

Chapter 1

Géométrie différentielle

- 1 Généralités
- 2 Courbes paramétrées de \mathbb{R}^d
- 3 Géométrie différentielle des courbes planes
- 4 Géométrie différentielle des courbes gauches de l'espace

Représentation des courbes et surfaces

	Courbes	Surfaces de \mathbb{R}^3
Paramétrique	$f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ $t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} x_1 = f_1(t) \\ \dots \\ x_d = f_d(t) \end{pmatrix}$ $C = f([a, b])$ ordre sur la courbe tracé naturel de la courbe	$f : I \times J \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $(u, v) \mapsto f(u, v) = \begin{pmatrix} x = f_1(u, v) \\ y = f_2(u, v) \\ z = f_3(u, v) \end{pmatrix}$ $S = f(I \times J)$ ordre partiel sur la surface tracé naturel de la surface
Implicite	dans le plan : $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $C = \{(x, y), F(x, y) = 0\}$ ex : $x^2y - 2xy^3 - 3x^2 - 2 = 0$ pas d'ordre sur la courbe tracé difficile	dans l'espace : $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ $S = \{(x, y, z), F(x, y, z) = 0\}$ ex de la sphère : $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ pas d'ordre sur la surface tracé difficile
Explicite	$C =$ graphe d'une fonction : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ $C = \{(x, y), y = f(x)\}$ Passage au paramétrique : $t \mapsto (x = t, y = f(t))$ Passage à l'implicite : $y - f(x) = 0$	$S =$ graphe d'une fonction : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$ $S = \{(x, y, z), z = f(x, y)\}$ Passage au paramétrique : $(u, v) \mapsto (x = u, y = v, z = f(u, v))$ Passage à l'implicite : $z - f(x, y) = 0$

Etude locale des courbes planes paramétrées

On considère une courbe plane définie par la paramétrisation f de classe C^n

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Soit $t_0 \in]a, b[$ et p, q les deux plus petits entiers tels que

$$0 < p < q \quad \text{et} \quad \det(f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0)) \neq 0$$

ce qui signifie que

- $f^{(p)}(t_0) \neq 0$ et $f^{(q)}(t_0) \neq 0$
- les vecteurs $f^{(p)}(t_0)$ et $f^{(q)}(t_0)$ forment une base du plan \mathbb{R}^2

On écrit ensuite le développement de Taylor au voisinage du point t_0

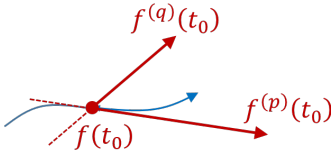
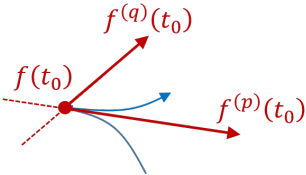
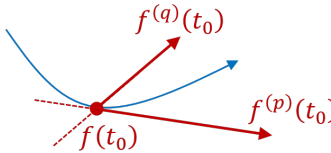
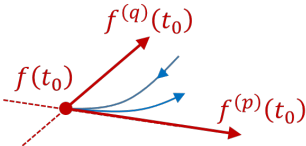
$$f(t) = f(t_0) + \frac{(t - t_0)^p}{p!} f^{(p)}(t_0) + \frac{(t - t_0)^q}{q!} f^{(q)}(t_0) + o((t - t_0)^q)$$

soit

$$\overrightarrow{f(t_0)f(t)} = \frac{(t - t_0)^p}{p!} f^{(p)}(t_0) + \frac{(t - t_0)^q}{q!} f^{(q)}(t_0) + o((t - t_0)^q)$$

ce qui permet de déduire le comportement local de la courbe au voisinage du point $f(t_0)$ selon la parité de p et de q

Etude locale des courbes planes paramétrées

	p impair	p pair
q impair	 <p>point d'inflexion</p>	 <p>point de rebroussement de 1ère espèce</p>
q pair	 <p>point « régulier »</p>	 <p>point de rebroussement de 2ème espèce</p>

$$\overrightarrow{f(t) - f(t_0)} = \frac{(t - t_0)^p}{p!} f^{(p)}(t_0) + \frac{(t - t_0)^q}{q!} f^{(q)}(t_0) + o((t - t_0)^q)$$

