

Ondes non linéaires dans des chaînes granulaires : influence d'un défaut

Effectué par : Marc Chandelier.
Encadré par : Guillaume James.

Mai-Juin 2012

Remerciement

Je tiens avant tout à remercier Guillaume James de m'avoir accepté en tant que stagiaire. Je lui suis très reconnaissant du temps qu'il m'a accordé tout au long du stage pour m'expliquer différents aspects théoriques et m'aider à résoudre quelques problèmes.

Environnement de travail

Le stage a lieu au **Laboratoire Jean Kuntzmann** (laboratoire de mathématiques appliquées et d'informatique) dans l'équipe CASYS (Calculs Algébriques et Systèmes Dynamiques) et est encadré par Guillaume James. Le travail effectué est principalement constitué d'expérimentations numériques se déroulant sous l'environnement MATLAB.

1 Position du problème

L'étude des ondes dans des milieux granulaires fait l'objet de recherches intensives, autant d'un point de vue théorique qu'expérimental, par exemple pour la conception d'absorbeurs de chocs [4], ou de systèmes comparables à des lentilles ou des diodes pour les ondes acoustiques [8, 1]. Cela provient du fait que les milieux granulaires présentent un comportement fortement non linéaire, dû en partie aux interactions entre les grains. Ces interactions peuvent être modélisées par la théorie du contact de Hertz : la force de répulsion entre deux billes sphériques initialement tangentes et légèrement compressées de $\delta \approx 0$ est $f(\delta) = \gamma\delta^{\frac{3}{2}}$ où γ dépend des rayons des billes et de leur matériau. Du fait du caractère non linéaire de la force plusieurs types d'ondes localisées peuvent être générés dans une chaîne de billes en contact, parmi lesquels on trouve :

- les *solitons* [7], des ondes progressives spatialement localisées et pouvant se propager sans dispersion, sont le type le plus étudié. Elles apparaissent dans des chaînes granulaires par exemple à la suite d'un impact en bout de chaîne.
- Les *breathers* (statiques ou propagatifs) [2], des ondes spatialement localisées et périodiques en temps (dans un repère fixe ou en translation uniforme), font l'ob-

jet d'études plus récentes. On les trouve dans des chaînes granulaires où chaque grain est soumis à un potentiel local, on peut également les observer transitoirement en l'absence de potentiels locaux dans des chaînes non précompressées. Ce caractère transitoire est dû à l'unilatéralité du contact de Hertz (pas de force quand les billes ne sont pas en contact).

Nous nous sommes intéressés au cas d'une chaîne de billes couplées par le potentiel de Hertz, chacune étant soumise à un potentiel local harmonique. Ce système est décrit par l'hamiltonien :

$$\mathcal{H} = \sum_n \frac{m}{2} \dot{x}_n^2 + \frac{k}{2} x_n^2 + \frac{2}{5} \gamma (x_n - x_{n+1})_+^{\frac{5}{2}}, \quad (1)$$

où x_n est le déplacement d'une bille par rapport à l'équilibre, γ est la raideur des forces de Hertz, k la raideur du potentiel local et $(\cdot)_+ = \max(\cdot, 0)$.

Un tel système peut correspondre expérimentalement à un pendule de Newton (dans le cas de petites oscillations), mais l'article [6] a montré que pour observer des solutions de types breathers la période d'oscillation locale doit être plus petite que le temps de collision. Cela n'est pas expérimentalement concevable dans le cas du pendule de Newton, c'est pourquoi les auteurs ont imaginé un autre système physique présenté sur la figure 1, dans lequel les pendules sont remplacés par des plaques minces encastrées beaucoup plus rigides.

