

Discussion sur les Formes Normales d'Observabilité et les Observateurs à Modes Glissants Etape par Etape

G. ZHENG¹, D. BOUTAT², J.P. BARBOT¹

¹Equipe Commande des Systèmes (ECS-EA 3649), ENSEA,
6 Av. du Ponceau, 95014 Cergy Cedex.

{zheng,barbot}@ensea.fr

²LVR/ENSI, 10 Boulevard de Lahitolle, 18020 Bourges, France.
driss.boutat@ensi-bourges.fr

Résumé : La majorité des méthodes classiques de synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires sont basées, directement ou indirectement, sur le fait que leur approximation linéaire est observable ou au moins détectable. Dans cet article, nous montrons qu'il est possible de synthétiser des observateurs pour des systèmes qui ne sont pas localement détectables, sur un ensemble de mesure nul si celui-ci n'est pas invariant. La solution que nous apportons à ce problème est d'une part l'analyse d'observabilité à l'aide des formes normales d'observabilité et d'autre part la synthèse d'observateur à modes glissants étape par étape. En effet ces derniers sont naturellement des observateurs à structure variable ce qui permet de tenir compte de la singularité d'observabilité en passant d'une structure d'observateur à une structure d'estimateur. Un exemple simple sera donné et l'article se terminera par une discussion sur l'utilité des formes normales d'observabilité.

Mots Clés : Observabilité, Mode Glissant, Observateur, Bifurcation.

I. INTRODUCTION

Pour la majorité des systèmes, qu'ils soient mécaniques, électriques, pneumatiques, biologiques, économiques..., on mesure qu'un nombre réduit de variables d'état et ceci pour de multiples raisons technologiques ou économiques. Ainsi, le problème d'observer ou du moins d'estimer les variables non mesurées est un problème majeur en automatique mais aussi dans d'autres domaines. Rappelons simplement que sous le "vocabulaire capteur intelligent" la communauté des électroniciens désigne en réalité un observateur. Ces mêmes électroniciens parlent de problème de synchronisation unidirectionnelle pour désigner le problème d'observation d'un système oscillant ou d'un système chaotique. Ainsi les propriétés d'observabi-

lité et la synthèse d'observateurs ont largement été traitées dans la littérature pour les systèmes linéaires ou non linéaires ayant un linéaire tangent observable. Néanmoins, dans de nombreux cas et notamment dans des problèmes de synchronisation de systèmes chaotiques l'approximation linéaire d'un système non linéaire n'est pas toujours observable et même parfois non détectable sur une sous variété. Ce problème a été abordé par exemple en cryptographie en temps continu par L. Boutat-Baddas [1] et en temps discret par I. Belmouhoub [5]. Dans sa thèse L. Boutat-Baddas [4] a utilisé et adapté les formes de Poincaré pour l'étude des singularités d'observation (observability bifurcation). L'approche qui a été proposée dans cette thèse est le dual de l'approche introduite par W. Kang et A. Krener pour l'étude des singularités de commandabilité (controlability bifurcation). Ici, nous proposons à l'aide des formes normales d'observabilité de traiter un exemple simple de système qui n'est pas linéairement détectable. Ensuite nous utiliserons les propriétés intrinsèques de structure variable des observateurs à mode glissant étape par étape [12] pour tenir compte du passage à travers la sous variété inobservable. Il est à noter que ce type d'observateurs à en plus l'avantage de garantir une convergence en temps fini de l'erreur d'observation si le système est observable et vérifie certaines conditions [12].

L'article est organisé de la façon suivante, dans le deuxième paragraphe les formes normales d'observabilité sont rappelées. Ensuite, nous abordons un exemple simple à savoir, la synthèse d'observateur pour les systèmes possédant des singularités de détectabilité. A cette occasion, la synthèse d'observateur à mode glissant étape par étape est rappelée. Finalement nous discutons des autres types d'applications des techniques proposées dans cet article tels que le problème de l'inversion à gauche et la cryptographie.

