



ECOLE DOCTORALE SCIENCES ET INGENIERIE
De l'université de Cergy-Pontoise

THÈSE

Présentée pour obtenir le grade de docteur de l'université de Cergy-Pontoise

Spécialité : AUTOMATIQUE

Titre :

Formes Normales d'Observabilité Paramétrées par les Sorties : Applications
au Cryptage par Synchronisation de Systèmes Chaotiques

Par

Gang ZHENG

l'Equipe Commande des Systèmes, ENSEA

Le 24 Novembre 2006

Devant le jury composé de :

M. Michel FLIESS	Président
M. Witold RESPONDEK	Examineur
M. Wilfrid PERRUQUETTI	Rapporteur
M. Gildas BESANÇON	Rapporteur
M. Jean-Pierre BARBOT	Directeur de thèse
M. Driss BOUTAT	Codirecteur de thèse
M. Thierry FLOQUET	Invité
M. Jesus DE LEON	Invité

Table des matières

Remerciements	7
Notations	9
Introduction	11
I Partie Théorique : Forme Normale	15
1 Forme Normale d’Observabilité Linéaire Dépendante de la Sortie	17
1.1 Introduction	17
1.2 Notations et résultats techniques	19
1.3 Résultat principal	24
1.4 Généralisation aux systèmes avec des entrées	28
1.5 Conclusion	32
2 Forme Normale d’Observabilité Linéaire Dépendante des Sorties Multiples	35
2.1 Introduction	35
2.2 Notations	36
2.3 Résultats techniques	37
2.4 Résultats principaux	42
2.5 Généralisation aux systèmes avec des entrées	44
2.6 Conclusion	48
3 Forme Normale d’Observabilité Linéaire avec des Sorties Multiples Combinées	51
3.1 Introduction	51
3.2 Notations	52
3.3 Discussions sur la forme normale introduite en [102] et [158]	52
3.4 Résultats principaux	56
3.5 Simplification des Calculs	62
3.6 Généralisation aux systèmes avec des entrées	66
3.7 Conclusion	70

4	Forme Normale d'Observabilité Quadratique Dépendante de la Sortie	73
4.1	Introduction	73
4.2	Equations Homologiques	75
4.3	Forme normale d'OQDS	76
4.3.1	Forme normale d'OQDS privilégiant les états	76
4.3.4	Forme normale d'OQDS privilégiant l'entrée	79
4.4	Nombres Caractéristiques	81
4.4.1	Nombres caractéristiques pour la forme normale d'OQDS privilégiant les états	82
4.4.6	Nombres caractéristiques pour la forme normale d'OQDS privilégiant l'entrée	85
4.5	Conclusion	89
II	Partie Pratique : Transmission Chaotique	91
5	Chaos, Communication et Forme Normale	93
5.1	Introduction	93
5.2	Chaos et Transmission	93
5.2.1	Avantages du chaos	93
5.2.2	Technique de Démodulation	94
5.3	Synchronisation	95
5.3.1	Synchronisation basée sur la partition du système	95
5.3.2	Synchronisation par la boucle fermée	96
5.3.3	Synchronisation à l'aide d'observateur	97
5.3.4	Synchronisation par l'inversion du système	97
5.3.5	Synchronisation impulsive	98
5.4	Transmission basée sur la synchronisation de système chaotique	99
5.4.1	L'addition chaotique	99
5.4.2	La commutation chaotique	100
5.4.3	La modulation chaotique	100
5.5	Analyse de la sécurité du système chaotique	101
5.6	Analyse du système de transmission chaotique mono-entrée	102
5.7	Système de transmission chaotique avec des entrées multiples	103
5.8	Exemple pour la transmission avec des entrées multiples	106
5.8.1	Système chaotique de Qi	106
5.8.2	Exemple	107
5.9	Conclusion	112
6	Synchronisation Chaotique Basée sur la Stabilité de la Dynamique des Zéros	115
6.1	Introduction	115
6.2	Problème traité	115
6.3	OMC et la stabilité de la dynamique des zéros	116
6.4	Exemple	121
6.5	Conclusion	126

7	Approche d'Augmentation du Rapport Signaux Utiles sur Signaux Emis	129
7.1	Introduction	129
7.2	Analyse des Méthodes Classiques	129
7.3	Nouveau Schéma	130
7.4	Synthèse d'Observateur	132
7.5	Exemple	135
7.6	Conclusion	139
	Conclusion et Perspectives	142

Remerciements

Ce travail n'aurait pu être réalisé sans soutiens. L'humour, la disponibilité et les compétences de chacun m'ont souvent permis de franchir des obstacles en apparence insurmontables. Que soient donc ici remerciés tous ceux qui m'ont communiqué l'énergie et la confiance nécessaires au déroulement de l'ensemble de mes études et de cette étape scientifique particulière qu'est la thèse.

En premier lieu, je pense à M. Jean-Pierre Barbot et M. Driss Boutat que je remercie chaleureusement pour avoir encadré ce travail de thèse, avec beaucoup de compétence, d'enthousiasme et de disponibilité. Merci à vous pour vos conseils, votre optimisme et la confiance que vous m'avez accordée au cours de ces années.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude envers les membres du jury pour leur disponibilité et la qualité de leurs remarques dont ils m'ont fait part : M. Michel Fliess et M. Witold Respondek qui m'ont fait l'honneur d'être examinateurs et messieurs Wilfrid Perruquetti et Gildas Besançon pour le travail difficile de rapporteur. Leurs commentaires et leurs questions m'ont permis de clarifier ma rédaction et m'ont donné de nouvelles pistes de réflexion. Mes remerciements vont aussi à l'égard de M. Thierry Floquet et M. Jesus Deleon, et également M. Roger Tauleigne et Mme. Isabelle Barbot pour leurs améliorations de ce mémoire.

Mes remerciements vont bien entendu à toutes les personnes de l'équipe ECS qui m'ont permis d'achever ce travail durant ces années, et notamment à Mohamed, Christophe, Woihida, Malek, Inam, Maryam, Hassan, Halim, Khelifa, Jean Pierre...

Enfin, ces remerciements ne seraient pas complets sans mentionner mes parents dont la contribution m'a accompagné durant cette thèse. Enfin, ma femme, qui a vécu ce travail et l'a accompagné, proposant un soutien quotidien.

Notations

- \mathbb{R} (resp. \mathbb{R}^+) : ensemble des nombres réels (resp. réels positifs ou nuls),
- \mathbb{R}^n : espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels,
- $L_f^i h$: $i^{\text{ème}}$ dérivé de Lie de h dans la direction de f .
- $\theta_i = dL_f^i h$: le différentiel de $L_f^i h$.
- τ_1 : le champ de vecteur défini par
$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-1} \\ \theta_n \end{pmatrix} \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- $\tau_k = (-1)^{k-1} ad_f^{k-1} \tau_1$: le champ de vecteur.
- $[\tau_k, f]$: le crochet de Lie entre τ_k et f .
- $sign(\zeta)$ est la fonction signe réelle définie par :

$$sign(\zeta) = \begin{cases} -1 & \text{si } \zeta < 0 \\ \in]-1, 1[& \text{si } \zeta = 0 \\ 1 & \text{si } \zeta > 0 \end{cases}$$

Introduction

La cryptographie joue un rôle important dans la sécurité et la fiabilité des systèmes de transmission de données, surtout avec le développement du commerce électronique, les utilisateurs ont besoin d'authentifier et protéger des données sensibles dans leur ordinateurs et de garantir la confidentialité des transactions sur des réseaux publics tels que l'Internet. En général, un "crypto" système doit considérer plusieurs aspects, tels que l'intégrité des données, l'authentification, l'autorisation, confidentialité, et bien d'autres.

Les techniques de cryptographie classique sont basées sur la théorie des nombres et en particulier sur la décomposition d'un entier en éléments simples. Nous pouvons aussi citer les deux algorithmes bien connus : DES, RSA. Néanmoins, avec la révolution de l'informatique, ces algorithmes proposés ne sont pas assez sécurisés. En effet, ils sont basés sur le fait que nous ne possédons pas actuellement de calculateurs capables de décomposer tout entier en éléments simples et que nous n'avons pas un algorithme qui nous donne tous les nombres premiers.

Pour ces raisons, plusieurs chercheurs essayent de mettre en oeuvre d'autres "crypto" systèmes. Durant ces dernières décennies, la théorie des systèmes non linéaires a été appliquée à la cryptographie afin d'augmenter le degré de sécurité. Notamment, après le travail de Pecora et Carroll [122], des applications du chaos ont attiré beaucoup d'attention.

Grâce aux propriétés naturelles des systèmes chaotiques, telles que leurs sensibilité aux conditions initiales et le fait qu'ils évoluent dans une large bande de fréquence, les systèmes chaotiques sont de bons candidats pour la cryptographie. De nombreux schémas sont proposés afin d'appliquer les systèmes chaotiques dans le domaine de la cryptographie.

Il est bien connu que les systèmes de communication traditionnels comportent normalement deux parties, respectivement appelées émetteur et récepteur. Le signal de sortie de l'émetteur est modulé et est transmis par le canal public au récepteur qui démodule le signal reçu afin de récupérer le signal original.

En fait, il y a deux types de récupération du signal : la démodulation cohérente et la démodulation non cohérente. La récupération du message par une démodulation non cohérente emploie des attributs statistiques du signal transmis pour reconstruire le message. Ce qui fait que la récupération de ce dernier n'est pas directement en fonction du système chaotique.

Pour la cryptographie chaotique, un des concepts les plus importants de démodulation cohérente est la synchronisation, c.-à-d., que le récepteur essaie

de reconstruire les états de l'émetteur à partir du signal transmis considéré comme la sortie du système à observer et ensuite de récupérer le message crypté considéré comme une entrée inconnue. Du point de vue automatique, cette technique peut être classifiée dans le domaine de la conception d'observateurs [116].

La conception d'observateurs non linéaires peut être divisée en deux catégories. La première catégorie est la conception d'observateurs non linéaires directement. Dans cette catégorie, nous pouvons citer l'observateur grand gain [13], l'observateur de Kalman-étendu [19], etc. Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la deuxième catégorie : la conception d'observateurs non linéaires basée sur le concept des formes normales¹.

La première forme normale non linéaire bien connue basée sur la forme normale de Brunovsky (ou la forme canonique) a été présentée par Isidori et Krener [101]. Celle-ci a été généralisée aux systèmes avec des sorties multiples par Respondek et Krener [102] d'une part et par Xiao et Gao [158] d'autre part. De plus, à cause de la difficulté de vérifier les conditions proposées en [101], une autre méthode analytique a été proposée par Kazantzis et Kravaris [90] dans le domaine de Poincaré et a été généralisée dans le domaine de Seigel par Xia et Krener [107]. Après cela, une forme normale plus générale par rapport à celle de [101] a été étudiée par Respondek [136], et celle-ci possède une partie linéaire paramétrée par la sortie.

Dans ce mémoire, une nouvelle classe de formes normales paramétrées par la sortie ou ayant des sorties combinées sont étudiées. Il est à noter que les formes normales d'observabilité, l'analyse d'observabilité, le problème d'inversion à gauche et la synthèse d'observateurs traités dans ce mémoire s'appliquent aussi dans bien d'autres domaines que la cryptographie. Nous faisons référence dans ce mémoire à la cryptographie, car c'est ce qui nous a motivé durant ces deux années et demie de thèse, mais il faut avoir conscience de la généralité des méthodes proposées.

Ce mémoire est organisé de la façon suivante :

La partie I est consacrée à la théorie de la forme normale, et celle-ci comporte quatre chapitres.

Dans le chapitre 1, la forme normale d'Observabilité Linéaire Dépendante de la Sortie est présentée. Cette classe porte sur la linéarisation le long de la sortie par difféomorphisme et injection de sortie.

Dans le chapitre 2, la forme normale d'Observabilité Linéaire Dépendante des Sorties Multiples est présentée. Cette forme est une généralisation de la forme normale d'Observabilité Linéaire dépendante de la sortie.

Dans le chapitre 3, nous introduisons une nouvelle forme normale d'Observabilité Linéaire avec des Sorties Multiples Combinées. Cette forme est une autre généralisation de la forme présentée en [102] et [158], dont les sorties étaient linéaires. Dans notre cas, les sorties de cette forme sont non linéaires et surtout combinées.

Dans le chapitre 4, nous discutons la forme normale d'Observabilité Qua-

¹Dans ce mémoire nous employerons le terme forme normale, car la forme canonique est un cas particulier de la forme normale, où tous les termes résonants sont nuls.

dratique Dépendante de la Sortie pour des systèmes qui ne peuvent pas être linéarisés exactement le long de sa sortie. Ensuite, en utilisant une écriture matricielle des équations homologiques, nous donnons un ensemble de coefficients liés directement aux termes résonnants dans la forme normale. Ceci facilite la construction du difféomorphisme et de la classe de l'injection de sortie.

Dans la partie II, nous essayons d'appliquer la partie théorique de la cryptographie, cette partie comporte trois chapitres.