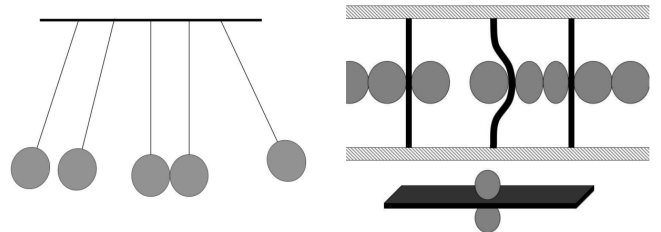


FIGURE 1 – A gauche : pendule de Newton. A droite : chaîne de plaques en porte-à-faux décorées par des billes sphériques. Dans ce cas chaque oscillateur de (1) décrit le déplacement d'un ensemble {plaque + 2 billes}, et m correspond à une masse effective (figure tirée de [6]).

Dans un tel système, un impact en bout de chaîne génère un breather propagatif lorsque la vitesse d'impact n'est pas trop importante (la dynamique est donc différente de celle observée en l'absence de potentiels locaux, qui donne lieu à la propagation d'un soliton [7]). Alors que les propriétés des breathers sont relativement bien comprises d'un point de vue théorique [2], leur interaction avec des défauts du réseau (par exemple des billes de rayons variables) pose des problèmes encore largement ouverts et importants pour les applications [4].

Le but de ce stage est donc d'observer l'interaction d'un breather avec un défaut et de tenter d'en comprendre certains aspects. Pour cela nous commencerons par voir comment générer un breather dans le système (1). Puis nous écrirons les équations correspondant à l'ajout d'un défaut dans la chaîne. Nous utiliserons alors celles-ci afin d'observer les interactions breather-défaut, et dans une dernière partie nous tenterons d'analyser les résultats obtenus.

2 Breather propagatif généré par un impact

En posant $x_n(t) = \xi y_n \left(\frac{t}{\tau_c} \right)$ avec $\xi = \left(\frac{k}{\gamma} \right)^2$ et $\tau_c = \sqrt{\frac{m}{k}}$, l'hamiltonien (1) donne les équations du mouvement adimensionnelles suivantes :

$$\ddot{y}_n + y_n = (y_{n-1} - y_n)_+^{\frac{3}{2}} - (y_n - y_{n+1})_+^{\frac{3}{2}}. \quad (2)$$

Dans toute la suite on dimensionnera les quantités numériques avec des paramètres physique correspondant à des billes en téflon d'un rayon de $R = 2.28$ mm et des plaques en acier inoxydable d'une dimension de $25 \times 5 \times 1$ mm³. Cela conduit à $\xi \approx 0.538$ mm, $\tau_c \approx 25.2$ μ s, $m \approx 0.628$ g, $k \approx 9.88 \times 10^5$ N·m⁻¹ et $\gamma \approx 4.26 \times 10^7$ N·m^{- $\frac{3}{2}$} .

En intégrant numériquement (2) avec les conditions initiales $x_n(0) = 0$, $\dot{x}_n(0) = V\delta_{n,1}$ (δ_{ij} est le symbole de Kronecker), un breather est généré dans la chaîne, comme on peut le voir sur le figure 2. Les caractéristiques du breather (vitesse, fréquence interne, amplitude) dépendent de la vitesse V de l'impact.

Une quantité intéressante à visualiser est la densité d'énergie (énergie par oscillateur) définie par :

$$e_n = \frac{1}{2}m\dot{x}_n^2 + \frac{1}{2}kx_n^2 + \frac{1}{5}\gamma(x_{n-1} - x_n)_+^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{5}\gamma(x_n - x_{n+1})_+^{\frac{5}{2}}.$$

On peut voir sur le diagramme spatiotemporel de la figure 3 que la vitesse du breather reste pratiquement constante.

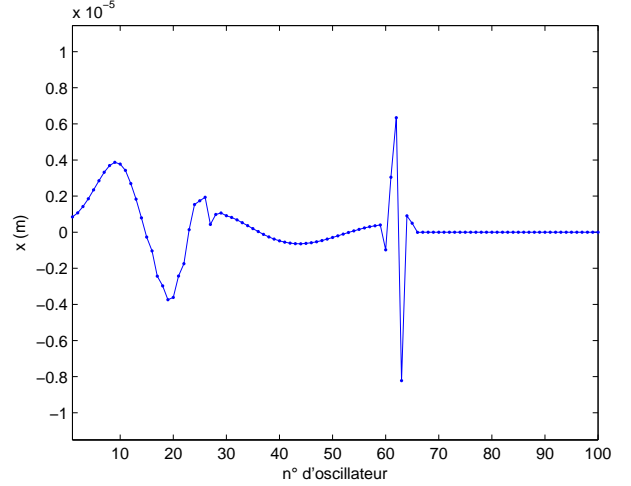


FIGURE 2 – Déplacement des oscillateurs 3 ms après l'impact de la bille de gauche à la vitesse de $V = 1$ m·s⁻¹. Le profil d'un breather est visible au voisinage de $n = 60$.

