique $\text{stat.log}(x) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i$ où $\forall i, x_i > 0$. On pourra définir une fonction de la façon suivante (même si l'on peut faire bien plus rapide en pratique) :

```
> stat.log <- function(x)
+ {
+ n <- length(x)
+ s <- 0
+ for(i in (1 :n)) { s <- s + log(x[i]) }
+ -s/n
+ }
```

La fonction `stat.log` pourra être désormais utilisée comme une fonction standard de R. D'un point de vue pratique, on peut éditer ses fonctions dans un éditeur externe (nedit, emacs, ...) puis faire du copier/coller vers R ou bien utiliser la commande `source`.

4.2 Commandes pour les deux premiers TD en R

Pour enregistrer une figure dans un fichier au format postscript, commencer par rediriger la sortie graphique vers le fichier de sauvegarde, ici "nomfichier.eps" :

```
postscript("nomfichier.ps", horizontal=FALSE)
```

Puis tracer la figure voulue, par exemple un histogramme :

```
hist(x)
```

Et enfin rediriger la sortie graphique vers la fenêtre initiale :

```
dev.off()
```

Pour tracer un histogramme des données `x` dont l'aire est égale à 1, les bornes des classes sont données par le vecteur `bornes`, et les plages de valeurs des abscisses par le vecteur `xlim` :

```
histx <- hist(x, prob=T, breaks=bornes, xlim=xlim, ...)
```

Pour un histogramme à classes de même effectif, les bornes des classes peuvent être calculées comme des quantiles empiriques, à l'aide d'une commande du type :

```
breaks <- c(a0, quantile(x,seq(1,k-1)/k),ak)
```

La droite de régression linéaire sur le nuage des points d'abscisses `abs` et d'ordonnées `ord` est obtenue à l'aide de :

```
reg <- lm(ord abs)
```

La pente de la droite des moindres carrés est donnée par `reg$coefficient[2]` et l'ordonnée à l'origine par `reg$coefficient[1]`.

Pour tracer la droite obtenue, l'une des commandes suivantes pourra être utilisée :

```
lines(abs, fitted.values(reg)) ou abline(reg)
```

4.3 Quelques commandes utiles de R

<code>help(mean)</code>	aide sur la commande <code>mean</code>
<code>x <- c(3,14,15,9)</code>	créé un vecteur ligne $x = (3, 14, 15, 9)$
<code>n <- length(x)</code>	taille du vecteur x
<code>sum(x^2)</code>	$\sum_i x_i^2$
<code>mean(x)</code>	moyenne empirique de l'échantillon x
<code>round(x)</code>	valeurs de x arrondies à l'entier le plus proche
<code>seq(from=1,to=10,by=2)</code>	séquence $(1 + 2k; k \text{ entier}, 1 + 2k \leq 10)$
<code>rep(x,3)</code>	concaténation de 3 répliques du vecteur x
<code>solve(a,b)</code>	solution du système linéaire $ax = b$
<code>diag(x)</code>	matrice diagonale de diagonale x
<code>var(x)</code>	variance estimée $s_n'^2$
<code>sqrt(x)</code>	racine carrée de x , élément par élément.
<code>summary(x)</code>	moyenne, médiane, quartiles et valeurs extrêmes
<code>hist(x)</code>	histogramme de x
<code>sort(x)</code>	tri de x par valeurs croissantes
<code>qqnorm(x)</code>	graphe de probabilités pour la loi normale
<code>plot(x,y)</code>	trace le nuage de points $\{(x_i, y_i)\}_i$
<code>abline(b,a)</code>	superpose au graphique précédent la droite d'équation $y = ax + b$
<code>points(x,z)</code>	superpose au graphique précédent le nuage de points $\{(x_i, z_i)\}_i$
<code>lines(x,z)</code>	superpose au graphique précédent la ligne polygonale reliant les points $\{(x_i, z_i)\}_i$
<code>lm(y~x)</code>	régression linéaire de y sur x
<code>lm(y~x)\$coefficients[2]</code>	pente de la droite de régression
<code>lm(y~x)\$coefficients[1]</code>	ordonnée à l'origine de la droite de régression
<code>lines(x,fitted.values(lm(y~x)))</code>	superpose au graphique précédent la droite de régression
<code>postscript("nom.eps")</code>	redirection de la sortie graphique vers le fichier <code>nom.eps</code>
<code>dev.off()</code>	termine la redirection graphique vers un fichier

<code>par()</code>	contrôle des paramètres graphiques
<code>par(mfcol=c(2,1))</code>	graphique à 2 lignes et 1 colonnes
<code>cat("bonjour","\ n")</code>	imprime à l'écran le mot <code>bonjour</code> et retourne à la ligne
<code>source("nom.R")</code>	charge les commandes R contenues dans le fichier <code>nom.R</code> dans R
<code>if, else</code>	structure de contrôle ou d'itération
<code>for, while, repeat</code>	...