II. RAPPEL SUR LA FORME NORMALE D'OBSERVABILITÉ

Dans ce paragraphe, pour simplifier la lecture on rappelle seulement la Forme Normal d'Observabilité pour les systèmes possédant un mode réel linéairement inobservable et ceci pour une relation d'équivalence quadratique qui considère uniquement les injections de l'entrée de la sortie et une classe particulière de difféomorphisme. Le lecteur pourra se reporter aux articles suivants pour plus de détails : [4] pour une généralisation aux ordres supérieurs, [6] pour des démonstrations exhaustives. Considérons le système Mono Entrée Mono Sortie suivant :

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= f(\xi) + g(\xi)u \\ y &= C\xi = h(\xi)\end{aligned}\quad (1)$$

où les champs de vecteur $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont analytiques et tels que $f(0) = 0$, ainsi la paire $(\xi_e = 0, u = 0)$ est un point d'équilibre. En posant $A = \frac{\partial f}{\partial t}(0)$, $B = g(0)$ le système (1) peut se mettre à l'aide du développement de Taylor d'ordre deux sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + Bu + f^{[2]}(z) + g^{[1]}(z)u \\ &\quad + O^{[3]}(z, u) \\ y &= Cz\end{aligned}\quad (2)$$

avec $f^{[2]}(z) = [f_1^{[2]}(z) \ f_2^{[2]}(z) \ \dots \ f_n^{[2]}(z)]^T$ et $g^{[1]}(z) = [g_1^{[1]}(z) \ g_2^{[1]}(z) \ \dots \ g_n^{[1]}(z)]^T$. Ici, $f_i^{[2]}(z)$ et $g_i^{[1]}(z)$ pour tout $i \in [1, n]$, sont des fonctions polynômiales homogènes de degré respectivement 2 et 1 en z . On suppose que la paire (A, C) est de rang $n - 1$, ainsi le système possède un mode réel inobservable. De plus, il existe un changement de coordonnées linéaires tel que le système puisse se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{z}} &= A_{obs}\tilde{z} + B_{obs}u + \tilde{f}^{[2]}(z) \\ &\quad + \tilde{g}^{[1]}(z)u + O^{[3]}(z, u) \\ \dot{\tilde{z}}_n &= \alpha z_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i z_i + b_n u + f_n^{[2]}(z) \\ &\quad + g_n^{[1]}(z)u + O^{[3]}(z, u) \\ y &= C_{obs}\tilde{z}\end{aligned}\quad (3)$$

avec $\tilde{z} = [z_1, \dots, z_{n-1}]^T$, $z = [\tilde{z}^T, z_n]^T$, $A_{obs} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-2} & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_{n-1} & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$, $B_{obs} = [b_1, \dots, b_{n-1}]^T$, $C_{obs} = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$.

Les termes linéaires A_{obs} , B_{obs} , α et les α_i constituent le résidu d'ordre un et cette représentation est

la forme normale de l'approximation linéaire. Il est à noter que cette forme est classique et bien connue i.e. Forme Compagnon Observable.

Définition II.1: Le système (2) est Quadratiquement Equivalent Modulo une Injection de Sortie (QEMIS) au système :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + \bar{f}^{[2]}(x) + \bar{g}^{[1]}(x)u \\ &\quad + \beta^{[2]}(y) + \gamma^{[1]}(y)u + O^{[3]}(x, u) \\ y &= Cx\end{aligned}\quad (4)$$

s'il existe une injection de sortie $\beta^{[2]}(y) + \gamma^{[1]}(y)u$ et un difféomorphisme de la forme $x = z - \phi^{[2]}(z)$ qui transforme (2) en (4) et ceci au moins jusqu'à l'ordre 2 en z et u .