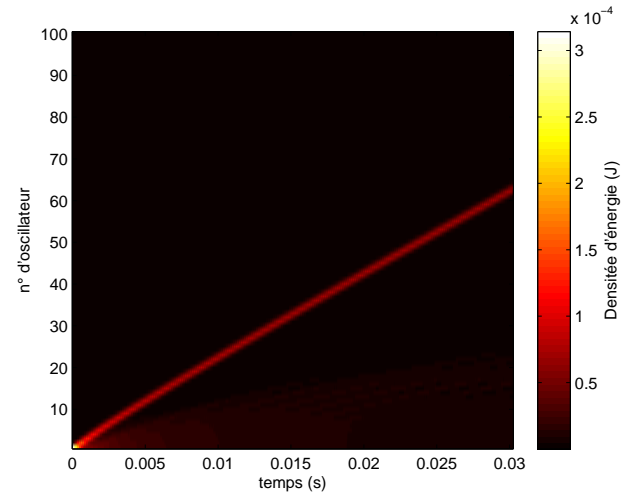


FIGURE 3 – Diagramme spatiotemporel de la densité d'énergie.

3 Ajout d'un défaut dans la chaîne

3.1 Nouvelles équations

On se place maintenant dans une situation plus générale où les billes peuvent avoir des rayons (et donc des masses) différentes. On note $R_n = R\tilde{R}_n$ le rayon des deux billes de la $n^{\text{ième}}$ plaque (voir figure 1), R étant le rayon de référence et \tilde{R} un nombre adimensionnel. L'hamiltonien du système s'écrit alors :

$$\mathcal{H} = \sum_n \frac{m_n}{2} \dot{x}_n^2 + \frac{k}{2} x_n^2 + \frac{2}{5} \gamma_n (x_n - x_{n+1})_+^{\frac{5}{2}}, \quad (3)$$

où $\gamma_n = \gamma \eta_n$ est la raideur des forces de Hertz entre deux billes sur les plaques n et $n + 1$, γ étant la raideur pour

une bille de rayon R et $\eta_n = \left(\frac{2\tilde{R}_n\tilde{R}_{n+1}}{\tilde{R}_n + \tilde{R}_{n+1}} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Les équations du mouvement adimensionnelles découlant de l'hamiltonien (3) sont :

$$\mu_n \ddot{y}_n + y_n = \eta_{n-1} (y_{n-1} - y_n)^{\frac{3}{2}}_+ - \eta_n (y_n - y_{n+1})^{\frac{3}{2}}_+, \quad (4)$$

où $\mu_n = \frac{m_n}{m}$.

3.2 Interaction breather-défaut

On considère ici une chaîne de billes ayant toutes un rayon R (i.e. $\tilde{R}_n = 1$), sauf au milieu de la chaîne où l'on va introduire un défaut en faisant varier le rayon des deux billes d'une plaque. L'impact initial de la première bille va générer un breather se dirigeant vers le défaut jusqu'à interagir avec lui. On observe ainsi, en fonction du rayon R_d du défaut et des caractéristiques du breather, une réflexion et transmission plus ou moins importante du breather. Celles-ci s'accompagnent d'un piégeage plus ou moins fort d'énergie au niveau du défaut se présentant sous la forme d'un breather centré sur celui-ci, oscillant légèrement autour de sa position (voir figure 4). On appelle cette structure un mode de défaut dans le cas d'oscillations périodiques.

