

Ondes non linéaires dans des chaînes granulaires: influence d'un défaut

Marc Chandelier encadré par Guillaume James

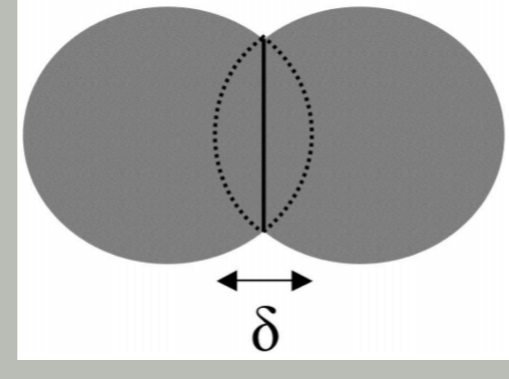
Stage effectué au LJK dans le cadre du M1 Physique UJF



Ondes dans les milieux granulaires

Comportement fortement non linéaire.

Force de Hertz : $f(\delta) = \gamma\delta^3$



Plusieurs types d'ondes :

Solitons : ondes progressives spatialement localisées.

Breathers : ondes spatialement localisées et périodiques en temps.

But : tenter de comprendre certains aspects de l'interaction d'un breather avec un défaut.

Système d'étude :

$$\mathcal{H} = \sum_n \frac{m}{2} \dot{x}_n^2 + \frac{k}{2} x_n^2 + \frac{2}{5} \gamma (x_n - x_{n+1})_+^{5/2}$$

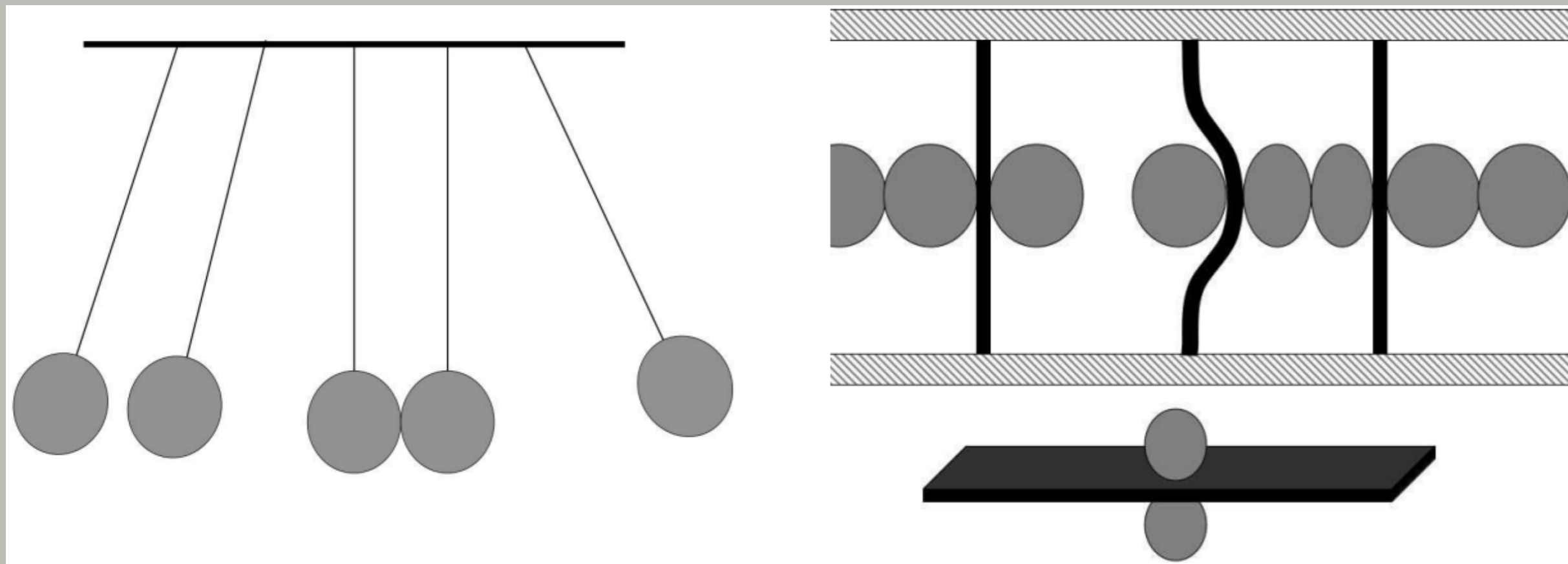


FIGURE: Exemples de systèmes expérimentaux correspondants.