Nous pouvons alors rappeler la proposition suivante :

Proposition II.1: [4] Le système (2) est QEMIS au système (4), si et seulement si les deux équations homologues suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned}i) \quad & A\phi^{[2]}(z) - \frac{\partial \phi^{[2]}}{\partial z} Az = \bar{f}^{[2]}(z) - f^{[2]}(z) + \beta^{[2]}(z_1) \\ ii) \quad & -\frac{\partial \phi^{[2]}}{\partial z} B = \bar{g}^{[1]}(z) - g^{[1]}(z) + \gamma^{[1]}(z_1)\end{aligned}$$

où $\frac{\partial \phi^{[2]}}{\partial z} Az := [\frac{\partial \phi_1^{[2]}}{\partial z} Az, \dots, \frac{\partial \phi_n^{[2]}}{\partial z} Az]^T$ et $\frac{\partial \phi_i^{[2]}}{\partial z}$ est la matrice Jacobienne de $\phi_i^{[2]}(z)$ pour $\forall i \in [1, n]$.

Pour la preuve voir [4].

Comme pour la forme normale linéaire, on choisit la sortie y toujours égale à x_1 . La sortie doit rester inchangée pour des questions de retour d'information mesurée, ce qui entraîne que le difféomorphisme $(x = z - \phi^{[2]}(z))$ doit vérifier $\phi_1^{[2]}(z) = 0$. Ainsi, la forme normale d'observabilité quadratique pour les systèmes avec un mode linéairement inobservable est donnée dans le théorème suivant :

Théorème II.1: [4] Tout système (3) est QEMIS à une et une seule forme normale ci-dessous :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_1 x_1 + x_2 + b_1 u + \sum_{i=2}^n k_{1i} x_i u + E_1 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-2} &= a_{n-2} x_1 + x_{n-1} + b_{n-2} u \\ &\quad + \sum_{i=2}^n k_{(n-2)i} x_i u + E_{n-2} \\ \dot{x}_{n-1} &= a_{n-1} x_1 + b_{n-1} u + \sum_{j \geq i=2}^n h_{ij} x_i x_j \\ &\quad + h_{1n} x_1 x_n + \sum_{i=2}^n k_{(n-1)i} x_i u + E_{n-1} \\ \dot{x}_n &= \alpha_n x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i + b_n u + \alpha_n \phi_n^{[2]}(x) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \phi_i^{[2]}(x) - \frac{\partial \phi_n^{[2]}}{\partial \tilde{x}} A_{obs} \tilde{x} + f_n^{[2]}(x) \\ &\quad + \sum_{i=2}^n k_{ni} x_i u + E_n\end{aligned}$$

avec $E_i = \beta_i^{[2]}(y) + \gamma_i^{[1]}(y)$ for $\forall i \in [1, n]$.

A partir de la forme normal, on voit immédiatement que la variété de bifurcation d'observabilité est égale à

$$S_n = \left\{ x \in U \mid \sum_{i=1}^{n-1} h_{i,n}x_i + 2h_{n,n}x_n + k_{(n-1),n}u = 0 \right\}.$$

En effet, sur S_n il n'existe aucun lien linéaire ou quadratique entre les dérivées de la sortie et la dernière composante de l'état x_n . Les termes h_{ij} ($n \geq i, j \geq 2$) et k_{ji} ($n \geq j \geq 1$ et $n \geq i \geq 2$) sont appelés les termes résonnants. Ainsi, si pour un indice $i \in [1, n]$, $h_{i,n}x_i \neq 0$, alors on peut quadratiquement observer l'état x_n et pour un u fixé la variété de bifurcation d'observabilité est de dimension $n - 1$ donc de mesure nulle dans R^n . De même si $k_{n-1,n} \neq 0$, nous pouvons toujours choisir u , de façon à préserver l'observabilité quadratique du système. Enfin, si le système est évolué S_n et le coefficient α_n est négatif alors nous pouvons nous servir de la stabilité de x_n pour conclure à la détectabilité du système (si α_n est positif le système n'est pas détectable). Le cas le plus complexe est le cas où $\alpha_n = 0$, il faut alors soit passer à un ordre supérieur d'approximation soit faire une analyse de stabilité à l'aide du théorème de la variété centre [2].