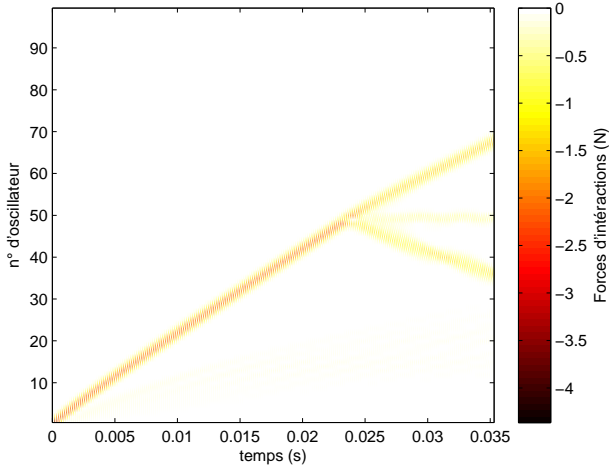


FIGURE 4 – Diagramme spatiotemporel montrant les forces d'interactions $f_n = -\gamma_n(x_n - x_{n+1})^{\frac{3}{2}}_+$ pour un défaut de rayon $\tilde{R}_d = 0.93$ ($\mu_d \approx 0.92$) à la position $n = 50$ et une vitesse d'impact de $V = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. On observe une réflexion partielle avec un breather piégé au niveau du défaut.

Pour tenter de comprendre l'influence des paramètres sur l'interaction breather-défaut nous avons calculé l'énergie du défaut et des oscillateurs situés avant et après celui-ci, pour différentes tailles de défaut, à des vitesses d'impacts données (voir un exemple sur la figure 5).

On observe sur la figure 5 des pics d'absorption ($\tilde{R}_d \approx 0.93$) et de transmission ($\tilde{R}_d = 1$, i.e. en absence de défaut). Plus la vitesse d'impact augmente et plus les pics s'élargissent avec une brisure de leur symétrie pour des grandes

vitesses ($> 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, données non fournies). Le pic d'absorption se situe toujours du côté des rayons $\tilde{R}_d < 1$ et se décale vers les rayons plus petits quand la vitesse d'impact augmente.

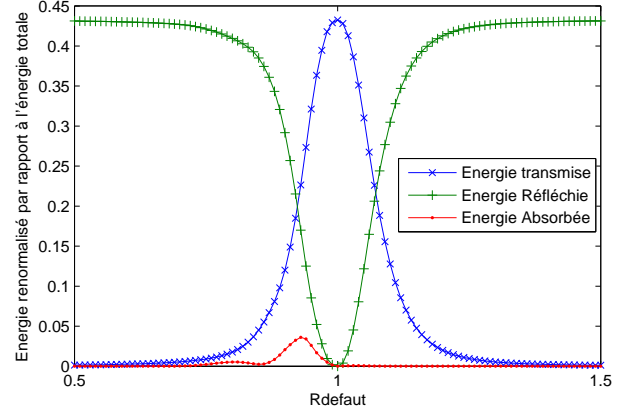


FIGURE 5 – Energies réfléchie, transmise et absorbée par le défaut (renormalisées par rapport à l'énergie totale), pour une vitesse d'impact de $V = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. La somme des trois énergies est inférieure à 1 car de l'énergie reste confinée en début de chaîne après impact (voir figure 2).

3.3 Calcul de modes de défaut

Pour analyser les résultats de la section précédente, il est utile d'étudier les modes localisés (de type breather) induits par le défaut, appelés modes de défaut. En effet, pour essayer de comprendre la localisation du pic d'absorption, il semble intéressant de calculer la fréquence des modes de défaut en fonction de leurs amplitudes. Pour cela nous avons adapté la méthode développée dans l'article [5]. Cette méthode consiste à dériver une équation d'amplitude simplifiée à partir des équations du mouvement, permettant ainsi d'obtenir des solutions approchées pour de faibles valeurs de l'amplitude et du défaut.

On pose $\mu_n = 1 + \delta m \delta_{n0}$, où le défaut de masse s'écrit $\delta m = \epsilon^{1/2} \sigma$, ϵ étant un petit paramètre et $\sigma = \pm 1$.