Génération d'un breather dans la chaîne

Équations du mouvement adimensionnelles :

$$\ddot{y}_n + y_n = (y_{n-1} - y_n)_+^{3/2} - (y_n - y_{n+1})_+^{3/2}$$

Dimensionnement : $x_n(t) = \xi y_n \left(\frac{t}{\tau_c} \right)$ avec $\xi = \left(\frac{k}{\gamma} \right)^{2/5}$ et $\tau_c = \sqrt{\frac{m}{k}}$.

Billes en téflon d'un rayon de $R = 2.28$ mm ($m \approx 0.63$ g).

Plaques en acier d'une dimension de $25 \times 5 \times 1$ mm³.

Intégration numérique avec les conditions initiales :

$$x_n(0) = 0 \text{ et } \dot{x}_n(0) = V\delta_{n,1}$$

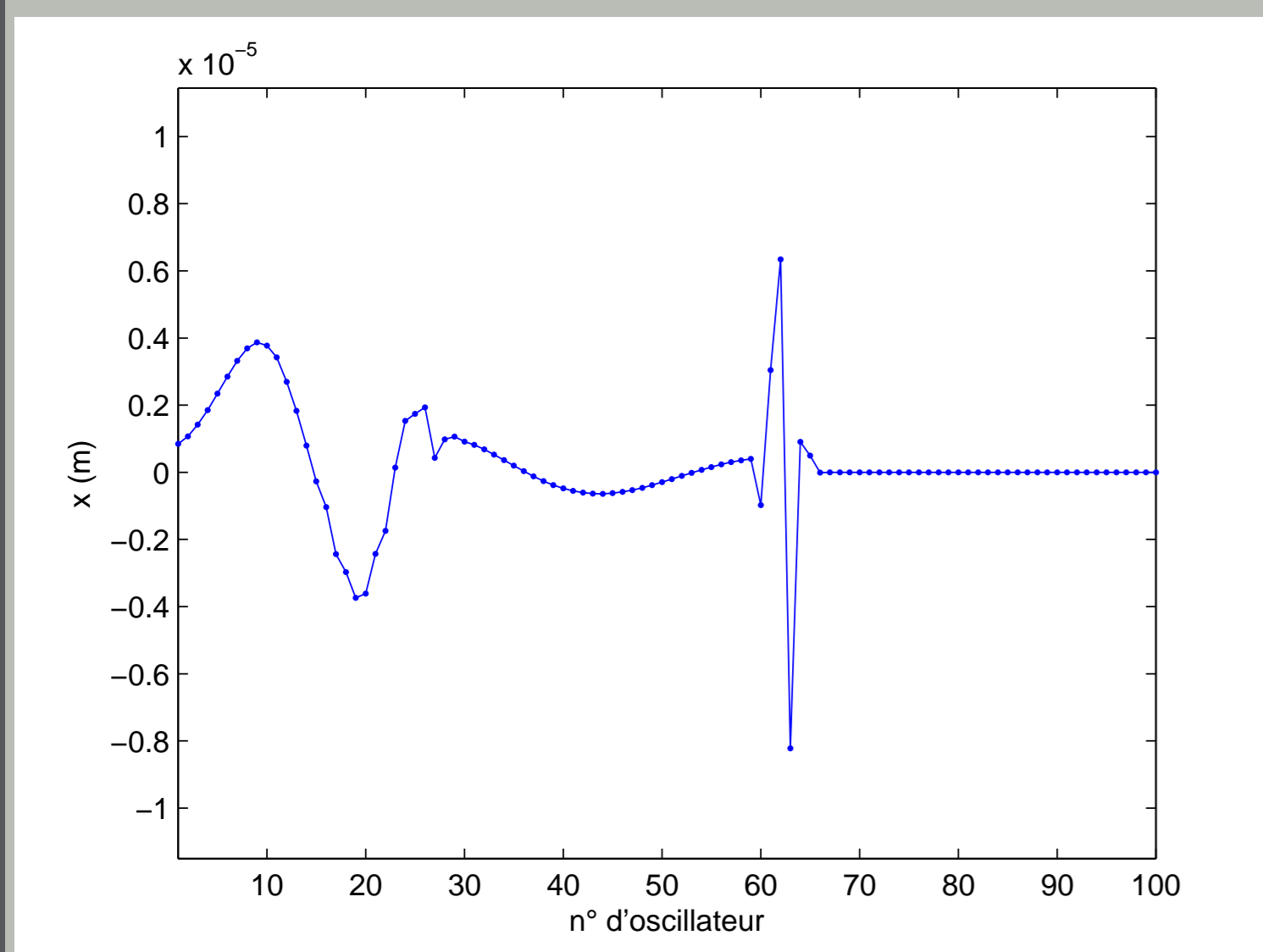


FIGURE: Breather obtenu après un impact à la vitesse $V = 1$ m/s.