Dans le chapitre 5, nous abordons les relations entre le chaos, les systèmes de transmission de données et les formes normales. Après cela, nous proposons un rappel des schémas basés sur le chaos, et nous indiquons comment choisir un système chaotique du point de vue de la complexité de calcul. Finalement, nous présentons un nouveau schéma de transmission chaotique avec des entrées multiples afin de surmonter l'inconvénient que nous rencontrons lorsque nous généralisons les systèmes chaotiques possédant une seule entrée aux systèmes possédant des entrées multiples.

Dans le chapitre 6, la synchronisation chaotique basée sur la stabilité de la dynamique des zéros est discutée. Ce type de synchronisation est basée sur la convergence asymptotique des états inobservables du système chaotique, et ceci est une relaxation de la condition d'OMC (Observability Matching Condition).

Dans le chapitre 7, nous proposons une nouvelle approche à des sorties multiples de la transmission de données basée sur la synchronisation de systèmes chaotiques. Ce dernier schéma a dans le but de nous permettre d'augmenter l'amplitude des messages confidentiels par rapport au signal transmis.

Le mémoire se termine par les traditionnelles conclusions et perspectives.

Première partie

Partie Théorique : Forme Normale

Chapitre 1

Forme Normale d'Observabilité Linéaire Dépendante de la Sortie

1.1 Introduction

Depuis le travail de Luenberger, la conception d'observateurs pour les systèmes linéaires observables est un concept bien connu. Pour un système linéaire observable, des observateurs linéaires, tels que ceux de Luenberger [112] et de Kalman [84, 83], nous offrent d'excellentes performances. Mais pour le système non linéaire, le problème est plus difficile, et jusqu'à présent aucun type d'observateur non linéaire peut prétendre résoudre le problème.

En général, la conception d'observateurs non linéaires peut être divisé en deux catégories. La première catégorie est la conception d'observateurs non linéaires directement. Dans cette catégorie, de nombreux observateurs sont proposés tels que l'observateur à grand gain [48, 20, 63, 94, 12, 13, 11], l'observateur de Kalman-étendu [19], les observateurs reposant sur une approche analytique [18, 159, 62, 63], les observateurs quadratiques basées sur la théorie de la stabilité de Lyapunov [3, 152], l'observateur à mode glissant [146, 44, 21, 145, 47, 160, 6, 9][55], utilisant la théorie des systèmes à structure variable [50, 153, 154], l'observateur numérique [43, 42, 87], les observateurs basés sur la notion de la platitude [52, 51, 53], les observateurs reposés sur l'utilisation partielle ou totale de la notion de détectabilité [105], l'observateur adaptatif [165] [166] et ainsi de suite. Il est à noter que ces observateurs non linéaires directs sont applicables seulement quand le système non linéaire a satisfait quelques conditions complémentaires, telles que la condition de Lipchitz [48], la condition de bornitude [125], la condition excitante persistante [165] et ainsi de suite.

Afin d'employer le même type d'observateurs pour les systèmes non linéaires, le problème de linéarisation pour les systèmes non linéaires est né, et cette conception d'observateurs non linéaires est basée sur le concept de la forme normale. Les formes normales pour les systèmes dynamiques non linéaires ont été introduites par H. Poincaré vers la fin du 19^{ème} siècle

[132]. Les conditions suffisantes et nécessaires qui garantissent l'existence d'un difféomorphisme local et d'une injection de sortie afin de transformer un système non linéaire à une sortie et sans entrée en un système linéaire avec une injection non linéaire de sortie ont été premièrement présentés en [101]. Le même problème, pour un système non linéaire avec des sorties multiples sans entrée, a été partiellement résolu en [102]. La solution complète au problème de linéarisation a été donnée en [107]. Une autre approche plus générale a été présentée en [90] dans le domaine de Poincaré, puis elle été généralisée dans le domaine de Seigel en [107]. D'autres approches, en utilisant les formes normales quadratiques, ont été présentées en [74, 24, 23, 108, 28, 35]. Après cela, [86] a présenté la définition de la forme normale liée à la propriété de contrôlabilité. Par la suite, beaucoup d'autres chercheurs ont travaillé sur le sujet de la bifurcation de commandabilité [88, 103, 104, 106, 148, 72, 5, 66]. Le concept de la forme normale d'observabilité et des bifurcations d'observabilité ont été analysés en [105][28][64]. Tout simplement, la bifurcation d'observabilité est la perte de la propriété d'observabilité du linéaire tangent au voisinage d'un point ou sur une variété.

Toutes ces méthodes nous permettent de concevoir des observateurs pour une plus grande classe de systèmes non linéaires. Et en [136], l'auteur a donné les conditions géométriques suffisantes et nécessaires pour transformer un système non linéaire en une forme normale linéaire avec une modification scalaire du temps qui dépend de la sortie du système, alors que [68] donnait les conditions géométriques duales de [136]. Il est à noter qu'il y avait d'autres formes normales étudiées dans la littérature [69] [61][65][14].

Dans ce chapitre, nous proposerons une méthode pour déduire les conditions géométriques qui sont suffisantes et nécessaires afin de garantir l'existence d'un difféomorphisme local $z = \phi(x)$ qui transforme localement le système dynamique observable :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ y = h(x), \end{cases} \quad (1.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont suffisamment lisses, en la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z} = A(y)z + \beta(y), \\ y = z_n = Cz, \end{cases} \quad (1.2)$$

où $z \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
A(y) &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1(y) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_{n-2}(y) & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{n-1}(y) & 0 \end{pmatrix}, \\
\beta(y) &= \begin{pmatrix} \beta_1(y) \\ \beta_2(y) \\ \vdots \\ \beta_{n-1}(y) \\ \beta_n(y) \end{pmatrix}, \\
C &= (0, \cdots, 0, 1)
\end{aligned}$$

et $\alpha_i(y) \neq 0$ pour $y \in]-a, a[$ et $a > 0$. Ce type de linéarisation est appelé Forme Normale d'Observabilité Linéaire Dépendante de la Sortie (Forme Normale d'OLDS) [169][170].

Ensuite, nous généraliserons notre résultat à une classe de systèmes avec des entrées. Finalement, quelques corollaires utiles seront introduits et commentés afin de traiter le problème d'inversion à gauche [135].

Ce chapitre est organisé comme suit : La prochaine section présentera des notations et des résultats techniques qui sont fondamentaux pour prouver notre résultat principal. Dans la section 1.3, nous introduirons notre méthode pour déduire les conditions géométriques afin de transformer un système non linéaire sans entrée en la forme normale d'OLDS. La section 1.4 sera consacrée à la généralisation de nos résultats à une classe de systèmes avec des entrées. Dans la même section, quelques cas pratiques particuliers seront étudiés, ceci y compris d'un point de vue du problème d'inversion à gauche.

1.2 Notations et résultats techniques

Nous notons $L_f^{i-1}h$ pour $1 \leq i \leq n$ comme la $(i-1)^{\text{ème}}$ dérivée de Lie de la sortie h dans la direction de f , et $\theta_i = dL_f^{i-1}h$ est sa 1-forme associée. Supposons que le système (1.1) est observable localement¹. Ensuite, nous considérons aussi le champ de vecteur τ_1 défini en [101] comme suit :

$$\begin{cases} \theta_i(\tau_1) = 0, \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1, \\ \theta_n(\tau_1) = 1, \end{cases} \quad (1.3)$$

et par récurrence nous définissons

$$\tau_k = (-1)^{k-1} ad_f^{k-1}(\tau_1), \text{ pour } 2 \leq k \leq n. \quad (1.4)$$

Ci-dessous, nous rappelons un célèbre résultat présenté en [101].

¹Au sens de Herman et Krener : $\text{rang} [dh, \dots, dL_f^{n-1}h]^T = n$.

Théorème 1.2.1 *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) *Il existe un difféomorphisme et une injection de sortie qui transforment le système (1.1) en la forme normale (1.2) avec $\alpha_k(y) = 1$ pour $1 \leq k \leq n-1$.*
- ii) *$[\tau_i, \tau_j] = 0$ pour $1 \leq i, j \leq n$.*

Si pour certains $1 \leq k \leq n-1$ les fonctions $\alpha_k(y)$ dans la forme (1.2) ne sont pas constantes, alors la condition ii) du Théorème 1.2.1 n'est pas satisfaite. Et cette section est consacrée au cas $[\tau_i, \tau_j] \neq 0$, et à utiliser les $[\tau_i, \tau_n]$ afin de déterminer toutes les fonctions $\alpha_i(y)$ pour $1 \leq i \leq n-1$.

Lemme 1.2.2 *Pour un système de la forme (1.2), nous avons, pour $1 \leq k \leq n-1$,*

$$\begin{aligned} \tau_k &= \frac{1}{\pi_k} \frac{\partial}{\partial z_k} + (A_{k-1}^k(y) z_{n-1} + \eta_{k-1}^k(y)) \frac{\partial}{\partial z_{k-1}} \\ &+ \sum_{i=1}^{k-2} \left(A_i^k(y) z_{n-k+i} + \sum_{j=n-k+i+1}^{n-1} \sum_{l=j}^{n-1} T_{j,l}^k(y) z_j z_l \right) \frac{\partial}{\partial z_i} \\ &+ \sum_{i=1}^{k-2} \left(\sum_{j=n-k+i+1}^n \eta_i^k(y) z_j + O_y^{[3]}(z_{n-k+i+1}, \dots, z_{n-1}) \right) \frac{\partial}{\partial z_i}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

où $\pi_n = 1$ et $\pi_{k-1}(y) = \pi_k(y) \alpha_{k-1}(y)$ pour $2 \leq k \leq n$, $\eta_i^k(y)$ et $T_{j,l}^k(y)$ sont des fonctions lisses de y , $O_y^{[3]}(z_{n-k+2}, \dots, z_{n-1})$ représente les termes résiduels d'ordre supérieur à 2 paramétrés par y , et

$$\begin{aligned} A_i^k(y) &= \\ (-1)^{k-i+1} &\left(S_{k-i,1}^k \frac{\pi'_i}{\pi_i^2} + \sum_{m=k-i+1}^{k-1} S_{k-i,m-k+i+1}^k \frac{\pi'_{k-m}}{\pi_{k-m}^2} \left(\prod_{j=k-i+1}^m \alpha_{k-j} \right) \right) \pi_{n-k+i}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

où les $S_{k-i,1}^k$ et $S_{k-i,m-k+i+1}^k$ sont définis comme suit :

$$S_{j,1}^k = 1, S_{j,l}^k = S_{j-1,l}^{k-1} + S_{j,l-1}^{k-1}, \text{ pour } k \in [2, n], j \in [1, k-1], l \in [1, k-j] \quad (1.7)$$

et $S_{0,l}^k = S_{j,0}^k = 0$.

Remarque 1.2.3 *Pour simplicité, les termes $\alpha_i(y)$, $\pi_i(y)$, et les autres termes qui sont paramétrés par y , vont être simplifiés comme α_i et π_i . Et leur dérivées signifient la dérivée par rapport à y , par exemple $\pi'_i(y) := \frac{\partial}{\partial y} \pi_i(y)$.*

Preuve. Pour un système qui est de la forme (1.2), l'équation (1.3) nous donne :

$$\tau_1 = \frac{1}{\pi_1} \frac{\partial}{\partial z_1},$$

alors, nous utilisons l'équation (1.4), et obtenons :

$$\tau_2 = \frac{1}{\pi_2} \frac{\partial}{\partial z_2} + \left(\frac{\pi'_1}{\pi_1^2} \pi_{n-1} z_{n-1} + \frac{\pi'_1}{\pi_1^2} \beta_n \right) \frac{\partial}{\partial z_1},$$

et

$$\begin{aligned}\tau_3 &= \frac{1}{\pi_3} \frac{\partial}{\partial z_3} + \left(\left(\frac{\pi'_1}{\pi_1^2} \alpha_1 + \frac{\pi'_2}{\pi_2^2} \right) \pi_{n-1} z_{n-1} + \left(\frac{\pi'_1}{\pi_1^2} \alpha_1 + \frac{\pi'_2}{\pi_2^2} \right) \beta_n \right) \frac{\partial}{\partial z_2} \\ &\quad - \left(\frac{\pi'_1}{\pi_1^2} \pi_{n-2} z_{n-2} + \left(\frac{\pi'_1}{\pi_1^2} \pi_{n-1} \right)' \pi_{n-1} z_{n-1}^2 \right) \frac{\partial}{\partial z_1} \\ &\quad - \left(\left(\left(\frac{\pi'_1}{\pi_1^2} \pi_{n-1} \right)' \beta_n + \pi_{n-1} \beta'_n \right) z_{n-1} + \frac{\pi'_1}{\pi_1^2} \pi_{n-1} \beta_{n-1} + \beta_n \beta'_n \right) \frac{\partial}{\partial z_1}.\end{aligned}$$

Alors par induction, pour $3 < k \leq n$, nous avons :

$$\begin{aligned}\tau_k &= \frac{1}{\pi_k} \frac{\partial}{\partial z_k} + (A_{k-1}^k(y) z_{n-1} + \eta_{k-1}^k(y)) \frac{\partial}{\partial z_{k-1}} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-2} \left(A_i^k(y) z_{n-k+i} + \sum_{j=n-k+i+1}^{n-1} \sum_{l=j}^{n-1} T_{j,l}^k(y) z_j z_l \right) \frac{\partial}{\partial z_i} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-2} \left(\sum_{j=n-k+i+1}^n \eta_i^k(y) z_j + O_y^{[3]}(z_{n-k+i+1}, \dots, z_{n-1}) \right) \frac{\partial}{\partial z_i},\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}A_i^k(y) &= \\ (-1)^{k-i+1} &\left(S_{k-i,1}^k \frac{\pi'_i}{\pi_i^2} + \sum_{m=k-i+1}^{k-1} S_{k-i,m-k+i+1}^k \frac{\pi'_{k-m}}{\pi_{k-m}^2} \left(\prod_{j=k-i+1}^m \alpha_{k-j} \right) \right) \pi_{n-k+i},\end{aligned}$$

avec les coefficients S_i^k donnés par la loi (1.7).