4.4 Les lois de probabilité usuelles en R

Toutes les lois de probabilité usuelles ont été implémentées en R. Chaque loi est identifiée par une abréviation :

- loi binomiale : `binom`
- loi géométrique : `geom`
- loi de Poisson : `pois`
- loi exponentielle : `exp`
- loi gamma : `gamma`
- loi du chi 2 : `chisq`
- loi normale : `norm`
- loi de Student : `t`
- loi de Fisher-Snedecor : `f`
- Loi uniforme : `unif`
- Loi beta : `beta`
- Loi de Cauchy : `cauchy`
- Loi hypergéométrique : `hyper`
- Loi log-normale : `lnorm`
- Loi logistique : `logis`
- Loi négative binomiale : `nbinom`
- Loi de Weibull : `weibull`
- Loi de Wilcoxon : `wilcox`

Pour chaque loi, 4 fonctions sont disponibles, identifiées par un préfixe :

- Probabilités élémentaires pour les v.a.d. ou densité pour les v.a.c. : `d`
- Fonction de répartition : `p`
- Quantiles : `q`
- Simulation : `r`

Une commande R pour une loi de probabilité est constituée d'un préfixe suivi de l'abréviation de la loi. Les paramètres dépendent de la loi choisie.

Exemples :

- `pnorm(u)` donne la fonction de répartition de la loi normale centrée-réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ au point u , $\Phi(u)$. On retrouve la table 1 de la loi normale.

```
> pnorm(0.61)
[1] 0.7290691
```

- `dnorm(x, m, σ)` donne la densité de la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ au point x .

```
> dnorm(1.2, 2, 5)
[1] 0.07877367
```

- `qnorm(p)` donne le quantile d'ordre p de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, $\Phi^{-1}(p)$. On retrouve la table 2 de la loi normale en prenant $p = 1 - \alpha/2$.

```
> qnorm(1-0.05/2)
[1] 1.959964
```

- `rnorm(n, m, σ)` simule un échantillon de taille n de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

```
> rnorm(10, 20, 1)
[1] 21.63128 20.16724 17.21667 18.76593 20.48102 20.46236 20.41822
[8] 19.91344 21.19312 19.89164
```

- `dbinom(k, n, p)` donne $P(K = k)$ quand K est de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

```
> dbinom(3, 5, 0.2)
[1] 0.0512
```

- `rpois(n, λ)` simule un échantillon de taille n de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

```
> rpois(15, 4)
[1] 8 3 2 1 6 6 7 5 3 3 4 4 6 1 1
```

- `qchisq(p, n)` donne le quantile d'ordre p de la loi du chi 2 χ_n^2 . On retrouve la table de la loi du chi 2 en prenant $p = 1 - \alpha$.

```
> qchisq(1-0.05, 20)
[1] 31.41043
```

- `qt(p, n)` donne le quantile d'ordre p de la loi de Student $St(n)$. On retrouve la table de la loi de Student en prenant $p = 1 - \alpha/2$.

```
> qt(1-0.3/2, 12)
[1] 1.083211
```

- `qf(p, ν_1, ν_2)` donne le quantile d'ordre p de la loi de Fisher-Snedecor $F(\nu_1, \nu_2)$. On retrouve la table de la loi de Fisher-Snedecor en prenant $p = 1 - \alpha$.

```
> qf(1-0.05, 8, 22)
[1] 2.396503
```

4.5 Les principaux tests d'hypothèses en R

<code>t.test(x, ...)</code>	test de Student sur l'espérance d'une loi normale
<code>binom.test()</code>	test sur une proportion
<code>var.test(x, y, ...)</code>	test de Fisher sur la variance de 2 échantillons gaussiens indépendants
<code>t.test(x, y, ...)</code>	test de Student sur l'espérance de 2 échantillons gaussiens indépendants
<code>prop.test()</code>	test de comparaison de proportions
<code>chisq.test(x, ...)</code>	test du χ^2 sur les probabilités d'évènements et tables de contingence
<code>ks.test(x, ...)</code>	test de Kolmogorov-Smirnov sur un ou deux échantillons
<code>wilcox.test(x, ...)</code>	test de Wilcoxon-Mann-Whitney sur un ou deux échantillons