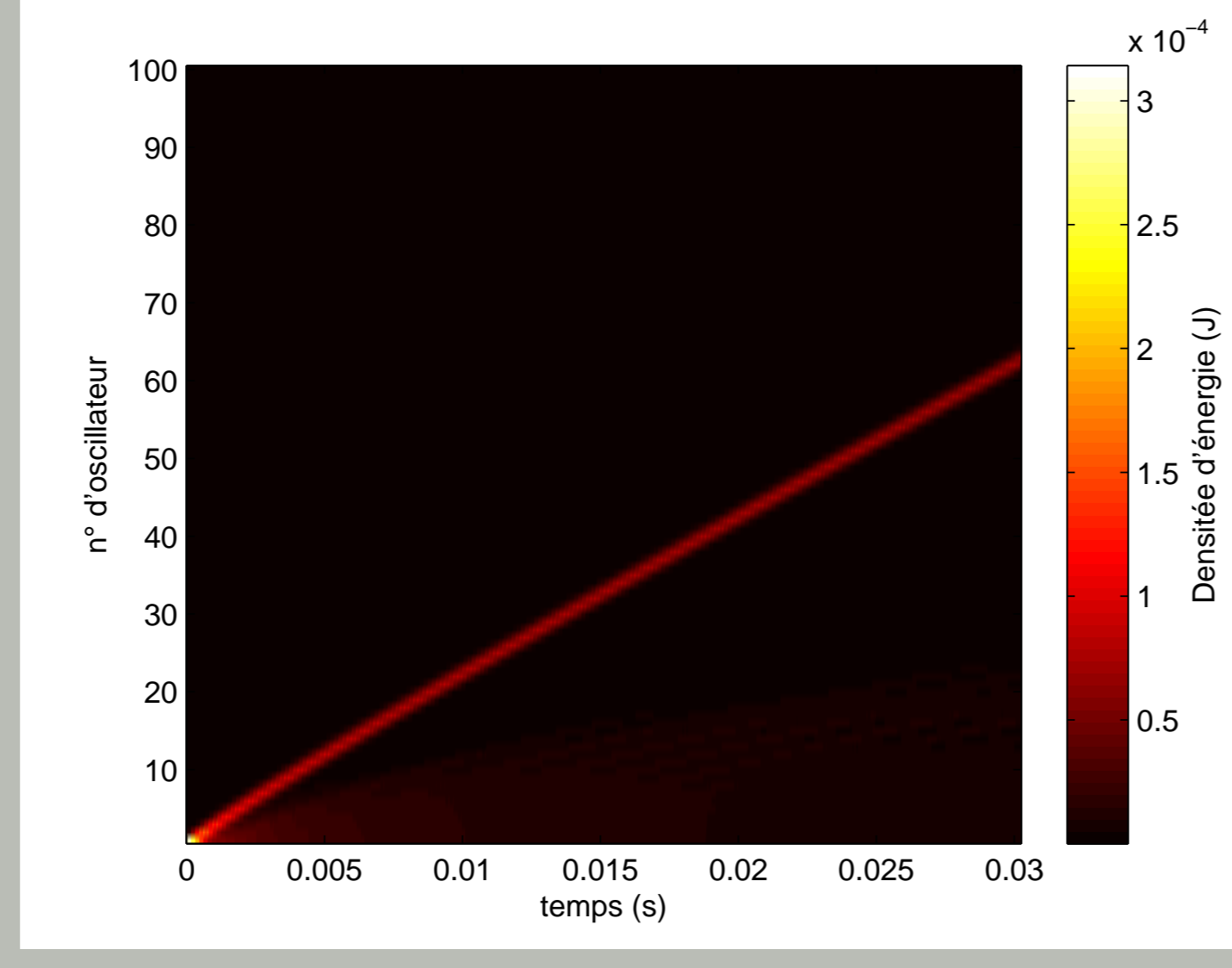


FIGURE: Densité d'énergie $e_n = \frac{1}{2}m\dot{x}_n^2 + \frac{1}{2}kx_n^2 + \frac{1}{5}\gamma(x_{n-1} - x_n)_+^{5/2} + \frac{1}{5}\gamma(x_n - x_{n+1})_+^{5/2}$.