- 1 Généralités
- 2 Courbes paramétrées de \mathbb{R}^d
- 3 Géométrie différentielle des courbes planes
- 4 Géométrie différentielle des courbes gauches de l'espace

Changement de paramétrisation

- Une courbe paramétrée de classe C^k est définie par un couple (I, f)

$$f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d, \quad f \text{ de classe } C^k$$

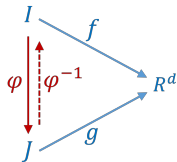
(I, f) est une paramétrisation de la courbe $f(I) \subset \mathbb{R}^d$

- Deux paramétrisations (I, f) et (J, g) de classe C^k sont équivalentes

s'il existe un C^k -difféomorphisme $\varphi : I \rightarrow J$

(φ est bijective, φ et φ^{-1} sont de classe C^k)

tel que $g = f \circ \varphi^{-1}$

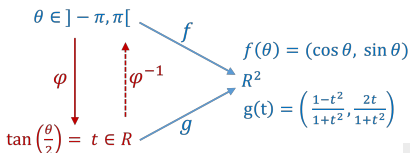


- Les deux paramétrisations (I, f) et (J, g) définissent la même courbe $f(I) = g(J)$
- Une courbe paramétrée de classe C^k est une classe d'équivalence pour la relation définie ci-dessus.
- Exemple

φ est bijective, φ et φ^{-1} sont dérivables.

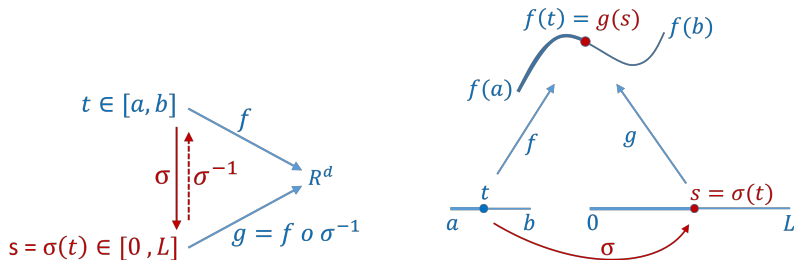
Il est préférable de vérifier que $f = g \circ \varphi$:

$$\begin{aligned} g\left(\tan \frac{\theta}{2}\right) &= \left(\frac{1 - \left(\tan \frac{\theta}{2}\right)^2}{1 + \left(\tan \frac{\theta}{2}\right)^2}, \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \left(\tan \frac{\theta}{2}\right)^2} \right) \\ &= (\cos \theta, \sin \theta) \end{aligned}$$



Paramétrisation normale

- Dorénavant on considère des paramétrisations $(I = [a, b], f)$
 - de classe au moins C^2 (et C^3 si besoin)
 - et telle que $f'(t) \neq 0, \forall t \in I$: la paramétrisation est alors dite **régulière**
- On considère le changement de paramétrisation suivant



avec

$$\sigma(t) = \int_a^t \|f'(u)\| du \quad \text{et} \quad L = \text{longueur de la courbe } f([a, b])$$

Nous vérifions ensuite que σ définit un changement de paramétrisation C^1 : σ bijective, σ et σ^{-1} de classe C^1

Paramétrisation normale

- σ est bijective

L'application $u \mapsto \|f'(u)\|$ est strictement positive car f est régulière.

$\sigma : t \mapsto \int_a^t \|f'(u)\| du$ est strictement croissante et donc bijective de $[a, b]$ dans $[0, L]$

- σ est dérivable

$\forall t \in [a, b], \sigma'(t) = \|f'(t)\|$

σ' est continue car f' et la norme le sont $\Rightarrow \sigma$ est de classe C^1