■

Afin de déterminer $\alpha_i(y)$ pour $1 \leq i \leq n-1$, nous imposons que :

$$\frac{\partial}{\partial z_i} h \circ \phi^{-1} = \begin{cases} 0, & \text{pour } 1 \leq i \leq n-1, \\ 1, & \text{quand } i = n. \end{cases}$$

Maintenant, nous allons présenter une famille d'équations différentielles qui nous permet de calculer les fonctions $\alpha_i(y)$ pour $1 \leq i \leq n-1$.

Proposition 1.2.4 *S'il existe un difféomorphisme qui transforme le système (1.1) en la forme (1.2), alors*

$$[\tau_k, \tau_n] = \lambda_k(y) \tau_k + G_{n,k}^{[1]} + R_k, \text{ pour } 1 \leq k \leq n-1,$$

où

$$G_{n,k}^{[1]} = \left[\sum_{i=1}^{k-2} \left(\frac{1}{\pi_k} T_{k,n-k+i}^k z_{n-k+i} \right) \frac{\partial}{\partial z_i} \right] + \frac{1}{\pi_k} T_{k,k}^k z_k \frac{\partial}{\partial z_{2k-n}},$$

et

$$R_k = \sum_{i=1}^{k-2} \left(\sum_{j=n-k+i+1}^n \bar{\eta}_i^k(y) + O_y^{[2]}(z_{n-k+i+1}, \dots, z_{n-1}) \right) \frac{\partial}{\partial z_i}$$

et

$$\lambda_k(y) = \text{diag}\{\delta_1^k(y), \dots, \delta_i^k(y), \dots, \delta_k^k(y), 0, \dots, 0\}, \text{ pour } 1 \leq i \leq k-1, \quad (1.8)$$

où $\delta_k^k = A_k^n + \frac{\pi'_k}{\pi_k}$ et $\delta_i^k = A_i^n - A_{n-k+i}^n - \frac{(A_i^k)'}{A_i^k}$ pour $1 \leq i \leq k-1$, et A_i^k est donné en (1.6).

Preuve. Selon l'équation (1.5), pour $1 \leq k \leq n-1$ nous avons

$$\begin{aligned} [\tau_k, \tau_n] = & \left(A_k^n + \frac{\pi'_k}{\pi_k} \right) \frac{1}{\pi_k} \frac{\partial}{\partial z_k} + \frac{1}{\pi_k} T_{k,k}^k z_k \frac{\partial}{\partial z_{2k-n}} + \\ & \sum_{i=1}^{k-2} \left(\left(A_i^n - A_{n-k+i}^n - \frac{(A_i^k)'}{A_i^k} \right) A_i^k z_{n-k+i} + \frac{1}{\pi_k} T_{k,n-k+i}^k z_{n-k+i} \right) \frac{\partial}{\partial z_i} + \\ & \sum_{i=1}^{k-2} \left(\sum_{j=n-k+i+1}^n \bar{\eta}_i^k(y) + O_y^{[2]}(z_{n-k+i+1}, \dots, z_{n-1}) \right) \frac{\partial}{\partial z_i}. \end{aligned}$$

Posons $\lambda_k(y) = \text{diag}\{\delta_1^k(y), \dots, \delta_i^k(y), \dots, \delta_k^k(y), \dots, 0, \dots, 0\}$, où $\delta_k^k = A_k^n + \frac{\pi'_k}{\pi_k}$ et $\delta_i^k = A_i^n - A_{n-k+i}^n - \frac{(A_i^k)'}{A_i^k}$ pour $1 \leq i \leq k-1$, alors

$$[\tau_k, \tau_n] = \lambda_k(y) \tau_k + G_n^{[1]} + R. \quad (1.9)$$

■

Remarque 1.2.5 L'équation (1.9) détermine $\lambda_k(y)$ de façon unique puisque $G_{n,k}^{[1]}$ peut être séparé selon les coefficients des termes d'ordre 2 en τ_n .

Finalement, le résultat suivant nous permet de déterminer toutes les fonctions $\alpha_i(y)$ pour $1 \leq i \leq n-1$.

Proposition 1.2.6 S'il existe un difféomorphisme qui transforme le système (1.1) en la forme (1.2), alors $\alpha_i = \frac{\pi_i}{\pi_{i+1}}$ pour $1 \leq i \leq n-2$, et $\alpha_{n-1} = \pi_{n-1}$, où

$$\begin{cases} \pi_i = c_i \exp \left[\int \left(\exp \int \left(\delta_i^i - \delta_i^{n-1} - \delta_{i+1}^{i+1} \right) dy - \bar{B}_i^{n-1} \right) dy \right], \text{ pour } 1 \leq i \leq n-2, \\ \pi_{n-1} = c_{n-1} \exp \left(\int \left(\frac{\delta_{n-1}^{n-1} - \bar{A}_{n-1}^n}{2} \right) dy \right), \end{cases} \quad (1.10)$$

où c_i est une constante arbitraire non nulle, avec $\bar{B}_1^k = 0$ et pour $1 \leq k \leq n-1$ et $1 \leq i \leq n-1$

$$\bar{B}_i^k = \sum_{m=k-i+1}^{k-1} S_{k-i,m-k+i+1}^k \frac{\pi'_{k-m}}{\pi_{k-m}}. \quad (1.11)$$

Preuve. Pour $1 \leq i, k \leq n-1$, définissons

$$B_i^k = \frac{\pi_i'}{\pi_i} + \bar{B}_i^k. \quad (1.12)$$

Selon l'équation (1.6),

$$\frac{(A_i^k)'}{A_i^k} = \frac{(B_i^k)'}{B_i^k} - \frac{\pi_i'}{\pi_i} + \frac{\pi_{n-k+i}'}{\pi_{n-k+i}}.$$

Et comme $\delta_k^k = A_k^n + \frac{\pi_k'}{\pi_k}$, nous avons

$$\begin{aligned} \delta_i^{n-1} &= A_i^n - A_{1+i}^n - \frac{(B_i^{n-1})'}{B_i^{n-1}} + \frac{\pi_i'}{\pi_i} - \frac{\pi_{1+i}'}{\pi_{1+i}} \\ &= \delta_i^i - \delta_{1+i}^{1+i} - \left(\frac{\pi_i'}{\pi_i} + \bar{B}_i^{n-1} \right)' / \left(\frac{\pi_i'}{\pi_i} + \bar{B}_i^{n-1} \right). \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\pi_i = c_i \exp \left[\int \left(\exp \int (\delta_i^i - \delta_i^{n-1} - \delta_{1+i}^{1+i}) dy - \bar{B}_i^{n-1} \right) dy \right], \text{ pour } 1 \leq i \leq n-2,$$

où \bar{B}_i^{n-1} est défini en (1.11).

Grâce à $\delta_{n-1}^{n-1} = 2 \frac{\pi_{n-1}'}{\pi_{n-1}} + \bar{A}_{n-1}^n$, où $\bar{A}_{n-1}^n = \sum_{m=2}^{n-1} S_{1,m}^n \frac{\pi_{n-m}'}{\pi_{n-m}}$, nous obtenons

$$\pi_{n-1} = c_{n-1} \exp \left(\int \left(\frac{\delta_{n-1}^{n-1} - \bar{A}_{n-1}^n}{2} \right) dy \right).$$

■

Remarque 1.2.7 Pour le système (1.2), si nous posons $\alpha_i = s(y)$ pour $1 \leq i \leq n-1$, alors

$$\delta_{n-1}^{n-1} = A_{n-1}^n + \frac{\pi_{n-1}'}{\pi_{n-1}} = 2 \frac{\pi_{n-1}'}{\pi_{n-1}} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\pi_{n-i}'}{\pi_{n-i}}.$$

Par la définition de π_i pour $1 \leq i \leq n-1$, nous avons $\pi_k = s^{n-k}$ pour $1 \leq k \leq n-1$, ainsi

$$\delta_{n-1}^{n-1} = 2 \frac{s'}{s} + \sum_{i=2}^{n-1} i \frac{s'}{s} = l_n \frac{s'}{s},$$

où $l_n = \frac{n(n-1)}{2} + 1$. Finalement, nous avons obtenu le même résultat que celui exhibé en [136].

1.3 Résultat principal

S'il existe un difféomorphisme qui transforme le système (1.1) en la forme (1.2), alors l'équation (1.10) de la Proposition 1.2.6 donne tous α_i pour $1 \leq i \leq n-1$. Ainsi, considérons la nouvelle famille de champs de vecteurs suivante :

$$\tilde{\tau}_1 = \pi_1 \tau_1 \text{ et } \tilde{\tau}_{i+1} = \frac{1}{\alpha_i} [\tilde{\tau}_i, f], \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1. \quad (1.13)$$

Posons

$$\theta \tilde{\tau} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix} (\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \vdots & \dots & \pi_{n-1} & \tilde{l}_{2,n} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \pi_2 & \dots & \dots & \vdots \\ \pi_1 & \tilde{l}_{n,2} & \dots & \dots & \tilde{l}_{n,n} \end{pmatrix} := \tilde{\Lambda},$$

où

$$\tilde{l}_{k,j} = \theta_k(\tilde{\tau}_j) \text{ pour } 2 \leq k \leq n \text{ et } n-k+2 \leq j \leq n.$$

et considérons la forme ω suivante

$$\omega = \tilde{\Lambda}^{-1} \theta := (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T, \quad (1.14)$$

où, pour $1 \leq s \leq n$, nous avons

$$\omega_s = \sum_{m=1}^n r_{s,m} \theta_m. \quad (1.15)$$

Alors, l'algorithme suivante nous donne tous les composants de ω .

Algorithme 1.3.1

pour $1 \leq j \leq n$,

$$r_{n,j} = \dots = r_{n-j+2,j} = 0 \text{ et } r_{n-j+1,j} = 1.$$

pour $2 \leq k \leq n-1$ et $1 \leq j \leq n$,

$$r_{n-k,j} = - \sum_{i=2}^k \tilde{l}_{k,n-k+i-(j-1)} r_{n-k+i-(j-1),j},$$

et l'équation (1.15) devient : $\omega_s = \sum_{m=1}^{n-s+1} r_{s,m} \theta_m$.

Théorème 1.3.2 Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) Il existe un difféomorphisme qui transforme le système (1.1) en la forme normale d'OLDS (1.2).

2) Il existe une famille de fonctions $\alpha_i(y) \neq 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$ telle que la famille de champs de vecteurs $\tilde{\tau}_i$ pour $1 \leq i \leq n$ définie en (1.13) satisfait les conditions suivantes :

$$[\tilde{\tau}_i, \tilde{\tau}_j] = 0, \text{ pour } 1 \leq i, j \leq n. \quad (1.16)$$

3) Il existe une famille de fonctions $\alpha_i(y)$ pour $1 \leq i \leq n-1$ telle que la forme de R^n -valeur ω définie en (1.14) satisfait la condition suivante :

$$d\omega = 0. \quad (1.17)$$

Preuve. 1) \Rightarrow 2)

Supposons qu'il existe un difféomorphisme qui transforme le système (1.1) en la forme (1.2), alors nous proposons de calculer les $\alpha_i(y)$ pour $1 \leq i \leq n-1$ à partir de l'équation (1.10) de la Proposition 1.2.6. Ainsi, il est facile de montrer que $\tau_1 = \frac{1}{\pi_1} \frac{\partial}{\partial z_1}$, ce qui nous donne $\tilde{\tau}_1 = \frac{\partial}{\partial z_1}$, et ensuite, par construction nous obtenons $\tilde{\tau}_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$ pour $2 \leq i \leq n$. Par conséquent, nous avons $[\tilde{\tau}_i, \tilde{\tau}_j] = 0$ pour $1 \leq i, j \leq n$.

2) \Rightarrow 1)

Réciproquement, supposons qu'il existe $\alpha_i > 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$ tel que $[\tilde{\tau}_i, \tilde{\tau}_j] = 0$ pour $1 \leq i, j \leq n$, alors il est bien connu ([117], [80]) que nous pouvons trouver un difféomorphisme local $z = \phi(x)$ tel que

$$\phi_*(\tilde{\tau}_i) = \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

Car $\phi_*(\tilde{\tau}_i) = \frac{\partial}{\partial z_i}$ est constant, ainsi

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \phi_*(f) = \phi_*([\tilde{\tau}_i, f]) = \alpha_i \phi_*(\tilde{\tau}_{i+1}) = \alpha_i \frac{\partial}{\partial z_{i+1}},$$

donc $\frac{\partial}{\partial z_i} \phi_*(f) = \alpha_i \frac{\partial}{\partial z_{i+1}}$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Ainsi, par intégration nous obtenons : $\phi_*(f) = A(y)z + \beta(y)$.