III. SYNTHÈSE D'OBSERVATEUR

Chaque forme normale d'observabilité représente une et une seule classe d'équivalence, ainsi les propriétés d'observabilité et détectabilité de la forme normale d'observabilité sont identiques à celles de chaque système dans la classe d'équivalence en question. Par conséquent, pour montrer l'efficacité de la méthode proposée, nous considérons le problème de synthétiser un observateur pour le système (5) qui est déjà sous la forme normale d'observabilité quadratique :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2x_3 \\ \dot{x}_3 &= \frac{-x_4}{3} \\ \dot{x}_4 &= \frac{x_3}{3} \end{aligned} \quad (5)$$

avec la sortie $y = x_1$. Il est clair que le système (5) est linéairement inobservable dans les directions x_3 et x_4 et qu'il possède une bifurcation d'observabilité pour $x_2 = 0$, ainsi les méthodes classiques de conception d'observateurs pour des systèmes observables globalement ou même localement ne peuvent pas être appliquées. En outre, la méthode de Kazanzis et Kravaris ([8], [9],[10]), qui n'est pas basée sur l'observabilité mais sur la détectabilité, est aussi inapplicable pour le système (5). En effet, ce système a quatre valeurs propres sur l'axe imaginaire $\{\pm i, \pm i/3\}$, ce qui signifie qu'il n'est pas linéairement détectable. Cependant, comme on va le montrer, sur la base de la forme normale d'observabilité et de l'observateur à mode glissant étape par étape, il est possible de concevoir un observateur pour un tel système. Les termes résonnants de notre système sont : $h_{23} = 1, h_{13} = h_{14} = h_{22} = h_{24} = h_{33} = h_{34} = h_{44} = 0$, ce qui permet d'exhiber la sous variété de bifurcation d'observabilité de ce

système : $S = \{x \in R^4 \mid x_2 = 0\}$, c'est-à-dire que sur S on perd la propriété d'observabilité comme sur S le système n'est pas détectable, il faut que cette surface ne soit pas invariante. Le comportement de système (5) reste sur S uniquement si x_1 et x_2 sont nulles. Ceci est la seule perte globale d'observabilité ou de détectabilité du système. Donc, nous allons concevoir un observateur qui doit pouvoir modifier sa structure automatiquement selon que le système évolue sur ou à l'extérieur de la sous variété de bifurcation d'observabilité. Grâce aux termes résonnants x_2x_3 , on peut concevoir un observateur à mode glissant, dont la structure peut commuter entre un observateur en temps fini et une copie du système original selon la propriété d'observabilité du système, pour récupérer x_3 à partir de $\frac{dx_2}{dt}$ et x_4 à partir de $\frac{dx_3}{dt}$. Ceci, sera réalisé étape par étape comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}_1}{dt} &= \hat{x}_2 + \lambda_1 \text{sign}(y - \hat{x}_1) \\ \frac{d\hat{x}_2}{dt} &= -x_1 + \tilde{x}_2 \hat{x} \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2) \\ \frac{d\hat{x}_3}{dt} &= -\frac{1}{3}\hat{x}_4 + E_2 \lambda_3 \text{sign}(\tilde{x}_3 - \hat{x}_3) \\ \frac{d\hat{x}_4}{dt} &= \frac{1}{3}\tilde{x}_3 + E_3 \lambda_4 \text{sign}(\tilde{x}_4 - \hat{x}_4) \end{aligned}$$

avec les relations suivantes :

si $x_1 = \hat{x}_1$, alors $E1 = 1$, sinon $E1 = 0$;

si $\tilde{x}_2 = \hat{x}_2$ et $E1 = 1$, alors $E2 = 1$, sinon $E2 = 0$;

si $\tilde{x}_3 = \hat{x}_3$ et $E2 = 1$, alors $E3 = 1$, sinon $E3 = 0$.