Ajout d'un défaut dans la chaîne : nouvelles équations

Billes pouvant avoir des rayons différents : $R_n = R\tilde{R}_n$.

Nouveau hamiltonien :

$$\mathcal{H} = \sum_n \frac{m_n}{2} \dot{x}_n^2 + \frac{k}{2} x_n^2 + \frac{2}{5} \gamma_n (x_n - x_{n+1})_+^{5/2}$$

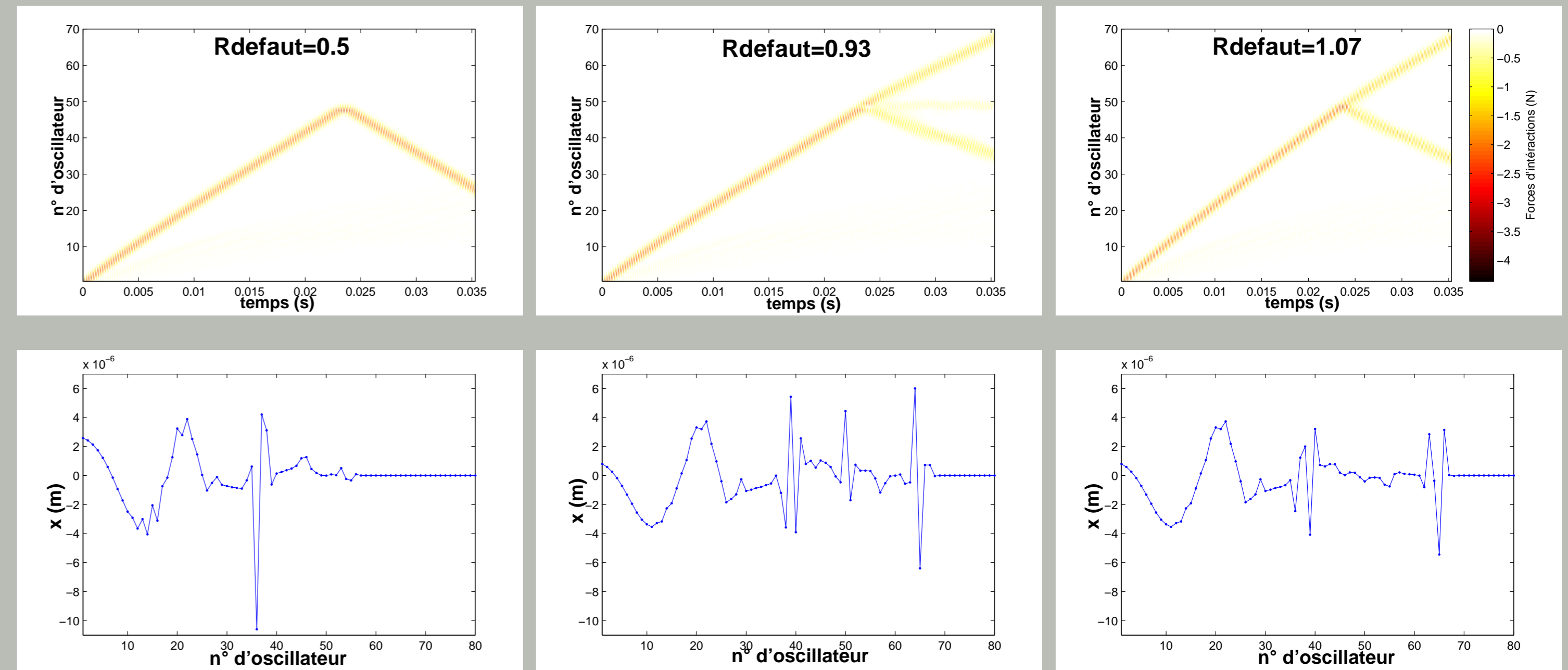
Avec $\gamma_n = \gamma\eta_n$ et $\eta_n = \left(\frac{2\tilde{R}_n\tilde{R}_{n+1}}{\tilde{R}_n + \tilde{R}_{n+1}} \right)^{1/2}$.