4.6 Les graphiques dans R

4.6.1 Graphique simple

Le script suivant en R permet de tracer un nuage de 100 points dont les coordonnées sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi normale centrée-réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, et de le sauvegarder au format postscript dans le fichier “rnorm.ps”.

```
postscript("rnorm.ps")
plot(rnorm(100), rnorm(100))
dev.off()
```

Les instructions suivantes permettent d’insérer cette figure dans un document Latex et de pouvoir la référencer sous le nom de figure 4.1.

```
\begin{figure}[htbp]
\begin{center}
% Requires \usepackage{graphicx}
\includegraphics[width=8 cm, angle=270]{rnorm.ps}
\caption{{\it Utilisation de rnorm}}\label{rnorm}
\end{center}
\end{figure}
```

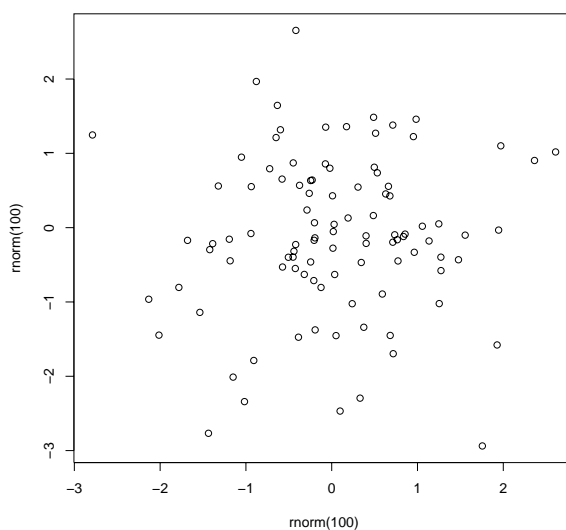


FIG. 4.1 – *Utilisation de rnorm*

4.6.2 Paramétrage de la commande plot

Le script suivant :

```
postscript("graphesR.ps")
x<- seq(-2*pi,2*pi,0.05)
y <- sin(x)
par(mfrow=c(2,2))
plot(x,y,xlab="x",ylab="Sinus de x")
plot(x,y,type="l", main="trait continu")
plot(x[seq(5,1000,by=5)],y[seq(5,1000,by=5)], type="b",axes=F)
plot(x,y,type="n", ylim=c(-2,1))
text(0,0.05,"Divers paramétrages de la fonction plot")
dev.off()
```

permet d'obtenir la figure 4.2.