Ensuite, comme $dh(\tilde{\tau}_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $dh(\tilde{\tau}_n) = 1$, nous obtenons $h \circ \phi^{-1} = z_n$.

2) \Leftrightarrow 3)

Finalement, afin de prouver la condition 2) du Théorème (1.3.2) est équivalente à la condition 3), il est suffisant de prouver que l'équation (1.16) est équivalente à l'équation (1.17).

Rappelons que pour deux champs de vecteurs X, Y , nous avons

$$d\omega(X, Y) = L_X(\omega(Y)) - L_Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

En posant $X = \tilde{\tau}_i$ et $Y = \tilde{\tau}_j$, nous obtenons

$$d\omega(\tilde{\tau}_i, \tilde{\tau}_j) = L_{\tilde{\tau}_i}\omega(\tilde{\tau}_j) - L_{\tilde{\tau}_j}\omega(\tilde{\tau}_i) - \omega([\tilde{\tau}_i, \tilde{\tau}_j]).$$

Car $\omega(\tilde{\tau}_j)$ et $\omega(\tilde{\tau}_i)$ sont constants, et nous avons

$$d\omega(\tilde{\tau}_i, \tilde{\tau}_j) = -\omega([\tilde{\tau}_i, \tilde{\tau}_j]).$$

Parce que ω est un isomorphisme et $(\tilde{\tau}_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base, alors l'équation (1.16) est équivalente à l'équation (1.17).

■

Remarque 1.3.3 *i) La forme ω peut être considérée comme un isomorphisme qui envoie chaque $\tilde{\tau}_i$ dans la base de vecteur canonique $\frac{\partial}{\partial z_i}$.*

ii) Le difféomorphisme $\phi(x) = z$ est donné localement comme suit :

$$z_i = \phi_i(x) = \int_{\gamma} \omega_i + \phi_i(0) \text{ pour } 1 \leq i \leq n,$$

où γ est un chemin lisse de 0 à x .

Nous pouvons donner la procédure suivante pour inclure notre méthode.

Procédure :

- (1) Calculer τ_i pour $i \in [1, n]$.
- (2) Déterminer δ_i^k pour $k \in [1, n-1]$ et $i \in [1, k]$.
- (3) Calculer π_i pour $i \in [1, n]$, afin de déterminer les α_i pour $i \in [1, n-1]$.
- (4) Calculer la nouvelle famille de champs de vecteur $\tilde{\tau}_i$ pour $i \in [1, n-1]$.
- (5) Vérifier $[\tilde{\tau}_i, \tilde{\tau}_i] = 0$, si oui, aller à l'étape suivante afin de calculer le difféomorphisme, sinon, le système ne peut pas être transformé.
- (6) Calculer ω et par intégration pour obtenir le difféomorphisme local $z = \phi(x)$.
- (7) Chercher la forme transformée par ce difféomorphisme.

L'exemple simple suivant est étudié afin d'illustrer le Théorème 1.3.2.

Exemple 1.3.4 *Considérons le système suivant*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\gamma(y)}{1+x_4} x_1 x_3, \\ \dot{x}_2 = \frac{\beta(y)}{1+x_4} x_1, \\ \dot{x}_3 = \mu(y) x_2, \\ \dot{x}_4 = \gamma(y) x_3, \\ y = x_4. \end{cases} \quad (1.18)$$

où $\gamma(y)\beta(y)\mu(y) \neq 0$, et $y \in]-1, 1[$, et nous avons :

$$\begin{cases} \theta_1 = dx_4, \\ \theta_2 = \gamma dx_3 + \gamma' x_3 dx_4, \\ \theta_3 = \gamma \mu dx_2 + 2\gamma' \gamma x_3 dx_3 + ((\gamma\mu)' x_2 + (\gamma'\gamma)' x_3^2) dx_4, \\ \theta_4 = \gamma \mu \frac{\beta}{1+x_4} dx_1 + (2\gamma'\mu + (\gamma\mu)') \gamma x_3 dx_2 \\ \quad + (2\gamma'\gamma \mu x_2 + \gamma(\gamma\mu)' x_2 + 3\gamma(\gamma'\gamma)' x_3^2) dx_3 + O^{[2]}(x_1, x_2, x_3) \theta_1. \end{cases}$$

Ainsi nous avons $\tau_1 = \frac{1+x_4}{\gamma\mu\beta} \frac{\partial}{\partial x_1}$. Par conséquent nous obtenons

$$\begin{cases} \tau_2 = \frac{1}{\gamma\mu} \frac{\partial}{\partial x_2} + (1+x_4) \gamma \frac{(\gamma\mu\beta)'}{(\gamma\mu\beta)^2} x_3 \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ \tau_3 = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x_3} - \gamma\mu(1+x_4) \frac{(\gamma\mu\beta)'}{(\gamma\mu\beta)^2} x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + \left(\frac{(\gamma\mu)'}{(\gamma\mu)^2} + \beta \frac{(\gamma\mu\beta)'}{(\gamma\mu\beta)^2} \right) \gamma x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + R_{1,3} \tau_1, \\ \tau_4 = \frac{\partial}{\partial x_4} + \left(\frac{\gamma'}{\gamma} + \frac{(\gamma\mu)'}{(\gamma\mu)} + \frac{(\gamma\mu\beta)'}{(\gamma\mu\beta)} \right) x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \left(\frac{(\gamma\mu)'}{(\gamma\mu)} + 2 \frac{(\gamma\mu\beta)'}{(\gamma\mu\beta)} \right) x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \quad + \left(\frac{1}{1+x_4} + \frac{(\gamma\mu\beta)'}{\gamma\mu\beta} \right) x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + R_{1,4}(z_3, z_2) \tau_1 + R_{2,3}(z_3^2) \tau_2. \end{cases}$$

Le calcul nous donne directement

$$\begin{cases} \delta_1^1 = 2 \frac{(\gamma\mu\beta)'}{\gamma\mu\beta}, \\ \delta_2^2 = -2 \frac{(\gamma\mu\beta)'}{\gamma\mu\beta}, \\ \delta_3^3 = 2 \frac{\gamma'}{\gamma} + \frac{(\gamma\mu)'}{\gamma\mu} + \frac{(\gamma\mu\beta)'}{\gamma\mu\beta}, \\ \delta_1^3 = 4 \frac{(\gamma\mu\beta)'}{(\gamma\mu\beta)} - \left[\frac{(\gamma\mu\beta)'}{(\gamma\mu\beta)} \right]' / \left[\frac{(\gamma\mu\beta)'}{(\gamma\mu\beta)} \right], \\ \delta_2^3 = - \left(2 \frac{\gamma'}{\gamma} + \frac{(\gamma\mu)'}{\gamma\mu} + 3 \frac{(\gamma\mu\beta)'}{\gamma\mu\beta} \right) - \left(\frac{(\gamma\mu)'}{\gamma\mu} + \frac{(\gamma\mu\beta)'}{\gamma\mu\beta} \right)' / \left(\frac{(\gamma\mu)'}{\gamma\mu} + \frac{(\gamma\mu\beta)'}{\gamma\mu\beta} \right) \end{cases}$$

Selon l'équation (1.10) de la Proposition 1.2.6, nous obtenons

$$\begin{cases} \pi_1 = c_1 \exp \left[\int (\exp \int (\delta_1^1 - \delta_1^3 - \delta_2^2) dy) dy \right] = c_1 \gamma \mu \beta, \\ \pi_2 = c_2 \exp \left[\int (\exp \int (\delta_2^2 - \delta_2^3 - \delta_3^3) dy - \frac{\pi_1'}{\pi_1}) dy \right] = c_2 \gamma \mu, \\ \pi_3 = c_3 \exp \left(\int \left(\frac{1}{2} \left(\delta_3^3 - \frac{\pi_1'}{\pi_1} - \frac{\pi_2'}{\pi_2} \right) \right) dy \right) = c_3 \gamma. \end{cases}$$

où c_1, c_2, c_3 sont les constantes arbitraires non nulles. Ainsi $\alpha_1 = \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{c_1}{c_2} \beta$, $\alpha_2 = \frac{\pi_2}{\pi_3} = \frac{c_2}{c_3} \mu$ et $\alpha_3 = \frac{\pi_3}{\pi_4} = c_3 \gamma$, et les nouveaux champs de vecteurs sont

$$\begin{cases} \tilde{\tau}_1 = c_1 (1+x_4) \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ \tilde{\tau}_2 = c_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ \tilde{\tau}_3 = c_3 \frac{\partial}{\partial x_3}, \\ \tilde{\tau}_4 = \frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{x_1}{1+x_4} \frac{\partial}{\partial x_1}. \end{cases}$$

Il est évident que $[\tilde{\tau}_i, \tilde{\tau}_j] = 0$ pour $1 \leq i, j \leq 4$. Ainsi, selon le Théorème 1.3.2, le système (1.18) peut être transformé en la forme normale d'OLDS (1.2).

Ensuite, comme

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \gamma & \gamma' x_3 \\ 0 & \gamma\mu & 2\gamma'\gamma x_3 & \left(\begin{array}{c} (\gamma\mu)' x_2 + \\ 2(\gamma'\gamma)' x_3^2 \end{array} \right) \\ \gamma\mu\beta & \left(\begin{array}{c} 2\gamma'\mu\gamma x_3 + \\ (\gamma\mu)'\gamma x_3 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} 2\gamma'\gamma\mu x_2 + \\ \gamma(\gamma\mu)' x_2 + \\ 6\gamma(\gamma'\gamma)' x_3^2 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \gamma \frac{x_1}{(1+x_4)^2} \mu\beta \\ + R \end{array} \right) \end{pmatrix},$$

où $R = O_{x_4}^{[2]}(x_1, x_2, x_3)$, nous obtenons

$$\omega = \tilde{\Lambda}^{-1} \theta = \left[d \frac{x_1}{c_1(1+x_4)}, d \left(\frac{x_2}{c_2} \right), d \left(\frac{x_3}{c_3} \right), dx_4 \right]^T.$$

Comme $\omega = d\phi$, le difféomorphisme qui transforme le système (1.18) en la forme normale d'OLDS (1.2) est

$$\phi(x) = z = \left[\frac{x_1}{c_1(1+x_4)}, \frac{x_2}{c_2}, \frac{x_3}{c_3}, x_4 \right]^T.$$

avec ce difféomorphisme le système (1.18) peut être transformé en

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 0, \\ \dot{z}_2 = \frac{c_1}{c_2} \beta(y) z_1, \\ \dot{z}_3 = \frac{c_2}{c_3} \mu(y) z_2, \\ \dot{z}_4 = c_3 \gamma(y) z_3. \end{cases}$$

Jusqu'à présent, dans cette section, nous avons seulement considéré les systèmes sans entrée. La section suivante est consacrée aux systèmes possédant des entrées.

1.4 Généralisation aux systèmes avec des entrées

Considérons un système avec des entrées de la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x, u), \\ y = h(x), \end{cases} \quad (1.19)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^q$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont les fonctions analytiques et pour $x \in \mathbb{R}^n$, $g(x, 0) = 0$.

Pour le système (1.19), la forme normale d'OLDS est de la forme suivante,

$$\begin{cases} \dot{z} = A(y)z + \beta(y) + \eta(y, u), \\ y = z_n = Cz, \end{cases} \quad (1.20)$$

où $A(y)$ et $\beta(y)$ sont donnés dans (1.2) et

$$\eta(y, u) = [\eta_1(y, u), \eta_2(y, u), \dots, \eta_n(y, u)]^T.$$

Théorème 1.4.1 *Le système (1.19) peut être transformé en la forme normale d'OLDS (1.20) par un difféomorphisme si et seulement si*

- i) *une des conditions équivalentes du Théorème 1.3.2 est satisfaite.*
- ii) *$[g, \tilde{\tau}_i] = 0$ pour $1 \leq i \leq n - 1$.*

Preuve. A partir du Théorème 1.3.2, nous pouvons dire qu'il existe un difféomorphisme ϕ tel que

$$\phi_*(f) = A(y)z + \beta(y).$$

Pour $1 \leq i \leq n - 1$, car $\phi_*(\tilde{\tau}_i) = \frac{\partial}{\partial z_i}$ est constant, ainsi nous avons

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \phi_*(g) = \phi_*([g, \tilde{\tau}_i]) = 0.$$

En conséquence $\phi_*(g) = \eta(y, u)$, et finalement nous obtenons la forme (1.20). ■

Remarque 1.4.2 Si $g(x, u) = g_1(x)u_1 + \dots + g_q(x)u_q$, et les deux conditions i) et ii) du Théorème 1.4.1 sont vérifiées, alors

$$\eta(y, u) = B_1(y)u_1 + \dots + B_q(y)u_q.$$

Nous allons étudier certains cas particuliers pour le terme $\eta(y, u)$.