- Calcul de $\sigma^{-1}(s)$

$$\frac{d}{ds} \left(\underbrace{\sigma \circ \sigma^{-1}(s)}_{=s} \right) = \sigma'(\sigma^{-1}(s)) (\sigma^{-1})'(s) = 1$$

$$(\sigma^{-1})'(s) = \frac{1}{\sigma'(\sigma^{-1}(s))} = \frac{1}{\|f'(\sigma^{-1}(s))\|} = \frac{1}{\|f'(t)\|}$$

donc $(\sigma^{-1})'$ est continue $\Rightarrow \sigma^{-1}$ est de classe C^1

- On notera désormais $g = \boxed{f \circ \sigma^{-1} = \bar{f}}$

et on a obtenu :

$$\boxed{\sigma'(t) = \|f'(t)\|}$$

et

$$\boxed{(\sigma^{-1})'(s) = \frac{1}{\|f'(t)\|}}$$

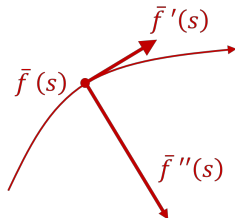
Paramétrisation normale

Notations

- $\bar{f} = f \circ \sigma^{-1}$ est appelée la paramétrisation **normale** de la courbe
- s est appelé l'abscisse **curviligne**

Proposition

1. $\forall s, \quad \|\bar{f}'(s)\| = 1$
2. $\forall s, \quad \bar{f}'(s) \perp \bar{f}''(s)$



Preuve de 1.

$$\bar{f} = f \circ \sigma^{-1}$$

$$\Rightarrow \bar{f}'(s) = \frac{d}{ds}(f \circ \sigma^{-1})(s) = f'(\sigma^{-1}(s)) \cdot (\sigma^{-1})'(s) = f'(\sigma^{-1}(s)) \frac{1}{\|f'(\sigma^{-1}(s))\|}$$

$$\Rightarrow \|\bar{f}'(s)\| = 1$$

Preuve de 2.

$$\|\bar{f}'(s)\|^2 = \langle \bar{f}'(s), \bar{f}'(s) \rangle = 1$$

$$\Rightarrow \text{on dérive : } \frac{d}{ds} \langle \bar{f}'(s), \bar{f}'(s) \rangle = 2 \langle \bar{f}'(s), \bar{f}''(s) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \bar{f}'(s) \perp \bar{f}''(s)$$

- 1 Généralités
- 2 Courbes paramétrées de \mathbb{R}^d
- 3 Géométrie différentielle des courbes planes**
- 4 Géométrie différentielle des courbes gauches de l'espace

Repère de Serret-Frenet

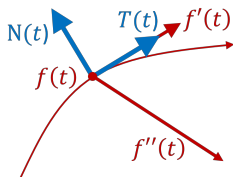
- **Cas d'une paramétrisation quelconque**

$f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto f(t)$
courbe plane régulière C^2

$T(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$: vecteur tangent

$N(t) = \text{Rot}_{\pi/2}(T(t))$: vecteur normal

$(f(t), T(t), N(t))$ définit un repère orthonormé de sens direct : le **repère mobile de Serret-Frenet**

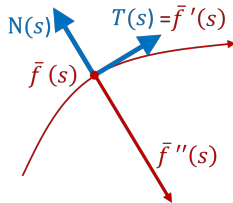


- **Cas d'une paramétrisation normale**

$\bar{f} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $s \mapsto \bar{f}(s)$

$T(s) = \bar{f}'(s)$: vecteur tangent

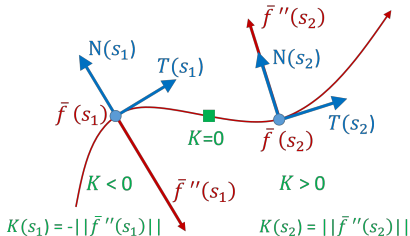
$N(s) = \text{Rot}_{\pi/2}(T(s))$: vecteur normal



Courbure

- Cas d'une paramétrisation normale**

Courbure en $\bar{f}(s)$: $K(s) = \langle \bar{f}''(s), N(s) \rangle = \pm \|\bar{f}''(s)\|$



- Cas d'une paramétrisation quelconque**

Courbure en $f(t)$: $K(t) = \frac{\det(f'(t), f''(t))}{\|f'(t)\|^3}$

- Cas d'une courbe explicite**

$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto y = \varphi(x)$ paramétré par $t \mapsto f(t) = (t, \varphi(t))$

Courbure au point d'abscisse t : $K(t) = \frac{\varphi''(t)}{[1 + \varphi'(t)^2]^{3/2}}$