Nouvelles équations du mouvement :

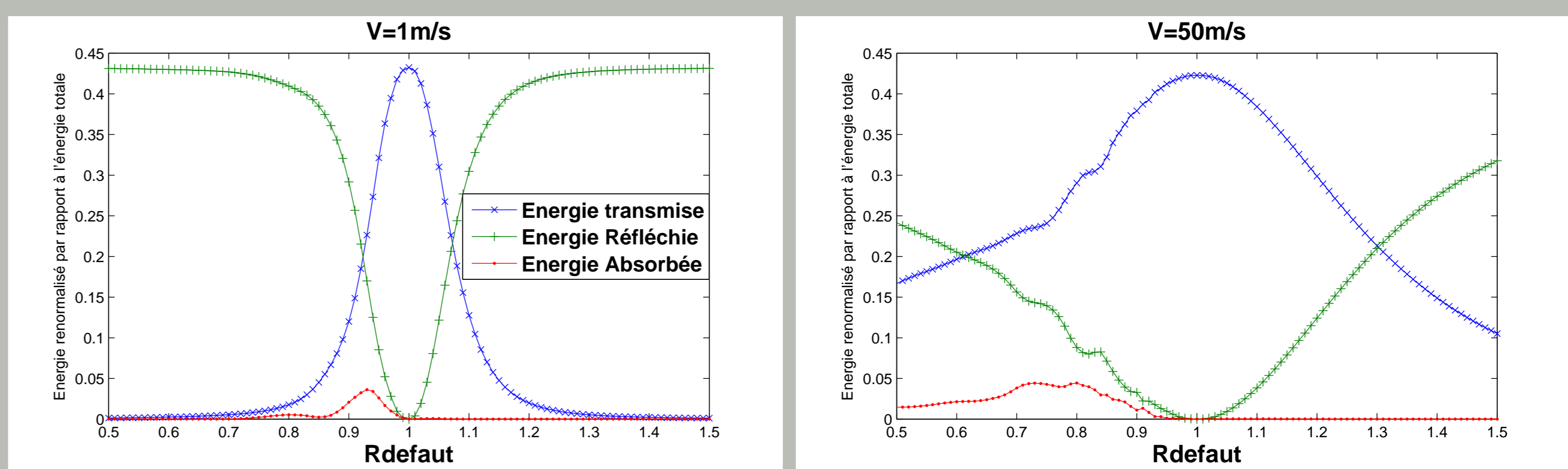
$$\mu_n \ddot{y}_n + y_n = \eta_{n-1} (y_{n-1} - y_n)_+^{3/2} - \eta_n (y_n - y_{n+1})_+^{3/2} \text{ avec } \mu_n = \frac{m_n}{m}$$

Interaction breather-défaut

Différentes interactions en fonction du défaut :



Énergie du défaut et des oscillateurs situés avant et après :



Calcul de modes de défaut

Méthode donnant les solutions approchées de la forme :

$$y_n(t) \approx \mu^2 a_n \cos(\omega t)$$

Où les a_n vérifient les équations suivantes :