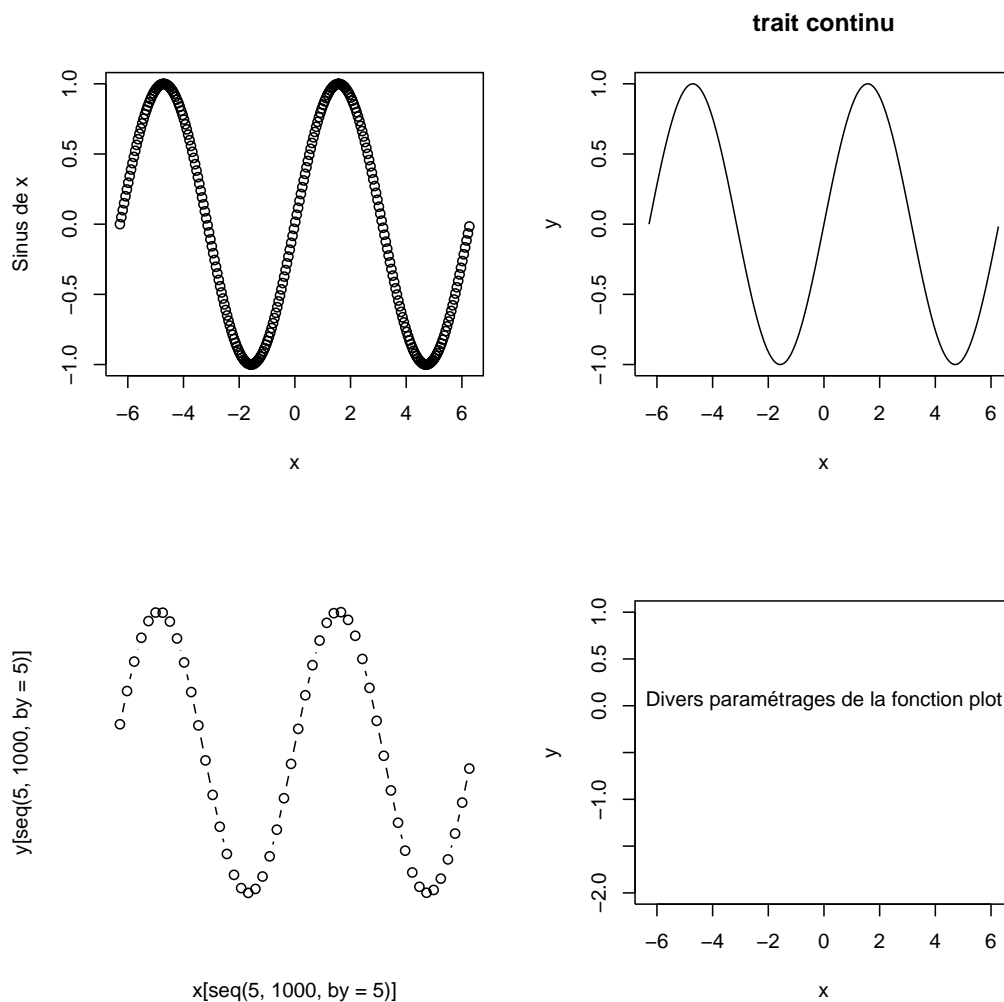


FIG. 4.2 – R permet de créer plusieurs types de graphiques

4.6.3 Autres fonctions graphiques

<code>abline(h=u)</code>	ajoute une droite d'équation $y=u$.
<code>abline(v=u)</code>	ajoute une droite d'équation $x=u$.
<code>legend(x,y,legend,...)</code>	ajoute une légende d'utilisation très flexible
<code>text(x,y,labels,...)</code>	ajoute du texte dans un graphe
<code>axis(side,at, labels..)</code>	ajoute un axe au graphique
<code>arrows(x0,y0,x1,y1,...)</code>	dessine des flèches
<code>symbols(x,y,....)</code>	dessine des cercles, des carrés, ...
<code>box(...)</code>	ajoute une boîte
<code>polygon(x,y)</code>	ajoute un polygone
voir aussi <code>image()</code> , <code>pairs()</code> , <code>persp()</code> ,...	

Chapitre 5

Lois de probabilités usuelles

VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES DISCRÈTES

Dans le tableau ci dessous, on suppose $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Loi et Symbole $X \rightsquigarrow$	Probabilités	$\mathbb{E}(X)$	$Var(X)$	Fonction caractéristique $\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$
Bernouilli $\mathcal{B}(p)$	$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ $\mathbb{P}(X = 1) = p$	p	$p(1 - p)$	$1 - p + pe^{it}$
Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \mathbb{1}_{\{0, \dots, n\}}(k)$	np	$np(1 - p)$	$(1 - p + pe^{it})^n$
Binomiale négative $\mathcal{BN}(n, p)$	$\mathbb{P}(X = k) = C_{k-1}^{n-1} p^n (1 - p)^{k-n} \mathbb{1}_{\{n, \dots\}}(k)$	$\frac{n}{p}$	$\frac{n(1-p)}{p^2}$	$\left(\frac{pe^{it}}{(1-(1-p)e^{it})} \right)^n$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(k)$	λ	λ	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1} \mathbb{1}_{\mathbb{N}^*}(k)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{(1-p)}{p^2}$	$\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$
Hypergéométrique $\mathcal{H}(N, m, n)$ $(m, n) \in \{1, \dots, N\}^2$	$\mathbb{P}(X = k) = \frac{C_m^k C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n} \mathbb{1}_{\{0, \dots, \min(m, n)\}}(k)$	$\frac{nm}{N}$	$\frac{nm(N-n)(N-m)}{N^2(N-1)}$	

VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES CONTINUES

La fonction Gamma est définie pour $a > 0$ par $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} dx$.

$$\text{On a : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n) = (n-1)!, \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\forall a \in]1, +\infty[, \quad \Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1).$$

Dans le tableau ci dessous, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$

Loi et Symbole $X \rightsquigarrow$	Densité	Espérance	$Var(X)$	Fonction caractéristique $\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$
Loi Uniforme $\mathcal{U}[a, b]$	$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Loi Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(x)$	m	σ^2	$e^{itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Loi Exponentielle $\mathcal{Exp}(\lambda) = \mathcal{G}(1, \lambda)$	$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$(1 - \frac{it}{\lambda})^{-1}$
Loi Gamma $\mathcal{G}(\alpha, \lambda)$	$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$(1 - \frac{it}{\lambda})^{-\alpha}$
Loi du Chi-deux $\chi_n^2 = G(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$	$f_X(x) = \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$	n	$2n$	$(1 - 2it)^{-\frac{n}{2}}$
Première loi de Laplace	$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{- x } \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(x)$	0	2	$\frac{1}{1+t^2}$

La fonction Beta est définie pour $a > 0$ et $b > 0$ par

$$\beta(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$$

Dans le tableau suivant, on suppose $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+^*$ et $\eta \in \mathbb{R}_+^*$, $\beta \in \mathbb{R}_+^*$.