Et les états auxiliaires nécessaires pour concevoir l'observateur à mode glissant étape par étape sont donnés ci-dessous :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_2 &= \hat{x}_2 + E_1 \lambda_1 \text{sign}(y - \hat{x}_1) \\ \tilde{x}_3 &= \hat{x}_3 + \frac{E_2}{\hat{x}_2} \lambda_2 \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2) \\ \tilde{x}_4 &= \hat{x}_4 - 3E_3 \lambda_3 \text{sign}(\tilde{x}_3 - \hat{x}_3) \end{aligned}$$

Donc, nous pouvons voir que lorsque le système évolue sur S , \tilde{x}_3 tend vers l'infini, ce qui signifie qu'une bifurcation d'observabilité se produit. Ainsi, afin de détecter la bifurcation d'observabilité et éviter l'explosion de \tilde{x}_3 , nous introduisons une variable auxiliaire E_s qui satisfait $E_s = 1$ si $\tilde{x}_2 \neq 0$, sinon $E_s = 0$. Alors les états auxiliaires et les deux dernières lignes de l'observateur deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}_3}{dt} &= \frac{-1}{3}\hat{x}_4 + E_s E_2 \lambda_3 \text{sign}(\tilde{x}_3 - \hat{x}_3) \\ \tilde{x}_3 &= \hat{x}_3 + \frac{E_2 E_s}{(\tilde{x}_2 - 1 + E_s)} \lambda_2 \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2) \\ \frac{d\hat{x}_4}{dt} &= \frac{1}{3}\tilde{x}_3 + E_s E_3 \lambda_4 \text{sign}(\tilde{x}_4 - \hat{x}_4) \\ \tilde{x}_4 &= \hat{x}_4 - 3E_s E_3 \lambda_3 \text{sign}(\tilde{x}_3 - \hat{x}_3) \end{aligned}$$

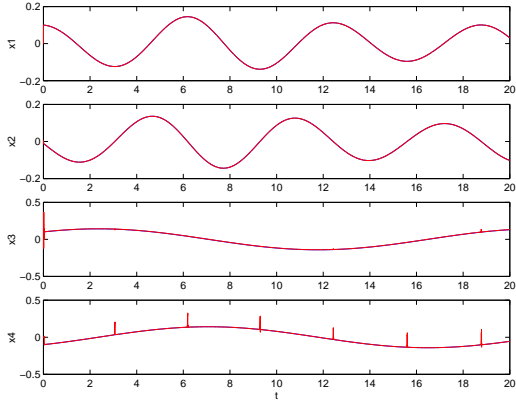


Fig. 1. Les Etats du Système et Ceux de L'Observateur

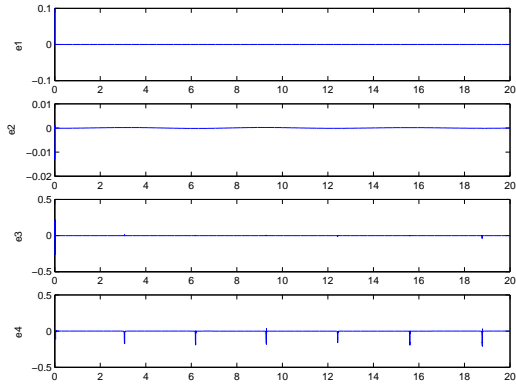


Fig. 2. Les Erreurs d'Observation

Dans la pratique nous ajoutons trois filtres passe-bas aux états auxiliaires \tilde{x}_i pour $i \in \{2, 3, 4\}$. Et nous posons $E_i = 1$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ lorsque le système est suffisamment proche de $\tilde{x}_i - \hat{x}_i = 0$ et non lorsque il est exactement sur $\tilde{x}_i - \hat{x}_i$ (nota $\tilde{x}_1 = y$). Et le même arrangement est employé pour E_s . De même, on remplace la fonction signe standard par la fonction arctangente avec une variable K pour modifier son degré de lissage.