Corollaire 1.4.3 Supposons que les conditions i) et ii) du Théorème 1.4.1 sont vérifiées,

- a) Si $[g, \tilde{\tau}_n] = 0$, alors $\eta(y, u) = \eta(u)$.
 b) Si $g(x, u) = g_1(x)u_1 + \dots + g_q(x)u_q$ et

$$[g_k, \tilde{\tau}_i] = 0, \text{ pour } 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq k \leq q,$$

alors

$$\eta(y, u) = B_1u_1 + \dots + B_qu_q,$$

Exemple 1.4.4 Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\gamma(y)}{1+x_3}x_1x_2 + \frac{x_1}{1+x_3}u, \\ \dot{x}_2 = \frac{\mu(y)}{1+x_3}x_1, \\ \dot{x}_3 = \gamma(y)x_2 + u, \\ y = x_3. \end{cases} \quad (1.21)$$

où $\gamma(y)\mu(y) \neq 0$, et $y \in]-1, 1[$. Et nous avons

$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{1+x_3}{\gamma(y)\mu(y)} \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ \tau_2 = \frac{1}{\gamma(y)} \frac{\partial}{\partial x_2} + \left((1+x_3) \frac{(\gamma(y)\mu(y))'}{\gamma(y)\mu^2(y)} \right) x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ \tau_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + \left(\frac{(\mu(y)\gamma(y))'}{(\mu(y)\gamma(y))} + \frac{\gamma'(y)}{\gamma(y)} \right) x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \quad + \left(\frac{1}{1+x_3} - \frac{(\gamma(y)\mu(y))'}{\gamma(y)\mu(y)} \right) x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}. \end{cases}$$

Et nous obtenons

$$\begin{cases} \delta_1^1 = 0, \\ \delta_2^2 = 2 \frac{\gamma'(y)}{\gamma(y)} + \frac{(\mu(y)\gamma(y))'}{(\mu(y)\gamma(y))}, \\ \delta_1^2 = - \frac{(\mu(y)\gamma(y))'}{(\mu(y)\gamma(y))} - 2 \frac{\gamma'(y)}{\gamma(y)} - \left(\frac{(\mu(y)\gamma(y))'}{(\mu(y)\gamma(y))} \right)' / \left(\frac{(\mu(y)\gamma(y))'}{(\mu(y)\gamma(y))} \right) \end{cases}$$

Ensuite, de l'équation (1.10), nous en déduisons

$$\begin{cases} \pi_1 = c_1 \exp \left[\int (\exp \int (\delta_1^1 - \delta_1^2 - \delta_2^2) dy) dy \right] = c_1 \gamma(y) \mu(y), \\ \pi_2 = c_2 \exp \left(\int \left(\frac{1}{2} \left(\delta_2^2 - \frac{\pi_1'}{\pi_1} \right) \right) dy \right) = c_2 \gamma(y). \end{cases}$$

ce qui nous donne $\alpha_1(y) = \frac{c_1}{c_2} \mu(y)$ et $\alpha_2(y) = c_2 \gamma(y)$.

Ainsi nous obtenons

$$\begin{cases} \tilde{\tau}_1 = c_1 (1+x_3) \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ \tilde{\tau}_2 = c_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ \tilde{\tau}_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{x_1}{1+x_3} \frac{\partial}{\partial x_1}. \end{cases}$$

Car $g = \frac{x_1}{1+x_3} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} = \tilde{\tau}_3$ alors $[g, \tilde{\tau}_1] = [g, \tilde{\tau}_2] = 0$ et le système (1.21) est transformé en

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 0, \\ \dot{z}_2 = \frac{c_1}{c_2} \mu(y) z_1, \\ \dot{z}_3 = c_2 \gamma(y) z_2 + u, \\ y = z_3. \end{cases}$$

par le difféomorphisme suivant :

$$\phi(x) = z = \left[\frac{x_1}{c_1(1+x_3)}, \frac{x_2}{c_2}, x_3 \right]^T.$$

Enfin, afin de résoudre le problème d'inversion à gauche, la condition d'OMC (Observability Matching Condition) pour le système (1.19) avec $q = 1$ est de la forme suivante

$$\begin{cases} L_g L_f^{i-1} h = 0, \forall x \in U, 1 \leq i \leq n-1, \\ L_g L_f^{n-1} h \neq 0. \end{cases}$$

Remarque 1.4.5 La condition d'OMC est une condition suffisante telle que le degré relatif du système est égal à la dimension du système.

Corollaire 1.4.6 Si les conditions *i)* et *ii)* du Théorème 1.4.1 sont vérifiées et que la condition d'OMC est satisfaite, alors

$$\begin{aligned} \eta(y, u) &= [\eta_1(y)u, 0, \dots, 0]^T \\ \text{et} \\ \eta_1(y) &\neq 0. \end{aligned}$$

Remarque 1.4.7 La condition d'OMC pour le système (1.19) avec $q = 1$ est équivalente à $g \in \text{span}\{\tilde{\tau}_1\}$.

Nous donnons un autre exemple afin d'illustrer le Corollaire 1.4.6.

Exemple 1.4.8 Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = \mu(y) x_1 + \mu(y) x_1^2 + \frac{x_2}{1+x_1} u, \\ \dot{x}_3 = \gamma(y) \frac{x_2}{1+x_1}, \\ y = x_3. \end{cases} \quad (1.22)$$

où $\gamma(y) \mu(y) \neq 0$ et $y \in]-1, 1[$.

Nous avons

$$\tau_1 = \frac{1}{\gamma(y) \mu(y)} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\gamma(y) \mu(y)} \frac{x_2}{1+x_1} \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

A partir de l'équation (1.10) de la Proposition 1.2.6, nous pouvons déterminer $\alpha_1(y) = \frac{c_1}{c_2}\mu(y)$ et $\alpha_2(y) = c_2\gamma(y)$. Ainsi nous avons

$$\begin{cases} \tilde{\tau}_1 = c_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + c_1 \frac{x_2}{1+x_1} \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ \tilde{\tau}_2 = c_2 (1+x_1) \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ \tilde{\tau}_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}. \end{cases}$$

Comme $g \in \text{span}\{\tilde{\tau}_1\}$, la condition d'OMC est satisfaite et le système (1.22) peut être transformé par le difféomorphisme suivant

$$\phi(x) = z = \left[\frac{x_1}{c_1}, \frac{x_2}{c_2(1+x_1)}, x_3 \right]^T.$$

et nous obtenons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \frac{u}{c_1}, \\ \dot{z}_2 = \frac{c_1}{c_2}\mu(y) z_1, \\ \dot{z}_3 = c_2\gamma(y) z_2, \\ y = z_3. \end{cases} \quad (1.23)$$

Remarque 1.4.9 Du point de vue de la transmission, u représente le message confidentiel à crypter si nous sommes dans une méthode de cryptage par modulation (Cette méthode est présentée dans le chapitre 5, voir figure 5.6). Ainsi dans le but de reconstruction de u du système (1.19), g doit être choisi attentivement tel que la condition d'OMC dans le Corollaire 1.4.6 soit satisfait.

Maintenant nous allons concevoir un observateur pour le système (1.23). Nous supposons que u , et tous les états sont bornés. Car $\mu(y) \gamma(y) \neq 0$, ainsi le problème d'inversion à gauche pour le système (1.23) peut être résolu par un observateur étape par étape comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_1 = E_2 \kappa_1 \text{sign}(\tilde{z}_1 - \hat{z}_1) \\ \dot{\hat{z}}_2 = E_1 \left(\frac{c_1}{c_2} \mu(y) \hat{z}_1 + \kappa_2 \text{sign}(\tilde{z}_2 - \hat{z}_2) \right) \\ \dot{\hat{z}}_3 = c_2 \gamma(y) \hat{z}_2 + \kappa_3 \text{sign}(z_3 - \hat{z}_3) \end{cases}$$

où les variables auxiliaires sont définies comme suit :

$$\begin{cases} \tilde{z}_2 = \hat{z}_2 + E_1 \frac{\kappa_3 \text{sign}(z_3 - \hat{z}_3)}{c_2 \gamma(y)} \\ \tilde{z}_1 = \hat{z}_1 + E_2 \frac{c_2 \kappa_2 \text{sign}(\tilde{z}_2 - \hat{z}_2)}{c_1 \mu(y)} \\ \tilde{u} = E_3 c_1 \kappa_1 \text{sign}(\tilde{z}_1 - \hat{z}_1) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \text{Si } z_3 = \hat{z}_3, E_1 = 1, \text{ sinon } E_1 = 0 \\ \text{Si } \tilde{z}_2 = \hat{z}_2 \text{ et } E_1 = 1, E_2 = 1, \text{ sinon } E_2 = 0 \\ \text{Si } \tilde{z}_1 = \hat{z}_1 \text{ et } E_2 = 1, E_3 = 1, \text{ sinon } E_3 = 0 \end{cases}$$

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé les conditions géométriques nécessaires et suffisantes qui nous permettent de déterminer si un système non linéaire peut être transformé localement en la forme normale d'OLDS au moyen d'un difféomorphisme et d'une injection de sortie. Ensuite, une généralisation de nos résultats a été étudiée pour une classe de systèmes non linéaires possédant des entrées. Enfin, quelques corollaires utiles ont été analysés afin de résoudre le problème de l'inversion à gauche.

Chapitre 2

Forme Normale d'Observabilité Linéaire Dépendante des Sorties Multiples

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons considéré des systèmes non linéaires avec mono-sortie. Dans ce chapitre, nous allons traiter les systèmes avec des sorties multiples de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = (h_1(x), \dots, h_m(x))^T \end{cases} \quad (2.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont analytiques.

En 1985, le problème de déterminer les conditions géométriques suffisantes et nécessaires, qui garantissent l'existence d'un difféomorphisme local pour transformer le système non linéaire (2.1) en une forme normale canonique (2.2) pour $p = 0$, $m \geq 1$, $\alpha_{i,j} = 1$, a été résolu partiellement en [102] et a été résolu complètement en [158].

En 2004, pour $p = 0$, $m = 1$ et $\alpha_{i,j}(y) = s(y)$, [136] a donné les conditions géométriques suffisantes et nécessaires pour transformer le système non linéaire sous la forme normale canonique avec une modification scalaire du temps qui dépend de la sortie du système. En [68], l'auteur a donné des conditions géométriques duales de [136].

Dans ce chapitre, nous traitons le problème suivant [175] : Trouver les conditions suffisantes qui garantissent l'existence d'un difféomorphisme local $\phi(x) = z$ afin de transformer le système (2.1) en

$$\begin{cases} \dot{z} = A(y)z + \beta(y) \\ y = Cz \end{cases} \quad (2.2)$$

où

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}, \beta(y) = \begin{bmatrix} \beta_1(y_1) \\ \beta_2(y_1, y_2) \\ \vdots \\ \beta_m(y_1, \dots, y_m) \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \end{bmatrix}$$

et

$$A(y) = \begin{bmatrix} A_1(y_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2(y_1, y_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m(y_1, \dots, y_m) \end{bmatrix}$$

avec

$$z_i = \begin{bmatrix} z_{i,1} \\ z_{i,2} \\ \vdots \\ z_{i,k_i} \end{bmatrix}, \beta_i(y_1, \dots, y_i) = \begin{bmatrix} \beta_{i,1}(y_1, \dots, y_i) \\ \beta_{i,2}(y_1, \dots, y_i) \\ \vdots \\ \beta_{i,k_i}(y_1, \dots, y_i) \end{bmatrix},$$

$$C_i = [0 \ \cdots \ 0 \ 1]_{1 \times k_i}$$

pour $i \in [1, m]$, k_i sont les indices d'observabilité [102], et

$$A_i(y_1, \dots, y_i) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_{i,1}(y_1, \dots, y_i) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_{i,k_i-1}(y_1, \dots, y_i) & 0 \end{bmatrix}$$

où $\alpha_{i,j}(y_1, \dots, y_i) \neq 0$.

Dans ce chapitre, nous donnerons les conditions géométriques suffisantes pour garantir l'existence d'un difféomorphisme local et d'une injection de sortie afin de transformer le système (2.1) en la forme normale (2.2). Ce genre de linéarisation sera appelé la forme normale d'Observabilité Linéaire Dépendant des Sorties Multiples (forme normale d'OLDMS) et elle généralisera le résultat obtenu dans le chapitre précédent sur le système avec mono-sortie.

Dans la section 2.2, nous introduirons des notations. Ensuite, la section 2.3 présentera des résultats techniques avant de donner notre méthode. Finalement, dans la section 2.5, nous généraliserons notre résultat aux systèmes avec des entrées, et certains corollaires utiles seront discutés.

2.2 Notations

Considérons le système (2.1), avec un ordre possible de h_i , nous supposons toujours qu'il existe les $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m \geq 1$ et $\sum_{i=1}^m k_i = n$ tels que

$$\theta = (\theta_1^1, \dots, \theta_1^{k_1}, \dots, \theta_m^1, \dots, \theta_m^{k_m})^T \quad (2.3)$$

où

$$\theta_i^j = dL_f^{j-1} h_i$$

pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq k_i$.

Ainsi le système (2.1) est observable. Les nombres entiers $(k_i)_{1 \leq i \leq m}$ sont appelés les indices d'observabilité du système (2.1). Pour une description

claire et plus détaillée au sujet de cette hypothèse, voir [102]. Evidemment la liste de ces nombres entiers n'est pas unique.