Loi et Symbole $X \rightsquigarrow$	Densité	$\mathbb{E}(X)$	$Var(X)$
Loi Beta de 1 ^{ère} espèce $\beta_1(a, b)$	$f_X(x) = \frac{1}{\beta(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$
Loi Beta de 2 ^{ième} espèce $\beta_2(a, b)$	$f_X(x) = \frac{1}{\beta(a,b)} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$	$\frac{a}{b-1}$ si $b > 1$	$\frac{a(a+b-1)}{(b-1)^2(b-2)}$ si $b > 2$
Loi de Weibull $\mathcal{W}(\eta, \beta)$	$f_X(x) = \frac{\beta}{\eta^\beta} x^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$	$\eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$	$\eta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^2 \right]$

VECTEURS ALÉATOIRES DANS \mathbb{N}^d ET DANS \mathbb{R}^d

Dans le tableau suivant, on a :

$n \in \mathbb{N}^*$, $p = (p_1, p_2, \dots, p_d) \in]0, 1[^d$, $\sum_{i=1}^d p_i = 1$ et $k = (k_1, k_2, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^d$, $\sum_{i=1}^d k_i = n$.
 $m \in \mathbb{R}^d$ et $\Sigma \in M_{d,d}$.

Loi et Symbole $X \rightsquigarrow$	Probabilités ou Densité	$\mathbb{E}(X)$	Matrice de covariance	Fonction Caractéristique
Loi Multinomiale $\mathcal{M}_d(n, p)$	$\mathbb{P}(X = k) = \frac{n!}{k_1! \dots k_d!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_d^{k_d} \mathbf{1}_{\mathbb{N}^d}(k)$	np	$c_{i,i} = np_i(1 - p_i)$ $c_{i,j} = -np_i p_j, i \neq j$	$\left[\sum_{i=1}^d p_i z_i \right]^n$
Loi normale $\mathcal{N}_d(m, \Sigma)$	$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\det \Sigma} (\sqrt{2\pi})^d} e^{-\frac{1}{2} (x-m) \Sigma^{-1} (x-m)}$	m	Σ	$e^{i^t m t - \frac{1}{2} t \Sigma t}$

Relations entre lois de probabilité

Les variables aléatoires X et Y sont supposées indépendantes

Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$, alors $X^2 \rightsquigarrow \chi_2^1$

Si $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(\alpha, \lambda)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{G}(\beta, \lambda)$, alors $X + Y \rightsquigarrow \mathcal{G}(\alpha + \beta, \lambda)$.

Loi de **Fisher** $\mathcal{F}(n, m)$: $X \rightsquigarrow \chi_2^n, Y \rightsquigarrow \chi_2^m$ alors $\frac{X}{\frac{Y}{m}} \rightsquigarrow \mathcal{F}(n, m)$.

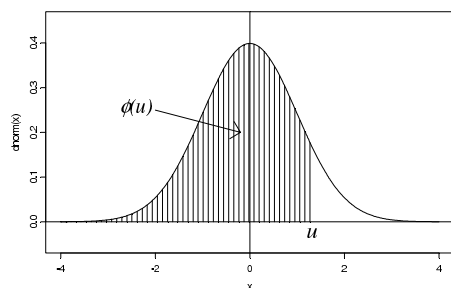
Loi de **Student** $St(n)$: $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1), Y \rightsquigarrow \chi_2^n$ alors $\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \rightsquigarrow St(n)$.

Table 1 de la loi normale centrée réduite

U étant une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, la table donne la valeur de

$$\Phi(u) = \mathbb{P}(U \leq u).$$

En R, la commande correspondante est `pnorm(u)`.



u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Grandes valeurs de u

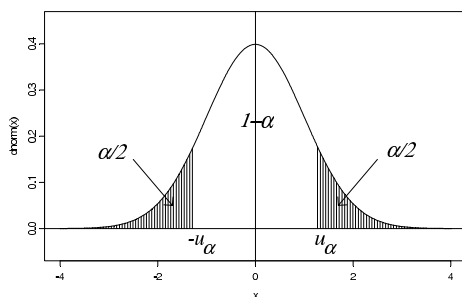
u	3.0	3.5	4.0	4.5
$\Phi(u)$	0.9987	0.99977	0.999968	0.999997

Table 2 de la loi normale centrée réduite

U étant une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et α un réel de $[0, 1]$, la table donne la valeur de

$$u_\alpha = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \text{ telle que } \mathbb{P}(|U| > u_\alpha) = \alpha .$$

En R, la commande correspondante est `qnorm(1-alpha/2)`.