La Fig. 1 donne les états du système (5) et ceux de l'observateur, la Fig. 2 montre les erreurs d'observation. En comparant l'état x_2 avec les états x_3, x_4 , nous pouvons voir que nous perdons les informations sur les états x_3, x_4 quand x_2 passe par 0, ce qui signifie que l'on est en présence d'une bifurcation d'observabilité. Mais après le passage de cette singularité, \hat{x}_3 et \hat{x}_4 convergent de nouveau rapidement vers x_3 et x_4 , ceci est dû à la convergence en temps fini de l'observateur. La Fig. 3 illustre l'efficacité du choix de E_s pour la bonne restitution de \hat{x}_3 et \hat{x}_4 . Dans la Fig. 3 on a posé $E_s = 0$ sur un plus grand voisinage autour de la sous variété de bifurcation S , on perd plus d'informations sur les états \hat{x}_3 et \hat{x}_4 pendant une plus grande période, ce qui signifie que la qualité de "l'observation" de \hat{x}_3 et \hat{x}_4 dépend bien du choix de E_s . Ainsi il est

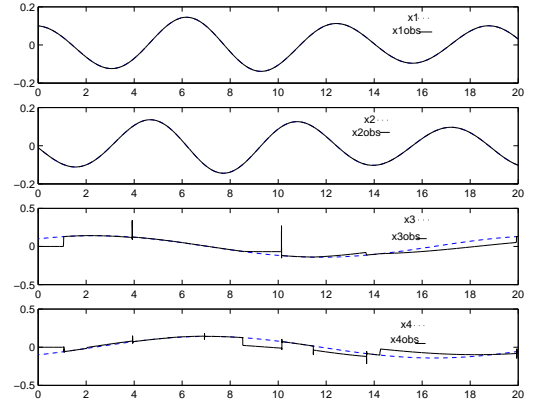


Fig. 3. L'Efficacité du Choix de E_s

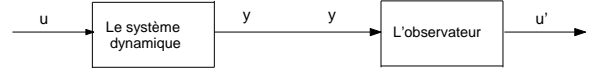


Fig. 4. Problème d'Inversion à Gauche

nécessaire de poser $E_s = 0$ sur un petit voisinage de S pour que la structure sans retour d'information soit appliqué un minimum de temps. Cet exemple prouve que l'observabilité linéaire peut être, dans certains cas, surmontée grâce à une forme quadratique dont des termes résonnants contiennent des informations utiles pour la conception d'observateurs. Dans cet exemple ce rôle est joué par le terme résonnant x_2x_3 .

IV. DISCUSSION

Il est également important de noter que la forme normale d'observabilité peut être employée pour résoudre le problème d'inversion à gauche afin de reconstruire une entrée inconnue.

La Fig. 4 est le schéma fonctionnel du problème d'inversion à gauche, dans lequel l'entrée inconnue est $u(t)$. Soit le système à entrée inconnue suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

où $u \in R$ est l'entrée inconnue, $f, g : U \subset R^n \rightarrow R^n$ sont des champs de vecteurs analytiques et $h : R^n \rightarrow R^m$ est supposé analytique avec $f(0) = 0$ et $h(0) = 0$. Si l'entrée inconnue $u(t)$ satisfait la Matching Condition d'Observabilité [3] :

$$\begin{aligned}L_g L_f^i h|_{x \in \beta_\epsilon} &= 0 \quad \forall i \in [0, n-2] \\ L_g L_f^{n-1} h|_{x=0} &\neq 0\end{aligned}$$

avec $\beta_\epsilon = \{\forall x / \|x\| < \epsilon\}$ et $\epsilon > 0$.

On peut concevoir un observateur à mode glissant étape-par-étape qui permet de retrouver toutes les composantes d'état et l'entrée inconnue $u(t)$ en un temps fini.

Il est à noter que la synchronisation des systèmes chaotiques ou non peut être considérée comme un problème de synthèse d'observateurs [11]. Ainsi, les techniques présentées ci-dessus peuvent être employées pour sécuriser la transmission de données. Ainsi, si la Matching Condition d'Observabilité est relaxée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} L_g L_f^i h|_{\forall x \in \beta_\epsilon} &= 0 \quad \forall i \in [0, n-2] \\ L_g L_f^{n-1} h|_{\exists x \in \beta_\epsilon} &\neq 0 \end{aligned}$$

avec $\beta_\epsilon = \{x/\|x\| < \epsilon\}$ et $\epsilon > 0$.