On cherche maintenant une famille de solutions de (4) de petites amplitudes correspondant à des oscillations quasiment harmoniques à l'échelle du temps rapide t , mais modulées non linéairement sur une échelle de temps lente $\tau = \epsilon^{\frac{1}{2}} t$:

$$y_n(t) \approx \epsilon (A_n(\tau) e^{it} + \bar{A}_n(\tau) e^{-it}). \quad (5)$$

En injectant (5) dans (4) et en identifiant les termes d'ordre $\epsilon^{\frac{3}{2}} e^{it}$ on obtient une équation portant sur l'amplitude complexe A_n :

$$\tau_0 \left(2i \frac{\partial A_n}{\partial \tau} - \sigma \delta_{n0} A_n \right) = (A_{n+1} - A_n) |A_{n+1} - A_n|^{\frac{1}{2}} - (A_n - A_{n-1}) |A_n - A_{n-1}|^{\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

où $\tau_0 \approx 1.545$. On cherche alors des solutions périodiques

de (6) de la forme

$$A_n(\tau) = a_n \lambda e^{i \frac{\tau \lambda^{\frac{1}{2}} s}{2\tau_0}} \text{ avec } \lambda > 0 \text{ et } s = \pm 1. \quad (7)$$

La solution approchée de (4) déduite de (5) est donc de la forme :

$$y_n(t) \approx \mu^2 a_n \cos(\omega t) \quad (8)$$

où $\mu = \sqrt{2\epsilon\lambda}$ et $\omega = 1 + 2^{-\frac{3}{2}} \frac{s\mu}{\tau_0}$ est la fréquence des oscillations.

De plus, l'équation (6) devient

$$-s a_n - \tau_0 \frac{\delta m}{\mu} \sqrt{2} \delta_{n0} a_n = (a_{n+1} - a_n) |a_{n+1} - a_n|^{\frac{1}{2}} - (a_n - a_{n-1}) |a_n - a_{n-1}|^{\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

L'équation (9) dépend des paramètres δm (défaut de masse), $s = \text{sgn}(\omega - 1)$ et $\mu = 2^{\frac{3}{2}} \tau_0 |\omega - 1|$ (ces deux derniers paramètres fixent l'écart entre la fréquence des modes localisés non linéaires (8) et celle des oscillateurs linéaires locaux).

On cherche alors des solutions de (9), telles que $a_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \pm\infty$ et dont a_n est maximum au voisinage du défaut, i.e des solutions qui correspondent aux modes de défaut observés après l'interaction breather-défaut. Pour cela on résout numériquement (9) par la méthode de Newton en utilisant des conditions initiales du type $a_{N/2} = -a$ ($N/2$ étant la position du défaut pour une chaîne de N oscillateurs) et $a_n = 0$ partout ailleurs.

- Pour $\omega < 1$ (i.e. pour un mode de défaut ayant une fréquence inférieure à la fréquence linéaire) on trouve des solutions de l'équation (9) seulement dans le cas $\delta m > 0$ (i.e. $R_d > R$), mais leurs profils ne correspondent pas aux modes excités par les breathers puisque les oscillateurs vibrent en phase.
- Pour $\omega > 1$, on trouve des solutions pour des défauts de masses δm positifs ou négatifs. Dans ces solutions les oscillateurs voisins vibrent en opposition de phase mais ces solutions sont légèrement différentes des modes excités par les breathers.

Une méthode permettant de vérifier la validité de ces solutions approchées, appelée méthode de relaxation, consiste à considérer une chaîne de N billes avec un défaut placé au milieu à la position $N/2$, et à intégrer les équations du mouvement (4) en prenant des conditions initiales du type $x_n(0) = a \delta_{n, N/2}$ et $\dot{x}_n(0) = 0$. Une partie de l'énergie, correspondant au mode à calculer va rester sur le défaut. L'autre partie va se disperser sous forme de breathers propagatifs jusqu'à atteindre les deux bouts de la chaîne et va être ainsi réfléchi vers le défaut. Pour éviter cela une astuce consiste à ajouter un terme dissipatif sur les oscillateurs en bout de chaîne afin d'éviter que l'énergie dispersée par le défaut ne revienne vers celui-ci. Quand le défaut a fini de disperser de l'énergie, on obtient alors une solution stable localisée sur celui-ci.