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	$+\infty$	2.5758	2.3263	2.1701	2.0537	1.9600	1.8808	1.8119	1.7507	1.6954
0.1	1.6449	1.5982	1.5548	1.5141	1.4758	1.4395	1.4051	1.3722	1.3408	1.3106
0.2	1.2816	1.2536	1.2265	1.2004	1.1750	1.1503	1.1264	1.1031	1.0803	1.0581
0.3	1.0364	1.0152	0.9945	0.9741	0.9542	0.9346	0.9154	0.8965	0.8779	0.8596
0.4	0.8416	0.8239	0.8064	0.7892	0.7722	0.7554	0.7388	0.7225	0.7063	0.6903
0.5	0.6745	0.6588	0.6433	0.6280	0.6128	0.5978	0.5828	0.5681	0.5534	0.5388
0.6	0.5244	0.5101	0.4959	0.4817	0.4677	0.4538	0.4399	0.4261	0.4125	0.3989
0.7	0.3853	0.3719	0.3585	0.3451	0.3319	0.3186	0.3055	0.2924	0.2793	0.2663
0.8	0.2533	0.2404	0.2275	0.2147	0.2019	0.1891	0.1764	0.1637	0.1510	0.1383
0.9	0.1257	0.1130	0.1004	0.0878	0.0753	0.0627	0.0502	0.0376	0.0251	0.0125

Petites valeurs de α

α	0.002	0.001	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}
u_α	3.0902	3.2905	3.8906	4.4171	4.8916	5.3267	5.7307	6.1094

$$\text{Pour } p < \frac{1}{2}, \Phi^{-1}(p) = -u_{2p}$$

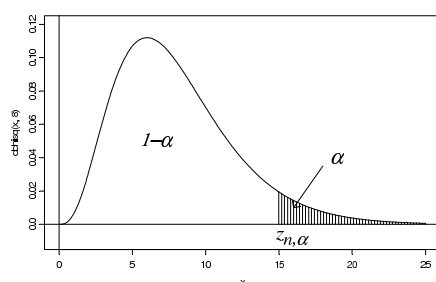
$$\text{Pour } p \geq \frac{1}{2}, \Phi^{-1}(p) = u_{2(1-p)}$$

Table de la loi du χ^2

X étant une variable aléatoire de loi du χ^2 à n degrés de libertés et α un réel de $[0, 1]$, la table donne la valeur de

$$z_{n,\alpha} = F_{\chi_n^2}^{-1}(1 - \alpha) \text{ telle que } \mathbb{P}(X > z_{n,\alpha}) = \alpha .$$

En R, la commande correspondante est `qchisq(1-alpha, n)`.



$n \backslash \alpha$	0.995	0.990	0.975	0.95	0.9	0.8	0.7	0.5	0.3	0.2	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
1	0.00004	0.0002	0.001	0.004	0.02	0.06	0.15	0.46	1.07	1.64	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.80
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	0.45	0.71	1.39	2.41	3.22	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	13.82
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	1.01	1.42	2.37	3.66	4.64	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84	16.27
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	1.65	2.19	3.36	4.88	5.99	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	18.47
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	2.34	3.00	4.35	6.06	7.29	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	20.52
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	3.07	3.83	5.35	7.23	8.56	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	3.82	4.67	6.35	8.38	9.80	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	4.59	5.53	7.34	9.52	11.03	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95	26.12
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.38	6.39	8.34	10.66	12.24	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.18	7.27	9.34	11.78	13.44	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	6.99	8.15	10.34	12.90	14.63	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76	31.26
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	7.81	9.03	11.34	14.01	15.81	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	8.63	9.93	12.34	15.12	16.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	9.47	10.82	13.34	16.22	18.15	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	10.31	11.72	14.34	17.32	19.31	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.15	12.62	15.34	18.42	20.47	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	12.00	13.53	16.34	19.51	21.61	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	12.86	14.44	17.34	20.60	22.76	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	13.72	15.35	18.34	21.69	23.90	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	14.58	16.27	19.34	22.77	25.04	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	45.31
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	15.44	17.18	20.34	23.86	26.17	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	16.31	18.10	21.34	24.94	27.30	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	17.19	19.02	22.34	26.02	28.43	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	18.06	19.94	23.34	27.10	29.55	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56	51.18
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	18.94	20.87	24.34	28.17	30.68	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	19.82	21.79	25.34	29.25	31.79	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29	54.05
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	20.70	22.72	26.34	30.32	32.91	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64	55.48
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	21.59	23.65	27.34	31.39	34.03	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99	56.89
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	22.48	24.58	28.34	32.46	35.14	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34	58.30
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	23.36	25.51	29.34	33.53	36.25	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70