Pour $1 \leq l \leq m$ et $1 \leq j \leq k_l$, notons $(\tau_{i,1})_{1 \leq i \leq m}$ la famille de champs de vecteurs définie par

$$\theta_l^j(\tau_{i,1}) = \begin{cases} 1, & l = i, j = k_i \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.4)$$

et par induction nous pouvons construire les champs de vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} \tau_{i,r} &= [\tau_{i,r-1}, f] \\ &= (-1)^{r-1} \text{ad}_f^{r-1} \tau_{i,r-1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

pour $2 \leq r \leq k_i$.

La famille $\tau = (\tau_{i,j})_{1 \leq i \leq m \text{ et } 1 \leq j \leq k_i}$ a été premièrement adressée en [101] pour $p = 0$ et $m = 1$ et il a prouvé en [101] que le système (2.1) peut être transformé en la forme normale (2.2) si et seulement si nous avons

$$[\tau_{1,i}, \tau_{1,j}] = 0 \text{ pour } 1 \leq i, j \leq n. \quad (2.6)$$

2.3 Résultats techniques

Dans cette section, nous allons donner les résultats correspondants à ceux du Théorème 1.3.2 donnés au Chapitre 1, pour $\alpha_{i,j} \neq 1$.

Lemme 2.3.1 *Pour un système de la forme (2.2) nous avons, pour $1 \leq l \leq m$, $1 \leq t \leq k_l$,*

$$\begin{aligned} \tau_{l,t} &= \frac{1}{\pi_{l,t}} \frac{\partial}{\partial z_{l,t}} + \left(\sum_{r=1}^l \left(A_{r,t-1}^{l,t}(y_1, \dots, y_l) z_{r,k_r-1} \right) \right) \frac{\partial}{\partial z_{l,t-1}} \\ &\quad + \eta_{t-1}^{l,t}(y_1, \dots, y_l) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{t-2} \left(\sum_{r=1}^l \left(A_{r,i}^{l,t}(y_1, \dots, y_l) z_{r,k_r-t+i} \right) \right. \\ &\quad \quad \left. + \sum_{j=k_r-t+i+1}^{k_r-1} \sum_{s=j}^{k_r-1} T_{r,j,s}^{l,t}(y_1, \dots, y_l) z_{r,j} z_{r,s} \right) \frac{\partial}{\partial z_{l,i}} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{t-2} \left(\sum_{r=1}^l \left(\sum_{j=k_r-t+i+1}^{k_r} \eta_{r,i}^{l,t}(y_1, \dots, y_l) z_{r,j} \right) \right) \frac{\partial}{\partial z_{l,i}}, \\ &\quad + O_{(y_1, \dots, y_l)}^{[3]} \left(\begin{matrix} z_{1,k_1-t+i+1}, \dots, z_{1,k_1-1}, \\ \dots, z_{l,k_l-t+i+1}, \dots, z_{l,k_l-1} \end{matrix} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

pour $r \in [1, l]$, $i \in [1, t-2]$, où $\pi_{l,k_l} = 1$ et $\pi_{l,t-1} = \pi_{l,t} \alpha_{l,t-1}$ pour $2 \leq t \leq k_l$, $\eta_i^{l,t}$ et $T_{r,j,q}^{l,t}$ sont des fonctions lisses des (y_1, \dots, y_l) ,

$O_{(y_1, \dots, y_l)}^{[3]} \left(\begin{matrix} z_{1,k_1-t+i+1}, \dots, z_{1,k_1-1}, \\ \dots, z_{l,k_l-t+i+1}, \dots, z_{l,k_l-1} \end{matrix} \right)$ représente les termes résiduels d'ordre

supérieur à 2 paramétrés par (y_1, \dots, y_l) et

$$A_{r,i}^{l,t}(y_1, \dots, y_l) = (-1)^{t-i+1} \left(\begin{array}{c} S_{r,t-i,1}^{l,t} \frac{\partial_{y_r} \pi_{l,i}}{\pi_{l,i}^2} \\ + \sum_{m=t-i+1}^{t-1} S_{r,t-i,m-t+i+1}^{l,t} \frac{\partial_{y_r} \pi_{l,t-m}}{\pi_{l,t-m}^2} \left(\prod_{j=t-i+1}^m \alpha_{l,k-j} \right) \end{array} \right) \pi_{r,k_r-t+i}, \quad (2.8)$$

où $\partial_{y_r} \pi_{l,i}$ représente $\frac{\partial}{\partial y_r} \pi_{l,i}(y_1, \dots, y_l)$, les $S_{r,t-i,1}^{l,t}$ et $S_{r,t-i,m-t+i+1}^{l,t}$ sont définis comme suit

$$S_{r,j,1}^{l,t} = 1, S_{r,j,s}^{l,t} = S_{r,j-1,s}^{l,t-1} + S_{r,j,s-1}^{l,t-1}, \quad (2.9)$$

pour $l \in [1, m]$, $r \in [1, l]$, $t \in [2, k_l]$, $j \in [1, t-1]$, $s \in [1, t-j]$.

Preuve. Pour un système de la forme (2.2), pour $1 \leq l \leq m$, $\tau_{l,1} = \frac{1}{\pi_{l,1}} \frac{\partial}{\partial z_{l,1}}$, alors nous utilisons l'équation (2.5) et nous obtenons

$$\begin{aligned} \tau_{1,t} &= \frac{1}{\pi_{1,t}} \frac{\partial}{\partial z_{1,t}} + (A_{1,t-1}^{1,t}(y_1) z_{1,k_1-1} + \eta_{t-1}^{1,t}(y_1)) \frac{\partial}{\partial z_{1,t-1}} \\ &+ \sum_{i=1}^{t-2} \left(A_{1,i}^{1,t}(y_1) z_{1,k_1-t+i} + \sum_{j=k_1-t+i+1}^{k_1-1} \sum_{l=j}^{k_1-1} T_{j,l}^{1,t}(y_1) z_{1,j} z_{1,l} \right) \frac{\partial}{\partial z_{1,i}} \\ &+ \sum_{i=1}^{t-2} \left(\sum_{j=k_1-t+i+1}^{k_1} \eta_i^{1,t}(y_1) z_{1,j} + O_{y_1}^{[3]}(z_{1,k_1-t+i+1}, \dots, z_{1,k_1-1}) \right) \frac{\partial}{\partial z_{1,i}}, \end{aligned}$$

pour $1 \leq t \leq k_1$ et

$$\begin{aligned} \tau_{2,t} &= \frac{1}{\pi_{2,t}} \frac{\partial}{\partial z_{2,t}} + \left(A_{1,t-1}^{2,t}(y_1, y_2) z_{1,k_1-1} + A_{2,t-1}^{2,t}(y_1, y_2) z_{2,k_2-1} + \eta_{t-1}^{2,t}(y_1, y_2) \right) \frac{\partial}{\partial z_{2,t-1}} \\ &+ \sum_{i=1}^{t-2} \left(\begin{array}{c} A_{1,i}^{2,t}(y_1, y_2) z_{1,k_1-t+i} \\ + \sum_{j=k_2-t+i+1}^{k_2-1} \sum_{l=j}^{k_2-1} T_{1,j,l}^{2,t}(y_1, y_2) z_{1,j} z_{1,l} \\ + \sum_{j=k_2-t+i+1}^{k_2-1} \sum_{l=j}^{k_2-1} T_{2,j,l}^{2,t}(y_1, y_2) z_{2,j} z_{2,l} \end{array} \right) \frac{\partial}{\partial z_{2,i}} \\ &+ \sum_{i=1}^{t-2} \left(\begin{array}{c} \sum_{j=k_1-t+i+1}^{k_1} \eta_{1,i}^{2,t}(y_1, y_2) z_{1,j} + \sum_{j=k_2-t+i+1}^{k_2} \eta_{2,i}^{2,t}(y_1, y_2) z_{2,j} \\ + O_{(y_1, y_2)}^{[3]}(z_{1,k_1-t+i+1}, \dots, z_{1,k_1-1}, z_{2,k_2-t+i+1}, \dots, z_{2,k_2-1}) \end{array} \right) \frac{\partial}{\partial z_{2,i}}, \end{aligned}$$

pour $1 \leq t \leq k_2$. Alors par induction, pour $1 \leq t \leq k_l$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \tau_{l,t} = & \frac{1}{\pi_{l,t}} \frac{\partial}{\partial z_{l,t}} + \left(\sum_{r=1}^l \left(A_{r,t-1}^{l,t} (y_1, \dots, y_l) z_{r,k_r-1} \right) \right) \frac{\partial}{\partial z_{l,t-1}} \\ & + \eta_{t-1}^{l,t} (y_1, \dots, y_l) \\ & + \sum_{i=1}^{t-2} \left(\sum_{r=1}^l \left(A_{r,i}^{l,t} (y_1, \dots, y_l) z_{r,k_r-t+i} \right) \right. \\ & \left. + \sum_{j=k_r-t+i+1}^{k_r-1} \sum_{s=j}^{k_r-1} T_{r,j,s}^{l,t} (y_1, \dots, y_l) z_{r,j} z_{r,s} \right) \frac{\partial}{\partial z_{l,i}} \\ & + \sum_{i=1}^{t-2} \left(\sum_{r=1}^l \left(\sum_{j=k_r-t+i+1}^{k_r} \eta_{r,i}^{l,t} (y_1, \dots, y_l) z_{r,j} \right) \right. \\ & \left. + O_{(y_1, \dots, y_l)}^{[3]} \left(\begin{array}{c} z_{1,k_1-t+i+1}, \dots, z_{1,k_1-1}, \\ \dots, z_{l,k_l-t+i+1}, \dots, z_{l,k_l-1} \end{array} \right) \right) \frac{\partial}{\partial z_{l,i}}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A_{r,i}^{l,t} (y_1, \dots, y_l) = & (-1)^{t-i+1} \left(\begin{array}{c} S_{r,t-i,1}^{l,t} \frac{\partial_{y_r} \pi_{l,i}}{\pi_{l,i}^2} \\ + \sum_{m=t-i+1}^{t-1} S_{r,t-i,m-t+i+1}^{l,t} \frac{\partial_{y_r} \pi_{l,t-m}}{\pi_{l,t-m}^2} \left(\prod_{j=t-i+1}^m \alpha_{l,k-j} \right) \end{array} \right) \pi_{r,k_r-t+i}, \end{aligned}$$

avec les coefficients $S_{r,j,s}^{l,t}$ donnés par la loi (2.9). ■

Afin de déterminer les $\alpha_{i,j}(y_1, \dots, y_i)$ pour $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq k_i - 1$, comme ce que nous avons fait pour la forme normale d'OLDS, nous imposons aussi pour $1 \leq i, l \leq m$,

$$\frac{\partial}{\partial z_{i,j}} h_l \circ \phi^{-1} = \begin{cases} 1, & \text{si } l = i \text{ et } j = k_i, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Maintenant, nous allons donner les équations différentielles qui nous permet de calculer les fonctions $\alpha_{i,j}(y_1, \dots, y_i)$ pour $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq k_i - 1$.

Proposition 2.3.2 *S'il existe un difféomorphisme qui transforme le système (2.1) en la forme (2.2), alors pour $1 \leq l \leq m$, $1 \leq t \leq k_l - 1$, $1 \leq s \leq l - 1$,*

$$\begin{cases} [\tau_{l,t}, \tau_{s,k_s}] = \lambda_{l,t}^s \tau_{l,t} \text{ mod } \text{span} \{ \tau_{l,1}, \dots, \tau_{l,t-1} \} \\ [\tau_{l,t}, \tau_{l,k_l}] = \lambda_{l,t}^l \tau_{l,t} + G_{l,k_l,t}^{[1]} + R_{l,t} \end{cases}$$

où

$$G_{l,k_l,t}^{[1]} = \left[\sum_{i=1}^{t-1} \left(\frac{1}{\pi_{l,t}} T_{l,t,k_l-t+i}^{l,t} z_{l,k_l-t+i} \right) \frac{\partial}{\partial z_{l,i}} \right] + \frac{1}{\pi_{l,t}} T_{l,t,t}^{l,t} z_{l,t} \frac{\partial}{\partial z_{l,2t-k_l}},$$

et

$$R_{l,t} = \sum_{i=1}^{t-1} \left(\begin{array}{c} \sum_{j=k_l-t+i+1}^{k_l} \bar{\eta}_i^{l,t} (y_1, \dots, y_l) \\ + O_{(y_1, \dots, y_l)}^{[2]} \left(\begin{array}{c} z_{1,k_1-t+i+1}, \dots, z_{1,k_1-1}, \\ \dots, z_{l,k_l-t+i+1}, \dots, z_{l,k_l-1} \end{array} \right) \end{array} \right) \frac{\partial}{\partial z_{l,i}}$$

et

$$\begin{cases} \lambda_{l,t}^s = -\frac{\partial_{y_s} \pi_{l,t}}{\pi_{l,t}}, \\ \lambda_{l,t}^l = \text{diag}\{\delta_1^{l,t}(y_1, \dots, y_l), \dots, \delta_i^{l,t}(y_1, \dots, y_l), \dots, \delta_t^{l,t}(y_1, \dots, y_l), 0, \dots, 0\}, \end{cases} \quad (2.10)$$

pour $i \in [1, t]$, où $\partial_{y_s} \pi_{l,t}$ signifie $\frac{\partial}{\partial y_s} [\pi_{l,t}(y_1, \dots, y_l)]$, $\delta_t^{l,t} = A_{l,t}^{l,k_l} + \frac{\partial_{y_l} \pi_{l,t}}{\pi_{l,t}}$ et

$$\delta_i^{l,t} = A_{l,i}^{l,k_l} - A_{l,k_l-t+i}^{l,k_l} - \frac{\partial_{y_l} (A_{l,i}^{l,t})}{A_{l,i}^{l,t}}$$

pour $1 \leq i \leq t-1$, et $A_{l,i}^{l,t}$ est donné en (2.8).