- Dans le cas $\omega < 1$, les solutions obtenues sont en très bon accord avec celles obtenues précédemment, comme on peut le voir sur la figure 6.
- Dans le cas $\omega > 1$, la méthode de relaxation ne fournit des solutions que pour $\delta m < 0$. Ces solutions ont

les mêmes profils que ceux des modes excités par les breathers. Elles ne sont donc pas en bon accord avec les solutions précédemment trouvées.

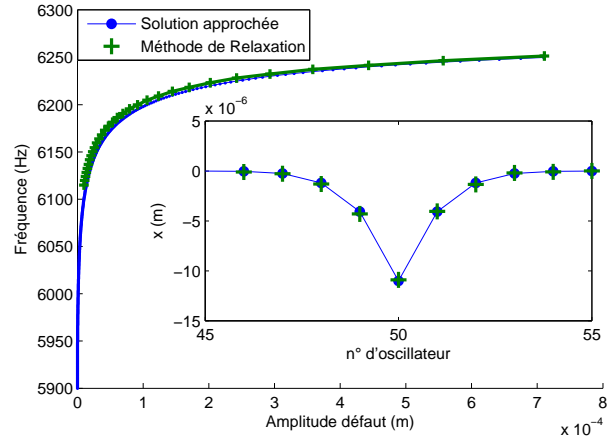


FIGURE 6 – Fréquence du mode de défaut en fonction de son amplitude pour un défaut de rayon $R_d = 1.1R$, calculé avec l'approximation (8)-(9) et la méthode de relaxation. On obtient des profils du mode de défaut quasi-identiques avec les deux méthodes (voir encadré).

A contrario de [3], après avoir comparé la fréquence interne des breathers avec la fréquence du mode de défaut au niveau du pic d'absorption, nous n'avons pas pu mettre en évidence de phénomène de résonance entre les deux qui puissent expliquer la position du pic d'absorption. Cela reste à étudier plus en profondeur.

4 Conclusions et perspectives

L'observation d'un pic d'absorption pour un défaut donné dans une chaîne granulaire est une caractéristique très intéressante du point de vue des applications [4]. C'est pourquoi il est important de pouvoir prédire la localisation de ce pic, chose encore inconnue à la fin du stage. Mais les modes de défaut étudiés dans la section précédente pourraient servir de base à une analyse par coordonnées collectives [3] afin de mieux comprendre l'interaction breather-défaut.

Références

- [1] N. Boechler, G. Theoharis, and C. Daraio. Bifurcation-based acoustic switching and rectification. *Nat Mater*, 10 :665–668, 2011.
- [2] S. Flach and A. Gorbach. Discrete breathers - advances in theory and applications. *Physics Reports*, 467 :1–116, 2008.
- [3] K. Forinash, M. Peyrard, and B. Malomed. Interaction of discrete breathers with impurity modes. *Phys. Rev. E*, 49 :3400–3411, 1994.
- [4] F. Fraternali, M. A. Porter, and C. Daraio. Optimal design of composite granular protectors. *Mech. Adv. Mat. Struct.*, 17 :1–19, 2010.
- [5] G. James. Nonlinear waves in Newton's cradle and the discrete p-Schrödinger equation. *Math. Models Meth. Appl. Sci.*, 21 :2335–2377, 2011.
- [6] G. James, P. Kevrekidis, and J. Cuevas. Breathers in oscillator chains with Hertzian interactions. article soumis à *Physica D*, 46 p. arXiv :1111.1857v1, 2011.
- [7] V. Nesterenko. *Dynamics of Heterogeneous Materials*. Springer Verlag, 2001.
- [8] A. Spadoni and C. Daraio. Generation and control of sound bullets with a nonlinear acoustic lens. *Proc Natl Acad Sci USA*, 107 :7230–7234, 2010.