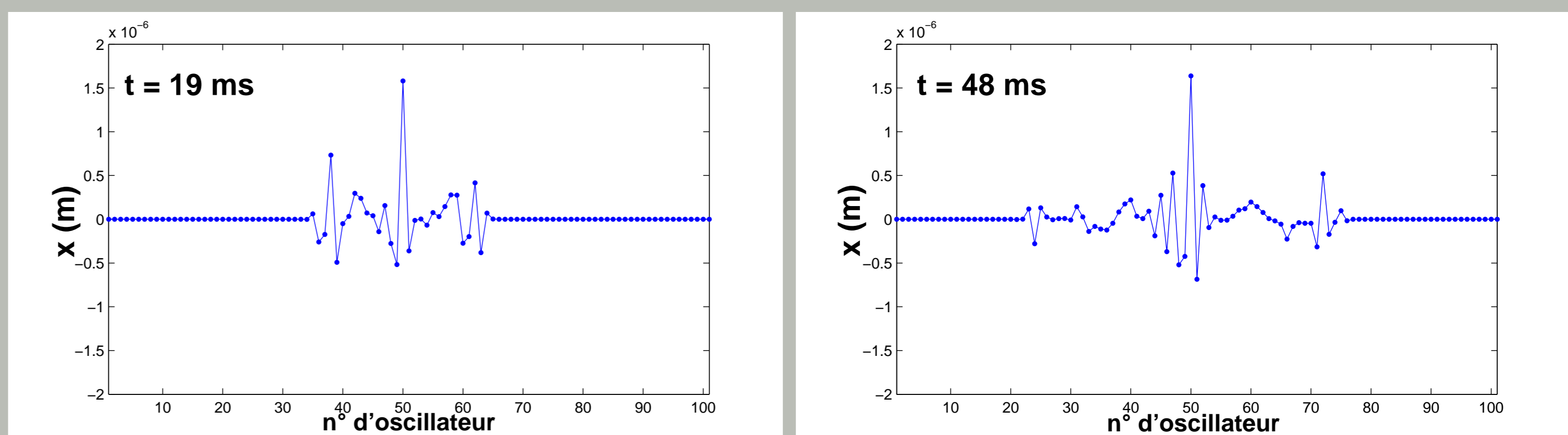
$$-sa_n - \tau_0 \frac{\delta m}{\mu} \sqrt{2} \delta_{n0} a_n = (a_{n+1} - a_n) |a_{n+1} - a_n|^{1/2} - (a_n - a_{n-1}) |a_n - a_{n-1}|^{1/2}$$

δm : différence entre masse du défaut et masse de référence.

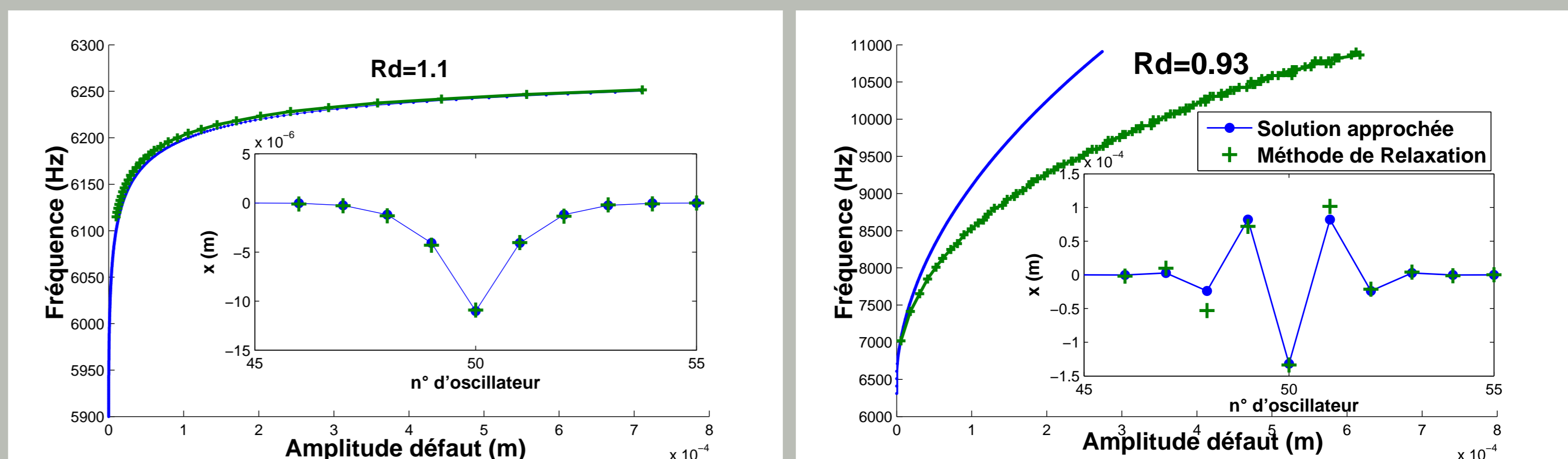
$\mu = 2^{3/2} \tau_0 |\omega - 1|$: paramètre positif dépendant de la fréquence cherchée.

$s = 1$ si $\omega > 1$ ou $s = -1$ si $\omega < 1$.

Vérification par la méthode de relaxation :



Comparaison des résultats :



Conclusion et perspectives

Observation d'un pic d'absorption : intéressant pour les applications.

Absorbants de chocs.

Récupération d'énergie de vibration.

Position du pic d'absorption encore inconnue.

Méthodes de coordonnées collectives.