Preuve. Selon l'équation (2.7), pour $1 \leq l \leq m$, $1 \leq t \leq k_l - 1$, nous avons

$$\begin{aligned} \tau_{l,t} &= \frac{1}{\pi_{l,t}} \frac{\partial}{\partial z_{l,t}} + \left(\sum_{r=1}^l \left(A_{r,t-1}^{l,t}(y_1, \dots, y_l) z_{r,k_r-1} \right) \right) \frac{\partial}{\partial z_{l,t-1}} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{t-2} \left(\sum_{r=1}^l \left(+ \sum_{j=k_r-t+i+1}^{k_r-1} \sum_{s=j}^{k_r-1} T_{r,j,s}^{l,t}(y_1, \dots, y_l) z_{r,j} z_{r,s} \right) \right) \frac{\partial}{\partial z_{l,i}} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{t-2} \left(\sum_{r=1}^l \left(\sum_{j=k_r-t+i+1}^{k_r} \eta_{r,i}^{l,t}(y_1, \dots, y_l) z_{r,j} \right) \right) \frac{\partial}{\partial z_{l,i}}, \\ &\quad + O_{(y_1, \dots, y_l)}^{[3]} \left(\begin{matrix} z_{1,k_1-t+i+1}, \dots, z_{1,k_1-1}, \\ \dots, z_{l,k_l-t+i+1}, \dots, z_{l,k_l-1} \end{matrix} \right) \end{aligned}$$

alors nous pouvons calculer

$$[\tau_{l,t}, \tau_{s,k_s}] = -\frac{\partial_{y_s} \pi_{l,t}}{\pi_{l,t}} \frac{\partial}{\partial z_{l,t}} \text{ mod span } \{\tau_{l,1}, \dots, \tau_{l,t-1}\},$$

En définissant $\lambda_{l,t}^s = -\frac{\partial_{y_s} \pi_{l,t}}{\pi_{l,t}}$, nous obtenons

$$[\tau_{l,t}, \tau_{s,k_s}] = \lambda_{l,t}^s \tau_{l,t} \text{ mod span } \{\tau_{l,1}, \dots, \tau_{l,t-1}\}$$

De plus, comme

$$\begin{aligned} [\tau_{l,t}, \tau_{l,k_l}] &= \left(A_{l,t}^{l,k_l} + \frac{\partial_{y_l} \pi_{l,t}}{\pi_{l,t}} \right) \frac{1}{\pi_{l,t}} \frac{\partial}{\partial z_{l,t}} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{t-1} \left(\left(A_{l,i}^{l,k_l} - A_{l,k_l-t+i}^{l,k_l} - \frac{\partial_{y_l} (A_{l,i}^{l,t})}{A_{l,i}^{l,t}} \right) A_{l,i}^{l,t} z_{l,k_l-t+i} \right) \frac{\partial}{\partial z_{l,i}} \\ &\quad \quad \quad + \frac{1}{\pi_{l,t}} T_{l,t,k_l-t+i}^{l,t} z_{l,k_l-t+i} \\ &\quad \quad \quad + \frac{1}{\pi_{l,t}} T_{l,t,t}^{l,t} z_{l,t} \frac{\partial}{\partial z_{l,2t-k_l}} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{t-1} \left(\sum_{j=k_l-t+i+1}^{k_l} \bar{\eta}_i^{l,t}(y_1, \dots, y_l) \right) \frac{\partial}{\partial z_{l,i}} \\ &\quad \quad \quad + O_{(y_1, \dots, y_l)}^{[2]} \left(\begin{matrix} z_{1,k_1-t+i+1}, \dots, z_{1,k_1-1}, \\ \dots, z_{l,k_l-t+i+1}, \dots, z_{l,k_l-1} \end{matrix} \right) \end{aligned}$$

Posons

$$\lambda_{l,t}^l(y_1, \dots, y_l) = \text{diag}\{\delta_1^{l,t}(y_1, \dots, y_l), \dots, \delta_i^{l,t}(y_1, \dots, y_l), \dots, \delta_t^{l,t}(y_1, \dots, y_l), \dots, 0, \dots, 0\},$$

$$\text{où } \delta_t^{l,t} = A_{l,t}^{l,k_l} + \frac{\partial_{y_l} \pi_{l,t}}{\pi_{l,t}} \text{ et}$$

$$\delta_i^{l,t} = A_{l,i}^{l,k_l} - A_{l,k_l-t+i}^{l,k_l} - \frac{\partial_{y_l} (A_{l,i}^{l,t})}{A_{l,i}^{l,t}}$$

pour $1 \leq i \leq t-1$, alors

$$[\pi_{l,t}, \pi_{l,k_l}] = \lambda_{l,t}^l \pi_{l,t} + G_{l,k_l,t}^{[1]} + R_{l,t}. \quad (2.11)$$

■

Remarque 2.3.3 *L'équation (2.11) détermine de façon unique $\lambda_{l,t}^l$ puisque $G_{l,k_l,t}^{[1]}$ peut être séparé selon les coefficients des termes d'ordre 2 en π_{l,k_l} .*

Finalement, le résultat suivant nous permet de déterminer toutes les fonctions $\alpha_{l,i}(y_1, \dots, y_l)$ pour $1 \leq l \leq m$ et $1 \leq i \leq k_l - 1$.

Proposition 2.3.4 *S'il existe un difféomorphisme qui transforme le système (2.1) en la forme (2.2), alors $\alpha_{l,i} = \frac{\pi_{l,i}}{\pi_{l,i+1}}$ pour $1 \leq l \leq m$ et $1 \leq i \leq k_l - 2$, et $\alpha_{l,k_l-1} = \pi_{l,k_l-1}$, où $\pi_{l,i}$ pour $1 \leq i \leq k_l - 1$ est la solution des équations différentielles partielles suivantes :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial_{y_s} \pi_{l,i}}{\pi_{l,i}} = -\lambda_{l,i}^s(y_1, \dots, y_l), \text{ pour } 1 \leq s \leq l-1 \text{ et } 1 \leq i \leq k_l - 1 \\ \frac{\partial_{y_l} \pi_{l,i}}{\pi_{l,i}} = \exp \int (\delta_i^{l,i} - \delta_i^{l,k_l-1} - \delta_{i+1}^{l,i+1}) dy_l - \bar{B}_{l,i}^{l,k_l-1}, \text{ pour } 1 \leq i \leq k_l - 2 \\ \frac{\partial_{y_l} \pi_{l,k_l-1}}{\pi_{l,k_l-1}} = \frac{\delta_{k_l-1}^{l,k_l-1} - A_{l,k_l-1}^{l,k_l}}{2} \end{array} \right. \quad (2.12)$$

avec $\bar{B}_{l,1}^{l,0} = 0$ et pour $1 \leq i, t \leq k_l - 1$

$$\bar{B}_{l,i}^{l,t} = \sum_{m=t-i+1}^{t-1} S_{t-i,m-t+i+1}^{l,t} \frac{\partial_{y_l} \pi_{l,t-m}}{\pi_{l,t-m}}. \quad (2.13)$$

Preuve. Evidemment, selon l'équation (2.10), nous avons

$$\frac{\partial_{y_s} \pi_{l,i}}{\pi_{l,i}} = -\lambda_{l,i}^s(y_1, \dots, y_l), \text{ pour } 1 \leq s \leq l-1 \text{ et } 1 \leq i \leq k_l - 1$$

Définissons

$$B_{l,i}^{l,t} = \frac{\partial_{y_l} \pi_{l,i}}{\pi_{l,i}} + \bar{B}_{l,i}^{l,t}. \quad (2.14)$$

où $1 \leq l \leq m$ et $1 \leq i, t \leq k_l - 1$.

Selon l'équation (2.8), pour $1 \leq i, k \leq k_l - 1$,

$$\frac{\partial_{y_l} (A_{l,i}^{l,t})}{A_{l,i}^{l,t}} = \frac{\partial_{y_l} (B_{l,i}^{l,t})}{B_{l,i}^{l,t}} - \frac{\partial_{y_l} \pi_{l,i}}{\pi_{l,i}} + \frac{\partial_{y_l} \pi_{l,k_l-t+i}}{\pi_{l,k_l-t+i}}.$$

Comme $\delta_t^{l,t} = A_{l,t}^{l,k_l} + \frac{\partial_{y_l} \pi_{l,t}}{\pi_{l,t}}$, ainsi

$$\begin{aligned} \delta_i^{l,k_l-1} &= A_{l,i}^{l,k_l} - A_{l,1+i}^{l,k_l} - \frac{\partial_{y_l} (B_{l,i}^{l,k_l-1})}{B_{l,i}^{l,k_l-1}} + \frac{\partial_{y_l} \pi_{l,i}}{\pi_{l,i}} - \frac{\partial_{y_l} \pi_{l,1+i}}{\pi_{l,1+i}} \\ &= \delta_i^{l,i} - \delta_{1+i}^{l,1+i} - \partial_{y_l} \left(\frac{\partial_{y_l} \pi_{l,i}}{\pi_{l,i}} + \bar{B}_{l,i}^{l,k_l-1} \right) / \left(\frac{\partial_{y_l} \pi_{l,i}}{\pi_{l,i}} + \bar{B}_{l,i}^{l,k_l-1} \right). \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\frac{\partial_{y_l} \pi_{l,i}}{\pi_{l,i}} = \exp \int \left(\delta_i^{l,i} - \delta_i^{l,k_l-1} - \delta_{i+1}^{l,i+1} \right) dy_l - \bar{B}_{l,i}^{l,k_l-1}, \text{ pour } 1 \leq i \leq k_l - 2$$

où $\bar{B}_{l,i}^{l,k_l-1}$ est défini dans (2.13).

Comme $\delta_{k_l-1}^{l,k_l-1} = 2 \frac{\partial_{y_l} \pi_{l,k_l-1}}{\pi_{l,k_l-1}} + \bar{A}_{l,k_l-1}^{l,k_l}$, où $\bar{A}_{l,k_l-1}^{l,k_l} = \sum_{m=2}^{k_l-1} S_{1,m}^{l,k_l} \frac{\partial_{y_l} \pi_{l,k_l-m}}{\pi_{l,k_l-m}}$, alors nous obtenons

$$\frac{\partial_{y_l} \pi_{l,k_l-1}}{\pi_{l,k_l-1}} = \frac{\delta_{k_l-1}^{l,k_l-1} - \bar{A}_{l,k_l-1}^{l,k_l}}{2}$$

■

2.4 Résultats principaux

Avec le même argument que celui que nous avons employé pour la forme normale d'OLDS, nous pouvons également considérer la famille de champs de vecteurs $(\tau_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k_i}$ donnée par le système (2.1). Supposons qu'il existe les $\alpha_{l,i}(y_1, \dots, y_l) \neq 0$ pour $1 \leq l \leq m$ et $1 \leq i \leq k_l - 1$ tels que la famille de champs de vecteurs définie par

$$\begin{cases} \tilde{\tau}_{l,1} = \pi_{l,1}(y_1, \dots, y_l) \tau_{l,1} \\ \tilde{\tau}_{l,i} = \frac{1}{\alpha_{l,i-1}} [\tau_{l,i-1}, f] \text{ pour } 2 \leq i \leq k_l \end{cases} \quad (2.15)$$

commute, où $\pi_{l,1}(y_1, \dots, y_l) = \prod_{i=1}^{k_l-1} \alpha_{l,i}(y_1, \dots, y_l)$.

En posant $\tilde{\tau} = (\tilde{\tau}_{i,j})_{1 \leq i \leq m \text{ et } 1 \leq j \leq k_i}$ et $\tilde{\Lambda} = \theta \tilde{\tau}$, nous définissons la forme R^n -valeur suivante :

$$\omega = \tilde{\Lambda}^{-1} \theta. \quad (2.16)$$

Il est évident que

$$\omega \tilde{\tau} = I_{n \times n}$$

Ainsi, nous allons introduire nos résultats principaux.

Théorème 2.4.1 *Il existe un difféomorphisme qui transforme le système (2.1) en la forme normale d'OLDSM (2.2) s'il existe une famille de fonctions $\alpha_{l,i}(y_1, \dots, y_l)$ pour $1 \leq l \leq m$ et $1 \leq i \leq k_l - 1$ telle que la famille de champs de vecteurs $\tilde{\tau}_{l,i}$ pour $1 \leq l \leq m$ et $1 \leq i \leq k_l - 1$ définie en (2.15) satisfait les conditions suivantes*

$$[\tilde{\tau}_{i,j}, \tilde{\tau}_{s,l}] = 0, \text{ pour } 1 \leq i, s \leq m, 1 \leq j \leq k_i \text{ et } 1 \leq l \leq k_s. \quad (2.17)$$

Preuve. La preuve de ce théorème est similaire à celle du Théorème 1.3.2.