Courbure

On montre que la courbure pour une paramétrisation quelconque f s'écrit

$$K(t) = \frac{\det \left(f'(t), f''(t) \right)}{\|f'(t)\|^3}$$

- Par définition, on a

$$K(s) = \langle \bar{f}''(s), N(s) \rangle$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{f}''(s) &= \frac{d}{ds} \bar{f}'(s) = \frac{d}{ds} \left(f'(\sigma^{-1}(s)) \cdot (\sigma^{-1})'(s) \right) \\ &= f''(\sigma^{-1}(s)) \cdot \left[(\sigma^{-1})'(s) \right]^2 + \underbrace{f'(\sigma^{-1}(s)) \cdot (\sigma^{-1})''(s)}_{\perp N(s)} \end{aligned}$$

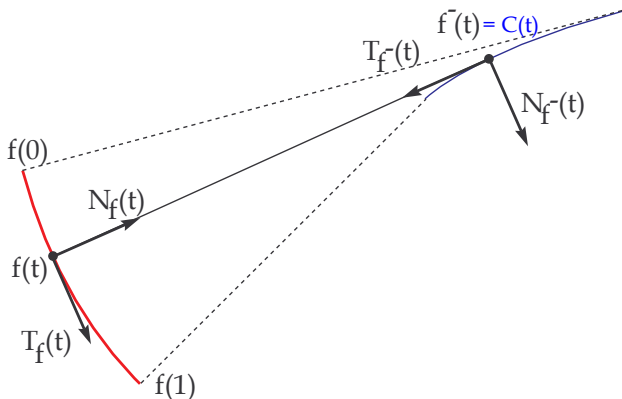
- Ainsi

$$\begin{aligned} K(s) &= \langle f''(\sigma^{-1}(s)) \cdot \left((\sigma^{-1})'(s) \right)^2, N(s) \rangle \\ &= \frac{1}{\|f'(\sigma^{-1}(s))\|^2} \langle f''(\sigma^{-1}(s)), N(\sigma^{-1}(s)) \rangle \\ &= \frac{1}{\|f'(\sigma^{-1}(s))\|^2} \langle f''(\sigma^{-1}(s)), \frac{1}{\|f'(\sigma^{-1}(s))\|} \begin{pmatrix} -f'_y(\sigma^{-1}(s)) \\ f'_x(\sigma^{-1}(s)) \end{pmatrix} \rangle = \frac{1}{\|f'(\sigma^{-1}(s))\|^3} \det \left(f'(\sigma^{-1}(s)), f''(\sigma^{-1}(s)) \right) \end{aligned}$$

Cercle osculateur et centre de courbure

En tout point $f(t)$ tel que $K(t) \neq 0$ on définit :

- $\rho(t) = \frac{1}{K(t)}$ est le **rayon de courbure** en $f(t)$
- $C(t) = f(t) + \rho(t)N(t)$ est le **centre de courbure** en $f(t)$
- Le lieu des centres de courbure est la **courbe développée** de f (evolute en anglais)
- Le cercle de centre $C(t)$ et de rayon $\rho(t)$ est le **cercle osculateur** en $f(t)$



Formules de Serret-Frenet

Il s'agit ici d'étudier les variations du repère de Serret-Frenet en fonction du paramètre s ou t

- **Cas d'une paramétrisation normale**

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & K(s) \\ -K(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \end{pmatrix}$$

En effet :

- $\frac{d}{ds} T(s) = \bar{f}''(s) = \langle \bar{f}''(s), N(s) \rangle \frac{\bar{f}''(s)}{\langle \bar{f}''(s), N(s) \rangle} = K(s) N(s)$

- $\frac{d}{ds} N(s) = \alpha T(s)$ car $\frac{d}{ds} N(s) \perp N(s)$

avec $\alpha = \langle \frac{d}{ds} N(s), T(s) \rangle$

Or $\frac{d}{ds} \langle N(s), T(s) \rangle = \langle \frac{d}{ds} N(s), T(s) \rangle + \langle N(s), \frac{d}{ds} T(s) \rangle = 0$

$\Rightarrow \alpha = -\langle N(s), \frac{d}{ds} T(s) \rangle = -\langle \bar{f}''(s), N(s) \rangle = -K(s)$