Pour $n > 30$, on admet que :

$$z_{n,\alpha} \approx \frac{1}{2} (u_{2\alpha} + \sqrt{2n-1})^2 \text{ si } \alpha < \frac{1}{2}$$

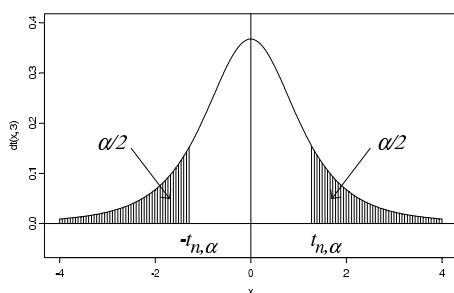
$$z_{n,\alpha} \approx \frac{1}{2} (\sqrt{2n-1} - u_{2(1-\alpha)})^2 \text{ si } \alpha \geq \frac{1}{2}$$

Table de la loi de Student

X étant une variable aléatoire de loi $St(n)$ et α un réel de $[0, 1]$, la table donne la valeur de

$$t_{n,\alpha} = F_{St(n)}^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \text{ telle que } \mathbb{P}(|X| > t_{n,\alpha}) = \alpha .$$

En R, la commande correspondante est `qt(1-alpha/2)`. Pour $n = +\infty$, $t_{+\infty,\alpha} = u_\alpha$.



$n \backslash \alpha$	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1	0.158	0.325	0.510	0.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.62
2	0.142	0.289	0.445	0.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.599
3	0.137	0.277	0.424	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	0.134	0.271	0.414	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.132	0.267	0.408	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	0.131	0.265	0.404	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.130	0.263	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	0.130	0.262	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.129	0.260	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.129	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.128	0.259	0.395	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.128	0.259	0.394	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.128	0.258	0.393	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.128	0.258	0.393	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.128	0.258	0.392	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.128	0.257	0.392	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.127	0.257	0.392	0.534	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.127	0.257	0.391	0.533	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.127	0.257	0.391	0.533	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.127	0.257	0.391	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.127	0.256	0.390	0.532	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.127	0.256	0.390	0.532	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.768
24	0.127	0.256	0.390	0.531	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.127	0.256	0.389	0.531	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	0.126	0.255	0.388	0.529	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
80	0.126	0.254	0.387	0.527	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.416
120	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
$+\infty$	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

Tables de la loi de Fisher-Snedecor

X étant une variable aléatoire de loi $F(\nu_1, \nu_2)$, les tables donnent les valeurs de

$$f_{\nu_1, \nu_2, \alpha} = F_{F(\nu_1, \nu_2)}^{-1}(1 - \alpha) \text{ telles que } \mathbb{P}(X > f_{\nu_1, \nu_2, \alpha}) = \alpha \text{ pour } \alpha = 5\% \text{ et } \alpha = 1\% .$$

En R, la commande correspondante est `qf(1-alpha, nu1, nu2)`. $f_{\nu_1, \nu_2, \alpha} = \frac{1}{f_{\nu_2, \nu_1, 1-\alpha}}$.