Ceci permet d'introduire des bifurcations d'inversion à gauche ce qui augmente la complexité de la dynamique, améliore la qualité de masquage du message confidentiel et par conséquent augmente la sécurité de la transmission de données. Comme mentionné précédemment, nous pouvons donner explicitement la sous variété de bifurcation d'observabilité (d'inversion à gauche) grâce à la forme normale d'observabilité. Supposons que dans la Fig. 4 l'entrée inconnue est considérée comme l'information confidentielle, et qu'elle est injectée dans le système, si celle-ci satisfait la Matching Condition d'Observabilité relaxée, elle peut être récupérée avec succès sauf sur la sous variété de singularité. Plus précisément, la perte d'observabilité signifie la perte de possibilités de reconstruire l'information confidentielle, ce qui rend plus difficile au pirate de déchiffrer le message, car il ne connaîtrait pas où se trouve la variété de singularité d'inversion à gauche.

Remarques :

1) Dans la forme normale d'observabilité, toutes les singularités de bifurcation sont liées aux termes résonnants. A l'aide de ces termes résonnants, si ceux-ci vérifient certaines propriétés, il est possible de reconstruire tous les états presque partout même si le système est inobservable et indétectable.

2) Si la Matching Condition d'Observabilité est vérifiée alors toutes les entrées sont universelles [7] au voisinage de $x = 0$.

V. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons montré qu'il est possible de concevoir un observateur pour un système non linéaire dont l'approximation linéaire n'est ni observable, ni détectable. En outre, nous avons appliqué cette forme normale d'observabilité dans un premier temps pour résoudre le problème d'inversion à gauche, et puis pour augmenter la sécurité de la transmission de données.

Remerciements :

Je remercie vivement le docteur Latifa Boutat-Baddas pour son aide et ses conseils avisés. Ce travail a été co-encadré par les professeurs D. Boutat et J-P Barbot.

RÉFÉRENCES

- [1] L. Boutat-Baddas, D. Boutat, J-P. Barbot and R. Tauleigne, "Quadratic Observability normal form", In Proc. of the 41th IEEE CDC 01, 2001.
- [2] A. Isidori., "Nonlinear controll systems", Springer-Verlag, 1989.
- [3] L. Boutat-Baddas, J.P. Barbot, D. Boutat, R. Tauleigne "Observability bifurcation versus observing bifurcations ", Proc. of the 15 th IFAC, 2002.
- [4] L. Boutat-Baddas, "Analyses des singularités d'observabilité et de détectabilité : applications à la synchronisation des circuits électroniques chaotiques", Thèse de l'Université de Cergy-Pontoise 19 Décembre 2002.
- [5] I.Belmouhoub, M.Djemaï and J-P Barbot, "Cryptography By Discrete-Time Hyperchaotic Systems", CDC 2003, Hawaii, pp 1902-1907.
- [6] L. Boutat-Baddas, D. Boutat et J.P. Barbot, "Forme normales d'observabilité généralisées", CIFA 2004, Douz, Tunisie.
- [7] J-P. Gauthier and G. Bornard, "Observability for any $u(t)$ of a class of bilinear systems", IEEE TAC Vo 26, pp 922-926 1981.
- [8] N. Kazantzis and C. Kravaris, "Nonlinear observer design using Lyapunov's auxiliary theorem", Systems & Control Letters, Vo 34, pp 241-247 1998.
- [9] A. Krener and M. Q. Xiao, "Nonlinear observer design in the Siegel domain through coordinate changes", In Proc of the 5th IFAC Symposium, NOLCOS01, Saint-Petersburg, Russia, pp 557-562, 2001.
- [10] A. Krener and M. Q. Xiao, "Observer for linearly unobservable nonlinear systems", Systems & Control Letters, V. 46, pp. 281-288, 2003.
- [11] H. Nijmeijer and I.M.Y. Mareels, "An observer looks at synchronization", IEEE Trans. on Circuits and Systems-1 : Fundamental Theory and Applications, Vol. 44, No 11, pp. 882-891, 1997.
- [12] W. Perruquetti and J-P. Barbot, "Sliding Mode control in Engineering", M. Dekker, 2002.