- **Cas d'une paramétrisation quelconque**

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} T(t) \\ N(t) \end{pmatrix} = \|f'(t)\| \begin{pmatrix} 0 & K(t) \\ -K(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(t) \\ N(t) \end{pmatrix}$$

Formules de Serret-Frenet

Preuve de la formule de Serret-Frenet en paramétrisation quelconque

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} T(t) \\ N(t) \end{pmatrix} = \|f'(t)\| \begin{pmatrix} 0 & K(t) \\ -K(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(t) \\ N(t) \end{pmatrix}$$

- $T(t)$ unitaire $\Rightarrow T'(t) \perp T(t) \Rightarrow T'(t) = \lambda N(t)$
avec

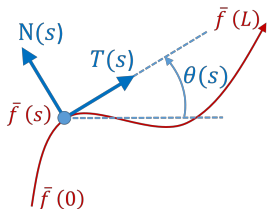
$$\begin{aligned} \lambda &= \langle T'(t), N(t) \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}, N(t) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{\|f'(t)\|} f''(t) + \underbrace{\left(\frac{1}{\|f'(t)\|} \right)' f'(t)}_{\perp N(t)}, N(t) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|f'(t)\|} \left\langle f''(t), \frac{1}{\|f'(t)\|} \begin{pmatrix} -f'_y(t) \\ f'_x(t) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \|f'(t)\| \underbrace{\frac{\det(f'(t), f''(t))}{\|f'(t)\|^3}}_{K(t)} \end{aligned}$$

- Le raisonnement est similaire pour $N'(t) = -\|f'(t)\| K(t) T(t)$

Variation angulaire et courbure totale

On considère une paramétrisation normale $\bar{f} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 et on identifie le plan \mathbb{R}^2 avec le plan complexe.

$T(s)$ unitaire $\Rightarrow T(s) = e^{i\theta(s)}$
où θ est continue C^1 , avec $\theta(0) \in [0, 2\pi[$



Alors

- $\bullet \theta'(s) = K(s)$

La variation angulaire du vecteur tangent définit la courbure

- $\bullet K_T(f) = \int_0^L K(s) ds = \theta(L) - \theta(0)$

La **courbure totale** (intégrale de la courbure sur la courbe) ne dépend que des angles du vecteur tangent aux extrémités de la courbe

En effet

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} T(s) &= \frac{d}{ds} (e^{i\theta(s)}) = i\theta'(s) e^{i\theta(s)} = \theta'(s) e^{i(\theta(s)+\pi/2)} = \theta'(s) N(s) \\ &= K(s) N(s) \quad \text{d'après les formules de Serret-Frenet} \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat par identification.

La deuxième propriété est claire.

- 1 Généralités
- 2 Courbes paramétrées de \mathbb{R}^d
- 3 Géométrie différentielle des courbes planes
- 4 Géométrie différentielle des courbes gauches de l'espace**

Trièdre de Serret-Frenet

- Cas d'une paramétrisation normale

$\bar{f} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad s \mapsto \bar{f}(s)$
 courbe 3D (gauche) régulière C^3

$T(s) = \bar{f}'(s)$: vecteur tangent

$N(s) = \frac{\bar{f}''(s)}{\|\bar{f}''(s)\|}$: vecteur normal

$B(s) = T(s) \times N(s)$: vecteur binormal

$(\bar{f}(s), T(s), N(s), B(s))$: trièdre mobile de Serret-Frenet (orthonormé de sens direct)

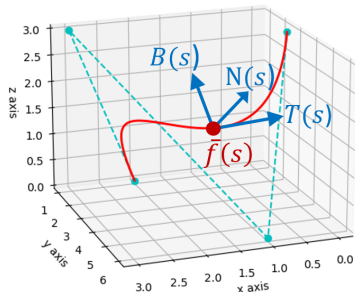
- Cas d'une paramétrisation quelconque

$f : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto f(t)$ courbe 3D (gauche) régulière C^3

$T(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$: vecteur tangent

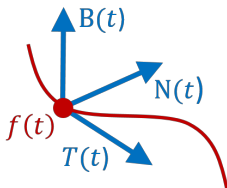
$N(t)$: vecteur normal obtenu par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à partir des vecteurs $T(t)$ et $f''(t)$.