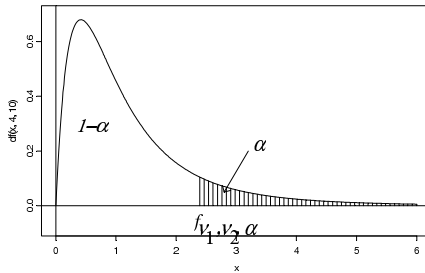


Table 1 : $\alpha = 5\%$

ν_1 ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	16	20	24	40	60	100	$+\infty$
1	161.5	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	241.9	243.9	246.5	248.0	249.1	251.1	252.2	253.0	254.2
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.47	19.48	19.49	19.49
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.79	8.74	8.69	8.66	8.64	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	5.96	5.91	5.84	5.80	5.77	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.74	4.68	4.60	4.56	4.53	4.46	4.43	4.41	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.06	4.00	3.92	3.87	3.84	3.77	3.74	3.71	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.64	3.57	3.49	3.44	3.41	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.35	3.28	3.20	3.15	3.12	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.14	3.07	2.99	2.94	2.90	2.83	2.79	2.76	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	2.98	2.91	2.83	2.77	2.74	2.66	2.62	2.59	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.85	2.79	2.70	2.65	2.61	2.53	2.49	2.46	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.75	2.69	2.60	2.54	2.51	2.43	2.38	2.35	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.67	2.60	2.51	2.46	2.42	2.34	2.30	2.26	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.60	2.53	2.44	2.39	2.35	2.27	2.22	2.19	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.54	2.48	2.38	2.33	2.29	2.20	2.16	2.12	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.49	2.42	2.33	2.28	2.24	2.15	2.11	2.07	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.45	2.38	2.29	2.23	2.19	2.10	2.06	2.02	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.41	2.34	2.25	2.19	2.15	2.06	2.02	1.98	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.38	2.31	2.21	2.16	2.11	2.03	1.98	1.94	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.35	2.28	2.18	2.12	2.08	1.99	1.95	1.91	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.32	2.25	2.16	2.10	2.05	1.96	1.92	1.88	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.30	2.23	2.13	2.07	2.03	1.94	1.89	1.85	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.27	2.20	2.11	2.05	2.01	1.91	1.86	1.82	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.25	2.18	2.09	2.03	1.98	1.89	1.84	1.80	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.24	2.16	2.07	2.01	1.96	1.87	1.82	1.78	1.71
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.16	2.09	1.99	1.93	1.89	1.79	1.74	1.70	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.08	2.00	1.90	1.84	1.79	1.69	1.64	1.59	1.51
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.03	1.95	1.85	1.78	1.74	1.63	1.58	1.52	1.44
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	1.99	1.92	1.82	1.75	1.70	1.59	1.53	1.48	1.39
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	1.95	1.88	1.77	1.70	1.65	1.54	1.48	1.43	1.32
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.93	1.85	1.75	1.68	1.63	1.52	1.45	1.39	1.28
$+\infty$	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.83	1.75	1.64	1.57	1.52	1.39	1.32	1.24	1.00

Tables de la loi de Fisher-Snedecor

Table 2 : $\alpha = 1\%$.

$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	16	20	24	40	60	100	$+\infty$
1	4052	4999	5403	5624	5764	5859	5928	5981	6056	6106	6170	6209	6235	6287	6313	6334	6368
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	34.1	30.9	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.2	27.1	26.8	26.7	26.6	26.4	26.3	26.2	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.6	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.6	13.5
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.0	9.89	9.68	9.55	9.47	9.29	9.20	9.13	9.02
6	13.8	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.87	7.72	7.52	7.40	7.31	7.14	7.06	6.99	6.88
7	12.3	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.62	6.47	6.28	6.16	6.07	5.91	5.82	5.75	5.65
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.81	5.67	5.48	5.36	5.28	5.12	5.03	4.96	4.86
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.26	5.11	4.92	4.81	4.73	4.57	4.48	4.41	4.31
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.85	4.71	4.52	4.41	4.33	4.17	4.08	4.01	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.54	4.40	4.21	4.10	4.02	3.86	3.78	3.71	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.30	4.16	3.97	3.86	3.78	3.62	3.54	3.47	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.10	3.96	3.78	3.66	3.59	3.43	3.34	3.27	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	3.94	3.80	3.62	3.51	3.43	3.27	3.18	3.11	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.80	3.67	3.49	3.37	3.29	3.13	3.05	2.98	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.69	3.55	3.37	3.26	3.18	3.02	2.93	2.86	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.59	3.46	3.27	3.16	3.08	2.92	2.83	2.76	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.51	3.37	3.19	3.08	3.00	2.84	2.75	2.68	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.43	3.30	3.12	3.00	2.92	2.76	2.67	2.60	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.37	3.23	3.05	2.94	2.86	2.69	2.61	2.54	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.31	3.17	2.99	2.88	2.80	2.64	2.55	2.48	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.26	3.12	2.94	2.83	2.75	2.58	2.50	2.42	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.21	3.07	2.89	2.78	2.70	2.54	2.45	2.37	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.17	3.03	2.85	2.74	2.66	2.49	2.40	2.33	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.13	2.99	2.81	2.70	2.62	2.45	2.36	2.29	2.17
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	2.98	2.84	2.66	2.55	2.47	2.30	2.21	2.13	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.80	2.66	2.48	2.37	2.29	2.11	2.02	1.94	1.80
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.70	2.56	2.38	2.27	2.18	2.01	1.91	1.82	1.68
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.63	2.50	2.31	2.20	2.12	1.94	1.84	1.75	1.60
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.55	2.42	2.23	2.12	2.03	1.85	1.75	1.65	1.49
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.50	2.37	2.19	2.07	1.98	1.80	1.69	1.60	1.43
$+\infty$	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.32	2.18	2.00	1.88	1.79	1.59	1.47	1.36	1.00