$B(s) = T(s) \times N(s)$: vecteur binormal



Plans remarquables

- Vect $[f(t), T(t), N(t)]$: plan osculateur
- Vect $[f(t), N(t), B(t)]$: plan normal
- Vect $[f(t), T(t), B(t)]$: plan rectifiant



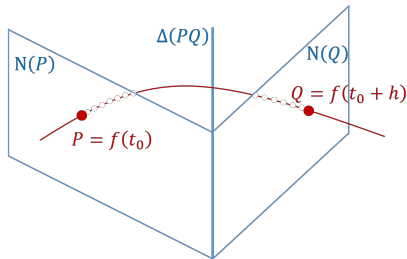
Axe polaire

$N(P)$ et $N(Q)$: plans normaux en 2 points proches de la courbe 3D

Dans le cas général ces 2 plans se coupent selon une droite $\Delta(PQ)$

On fait tendre Q vers P : dans le cas général $\Delta(PQ)$ tend vers une droite appelée **l'axe polaire**

L'axe polaire est perpendiculaire au plan osculateur en un point appelé **centre de courbure**



Courbure

- **Cas d'une paramétrisation normale**

Courbure en $\bar{f}(s)$: $K(s) = \|\bar{f}''(s)\|$ $\bar{f}''(s)$ est appelé le **vecteur courbure**

La courbure n'est donc pas signée

- **Cas d'une paramétrisation quelconque**

Courbure en $f(t)$: $K(t) = \frac{\|f'(t) \times f''(t)\|}{\|f'(t)\|^3}$

Preuve

$$\bar{f}'(s) = f'(\sigma^{-1}(s)) \cdot (\sigma^{-1})'(s)$$

$$\bar{f}''(s) = f''(\sigma^{-1}(s)) \cdot [(\sigma^{-1})'(s)]^2 + \underbrace{f'(\sigma^{-1}(s)) \cdot (\sigma^{-1})''(s)}_{\text{colinéaire à } f'}$$

$K(s) = \|\bar{f}''(s)\| = \|\bar{f}'(s) \times \bar{f}''(s)\|$ car $\|\bar{f}'\| = 1$ et $\bar{f}' \perp \bar{f}''$
 donc

$$\begin{aligned} K(s) &= \|f'(\sigma^{-1}(s)) \cdot (\sigma^{-1})'(s) \times f''(\sigma^{-1}(s)) \cdot [(\sigma^{-1})'(s)]^2\| \\ &= \frac{1}{\|f'(\sigma^{-1}(s))\|^3} \|f'(\sigma^{-1}(s)) \times f''(\sigma^{-1}(s))\| \end{aligned}$$

soit $K(\sigma(t)) = \frac{1}{\|f'(t)\|^3} \|f'(t) \times f''(t)\|$

Torsion

La torsion $\tau(s)$ mesure le défaut planéité d'une courbe gauche au point $\bar{f}(s)$ par les variations du vecteur binormal $B(s)$

- Première définition : $\tau(s) = \pm \left\| \frac{d}{ds} B(s) \right\|$

- Montrons que $\frac{d}{ds} B(s)$ est colinéaire à $N(s)$

- ◇ $B(s)$ unitaire $\Rightarrow \frac{d}{ds} B(s) \perp B(s)$

- ◇ $B(s) \perp T(s) \Rightarrow \frac{d}{ds} \langle B(s), T(s) \rangle = \left\langle \frac{d}{ds} B(s), T(s) \right\rangle + \underbrace{\left\langle B(s), \frac{d}{ds} T(s) \right\rangle}_{= 0 \text{ car } B(s) \perp \bar{f}''(s)} = 0$

et donc $\left\langle \frac{d}{ds} B(s), T(s) \right\rangle = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds} B(s) \perp T(s)$

- ◇ Ce qui prouve que $\frac{d}{ds} B(s)$ est colinéaire à $N(s)$

- Définition de la torsion : $\tau(s) = - \left\langle \frac{d}{ds} B(s), N(s) \right\rangle$

et donc $\frac{d}{ds} B(s) = -\tau(s) N(s)$

Torsion

Expression analytique de la torsion :

- en paramétrisation normale :
$$\tau(s) = \frac{\langle \bar{f}'(s) \times \bar{f}''(s), \bar{f}'''(s) \rangle}{\|\bar{f}''(s)\|^2}$$

Preuve

$$\begin{aligned} \tau(s) &= - \left\langle \frac{d}{ds} B(s), N(s) \right\rangle \\ &= \left\langle B(s), \frac{d}{ds} N(s) \right\rangle \\ &= \left\langle \bar{f}'(s) \times \frac{\bar{f}''(s)}{\|\bar{f}''(s)\|}, \frac{\bar{f}'''(s)}{\|\bar{f}''(s)\|} + \underbrace{\bar{f}''(s) \frac{d}{ds} \frac{1}{\|\bar{f}''(s)\|}}_{\perp B(s)} \right\rangle \\ &= \frac{\langle \bar{f}'(s) \times \bar{f}''(s), \bar{f}'''(s) \rangle}{\|\bar{f}''(s)\|^2} \end{aligned}$$

- en paramétrisation quelconque :
$$\tau(t) = \frac{\langle f'(t) \times f''(t), f'''(t) \rangle}{\|f'(t) \times f''(t)\|^2}$$

On admet le résultat [il faut remplacer \bar{f} par $f \circ \sigma^{-1}$, calculer les dérivées jusqu'à l'ordre 3, et substituer]

Formules de Serret-Frenet

Il s'agit ici d'étudier les variations du trièdre de Serret-Frenet en fonction du paramètre s

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & K(s) & 0 \\ -K(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix}$$

Preuve

- ligne 1

$$\frac{d}{ds} T(s) = \bar{f}''(s) = \frac{\|\bar{f}''(s)\|}{\|\bar{f}''(s)\|} \bar{f}''(s) = K(s) N(s)$$

- ligne 2

$$\frac{d}{ds} N(s) = a T(s) + b B(s) \quad \text{car } N(s) \text{ unitaire}$$

$$a = \left\langle \frac{d}{ds} N(s), T(s) \right\rangle = -\left\langle N(s), \frac{d}{ds} T(s) \right\rangle = -\left\langle N(s), \bar{f}''(s) \right\rangle = -K(s)$$

$$b = \left\langle \frac{d}{ds} N(s), B(s) \right\rangle = -\left\langle N(s), \frac{d}{ds} B(s) \right\rangle = \tau(s)$$

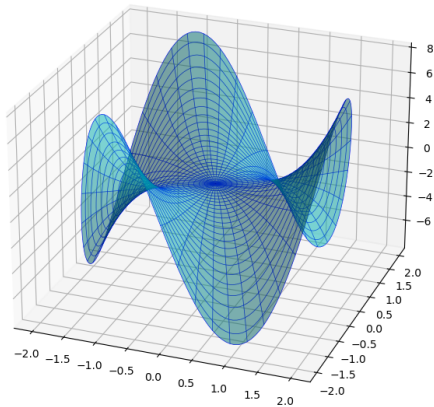
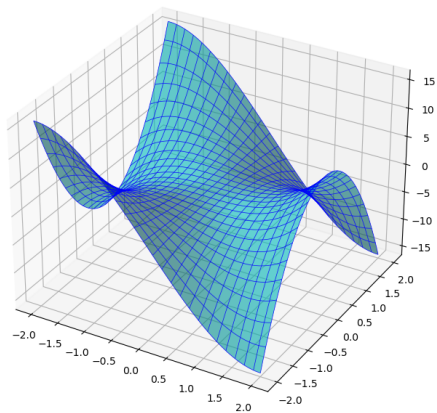
- ligne 3

$$\text{Par définition de la torsion on a } \frac{d}{ds} B(s) = -\tau(s) N(s)$$

-
- 1 Généralités
 - 2 Courbes paramétrées de \mathbb{R}^d
 - 3 Géométrie différentielle des courbes planes
 - 4 Géométrie différentielle des courbes gauches de l'espace

Suite ...

Etude des surfaces
essentiellement basée sur l'étude des courbes gauches tracées sur la surface



Même surface avec deux paramétrisations différentes