■

Remarque 2.4.2 *La condition (2.17) signifie que la forme ω définie en (2.16) satisfait la condition suivante*

$$d\omega = 0. \quad (2.18)$$

Exemple 2.4.3 *Considérons le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,1} = \frac{\gamma(y_1)}{1+x_{1,3}} x_{1,1} x_{1,2}, \\ \dot{x}_{1,2} = \frac{\mu(y_1)}{1+x_{1,3}} x_{1,1}, \\ \dot{x}_{1,3} = \gamma(y_1) x_{1,2}, \\ \dot{x}_{2,1} = \beta(y_1, y_2) \frac{x_{2,1}^2}{(1+x_{2,2})^2} \\ \dot{x}_{2,2} = \beta(y_1, y_2) \frac{x_{2,1}}{(1+x_{2,2})} \\ y_1 = x_{1,3}, \\ y_2 = x_{2,2}, \end{cases} \quad (2.19)$$

où $\beta(y_1, y_2) \gamma(y_1) \mu(y_1) \neq 0$ et $y_1 \in]-1, 1[, y_2 \in]-1, 1[$, alors nous avons

$$\begin{cases} \tau_{1,1} = \frac{1+x_{1,3}}{\gamma\mu} \frac{\partial}{\partial x_{1,1}}, \\ \tau_{1,2} = \frac{1}{\gamma(y_1)} \frac{\partial}{\partial x_{1,2}} + \left((1+x_{1,3}) \frac{\partial_{y_1}(\gamma(y_1)\mu(y_1))}{\gamma(y_1)\mu^2(y_1)} \right) x_{1,2} \frac{\partial}{\partial x_{1,1}}, \\ \tau_{1,3} = \frac{\partial}{\partial x_{1,3}} + \left(\frac{\partial_{y_1}(\mu(y_1)\gamma(y_1))}{(\mu(y_1)\gamma(y_1))} + \frac{\partial_{y_1}\gamma(y_1)}{\gamma(y_1)} \right) x_{1,2} \frac{\partial}{\partial x_{1,3}} \\ \quad + \left(\frac{1}{1+x_{1,3}} - \frac{\partial_{y_1}(\gamma(y_1)\mu(y_1))}{\gamma(y_1)\mu(y_1)} \right) x_{1,1} \frac{\partial}{\partial x_{1,1}}, \\ \tau_{2,1} = \frac{(1+x_{2,2})}{\beta(y_1, y_2)} \frac{\partial}{\partial x_{2,1}} \\ \tau_{2,2} = \frac{\partial}{\partial x_{2,2}} + \left(\begin{array}{l} 2 \frac{x_{2,1}}{(1+x_{2,2})} - \partial_{y_1} \left(\frac{(1+x_{2,2})}{\beta(y_1, y_2)} \right) \gamma(y_1) x_{2,2} \\ - \partial_{y_2} \left(\frac{(1+x_{2,2})}{\beta(y_1, y_2)} \right) \beta(y_1, y_2) \frac{x_{2,1}}{(1+x_{2,2})} \end{array} \right) \frac{\partial}{\partial x_{2,1}} \end{cases}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{cases} \delta_{1,1}^1 = 0, \\ \delta_{2,2}^1 = 2 \frac{\partial_{y_1}\gamma(y_1)}{\gamma(y_1)} + \frac{\partial_{y_1}(\mu(y_1)\gamma(y_1))}{(\mu(y_1)\gamma(y_1))}, \\ \delta_{2,1}^1 = -\frac{\partial_{y_1}(\mu(y_1)\gamma(y_1))}{(\mu(y_1)\gamma(y_1))} - 2 \frac{\partial_{y_1}\gamma(y_1)}{\gamma(y_1)} \\ \quad - \partial_{y_1} \left(\frac{\partial_{y_1}(\mu(y_1)\gamma(y_1))}{(\mu(y_1)\gamma(y_1))} \right) / \left(\frac{\partial_{y_1}(\mu(y_1)\gamma(y_1))}{(\mu(y_1)\gamma(y_1))} \right), \\ \lambda_{1,1}^1 = -\frac{\partial_{y_1}\beta(y_1, y_2)}{\beta(y_1, y_2)} \\ \delta_{1,1}^2 = 2 \frac{\partial_{y_2}\beta(y_1, y_2)}{\beta(y_1, y_2)}, \end{cases}$$

Ensuite, selon l'équation (2.12), nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{\partial y_1 \pi_{11}}{\pi_{11}} = \exp \int (\delta_{1,1}^1 - \delta_{1,2}^1 - \delta_{2,2}^1) dy_1, \\ \frac{\partial y_2 \pi_{12}}{\pi_{12}} = \frac{1}{2} \left(\delta_{2,2}^1 - \frac{\partial y_1 \pi_{11}}{\pi_{11}} \right), \\ \frac{\partial y_1 \pi_{21}}{\pi_{21}} = -\lambda_{1,1}^1 = \frac{\partial y_1 \beta(y_1, y_2)}{\beta(y_1, y_2)}, \\ \frac{\partial y_2 \pi_{21}}{\pi_{21}} = \frac{1}{2} \delta_{2,1}^2 = \frac{\partial y_2 \beta(y_1, y_2)}{\beta(y_1, y_2)} \end{cases}$$

ce qui nous donne $\pi_{11} = c_1 \gamma(y_1) \mu(y_1)$, $\pi_{12} = c_2 \gamma(y_1)$ et $\pi_{2,1} = \alpha_{2,1} = c_3 \beta(y_1, y_2)$ où c_i sont les constantes arbitraires non nulles. Par la suite, nous obtenons $\alpha_{1,1}(y_1) = \frac{c_1}{c_2} \mu(y_1)$ et $\alpha_{1,2} = c_2 \gamma(y_1)$. Ainsi nous avons

$$\begin{cases} \tilde{\tau}_{1,1} = c_1 (1 + x_{1,3}) \frac{\partial}{\partial x_{1,1}}, \\ \tilde{\tau}_{1,2} = c_2 \frac{\partial}{\partial x_{1,2}}, \\ \tilde{\tau}_{1,3} = \frac{\partial}{\partial x_{1,3}} + \frac{x_{1,1}}{1+x_{1,3}} \frac{\partial}{\partial x_{1,1}}. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \tilde{\tau}_{2,1} = c_3 (1 + x_{2,2}) \frac{\partial}{\partial x_{2,1}} \\ \tilde{\tau}_{2,2} = \frac{\partial}{\partial x_{2,2}} + \frac{x_{2,1}}{1+x_{2,2}} \frac{\partial}{\partial x_{2,1}} \end{cases}$$

il est évident que $[\tilde{\tau}_{ij}, \tilde{\tau}_{st}] = 0$ pour $1 \leq i, s \leq 2$, $j \in [1, 3]$, $t \in [1, 2]$. Ainsi nous avons

$$\omega = \Lambda^{-1} \tilde{\tau} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1(1+x_{1,3})} & 0 & -\frac{1}{c_1(1+x_{1,3})^2} x_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c_3(1+x_{2,2})} & -\frac{x_{2,1}}{c_3(1+x_{2,2})^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ce qui nous donne

$$z = \phi(x) = \left[\frac{x_{1,1}}{c_1(1+x_{1,3})}, \frac{1}{c_2} x_{1,2}, x_{1,3}, \frac{x_{2,1}}{c_3(1+x_{2,2})}, x_{2,2} \right]^T$$

avec ce difféomorphisme, le système (2.19) est transformé en :

$$\begin{cases} \dot{z}_{1,1} = 0, \\ \dot{z}_{1,2} = \frac{c_1}{c_2} \mu(y_1) z_{1,1}, \\ \dot{z}_{1,3} = c_2 \gamma(y_1) z_{1,2}, \\ \dot{z}_{2,1} = 0 \\ \dot{z}_{2,2} = c_3 \beta(y_1, y_2) z_{2,1} \\ y_1 = z_{1,3}, \\ y_2 = z_{2,2}. \end{cases}$$

2.5 Généralisation aux systèmes avec des entrées

Dans cette section, nous généralisons notre résultat aux systèmes possédant des entrées inconnues qui sont de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x, u) \\ y = (h_1(x), \dots, h_m(x))^T \end{cases} \quad (2.20)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^q$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont des fonctions analytiques et $g(x, 0) = 0$.

Pour le système (2.20), nous cherchons la forme normale d'OLDSM de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z} = A(y)z + \beta(y) + \eta(y, u) \\ y = Cz \end{cases} \quad (2.21)$$

où $A(y)$, $\beta(y)$ et C sont définis dans (2.2), et la matrice $\eta(y, u)$ est définie comme celle de $\beta(y)$.

Théorème 2.5.1 *Le système (2.20) peut être transformé en la forme normale d'OLDSM (2.21) par un difféomorphisme s'il existe une famille de fonctions $(\alpha_{i,j}(y))_{1 \leq i \leq m \text{ et } 1 \leq j \leq k_i - 1} \neq 0$, satisfaisant les conditions suivantes :*

i) *Pour $1 \leq i, s \leq m$, $1 \leq j \leq k_i$ et $1 \leq l \leq k_s$,*

$$[\tilde{\tau}_{i,j}, \tilde{\tau}_{s,l}] = 0. \quad (2.22)$$

ii)

$$[g, \tilde{\tau}_{i,j}] = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k_i - 1$$

Preuve. La preuve de ce théorème est similaire à celle du Théorème 1.4.1.

■

Remarque 2.5.2 *Si $g(x, u) = g_1(x)u_1 + \dots + g_q(x)u_q$, et les conditions i) et ii) du Théorème 2.5.1 sont vérifiées, alors :*

$$\eta(y, u) = B_1(y)u_1 + \dots + B_q(y)u_q \quad (2.23)$$

Nous allons étudier certains cas spéciaux sur l'injection de sortie.

Corollaire 2.5.3 *Supposons que les conditions i) et ii) du Théorème 2.5.1 sont vérifiées :*

a) *si $[g, \tilde{\tau}_{i,k_i}] = 0$, pour $1 \leq i \leq m$, alors :*

$$\eta(y, u) = \eta(u)$$

b) *si $g(x, u) = g_1(x)u_1 + \dots + g_q(x)u_q$ et*

$$[g_k, \tilde{\tau}_{i,k_i}] = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq q$$

alors

$$\eta(y, u) = B_1u_1 + \dots + B_qu_q.$$

Exemple 2.5.4 *Considérons le système suivant*

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,1} = \gamma(y_1) \frac{x_{1,1}^2}{(1+x_{1,2})^2} + \frac{x_{1,1}}{(1+x_{1,2})} u_1 \\ \dot{x}_{1,2} = \gamma(y_1) \frac{x_{1,1}}{1+x_{1,2}} + u_1 + x_{2,1} u_2 \\ \dot{x}_{2,1} = \beta(y_1, y_2) x_{1,2} \\ y_1 = x_{1,2} \\ y_2 = x_{2,1} \end{cases} \quad (2.24)$$

où $\beta(y_1, y_2)\gamma(y_1) \neq 0$ et $y_1 \in]-1, 1[$, $y_2 \in]-1, 1[$. Nous obtenons

$$\begin{cases} \tau_{1,1} = \frac{1+x_{1,2}}{\gamma(y_1)} \frac{\partial}{\partial x_{1,1}} \\ \tau_{1,2} = \frac{\partial}{\partial x_{1,2}} + \left(3\gamma^2(y_1) \frac{x_{1,1}}{(1+x_{1,2})^3} - \gamma(y_1) \partial_{y_1} (\gamma(y_1)) \frac{x_{1,1}}{(1+x_{1,2})^2} \right) \frac{\partial}{\partial x_{1,1}} \\ \tau_{2,1} = \frac{\partial}{\partial x_{2,1}} \end{cases}$$

Ensuite, nous avons

$$\delta_1^{1,1} = 2 \frac{\partial_{y_1} \gamma(y_1)}{\gamma(y_1)}$$

Ainsi selon l'équation (2.12), nous obtenons

$$\frac{\partial_{y_1} \pi_{1,1}}{\pi_{1,1}} = \frac{\delta_1^{1,1}}{2} = \frac{\partial_{y_1} \gamma(y_1)}{\gamma(y_1)}$$

ce qui nous donne $\pi_{1,1} = \alpha_{1,1} = c_1 \gamma(y_1)$ où c_1 est une constante arbitraire non nulle. Par conséquent, nous avons

$$\begin{cases} \tilde{\tau}_{1,1} = c_1 (1+x_{1,2}) \frac{\partial}{\partial x_{1,1}} \\ \tilde{\tau}_{1,2} = \frac{\partial}{\partial x_{1,2}} + \frac{x_{1,1}}{1+x_{1,2}} \frac{\partial}{\partial x_{2,1}} \\ \tilde{\tau}_{2,1} = \frac{\partial}{\partial x_{2,1}} \end{cases}$$

Comme $g_1 = \frac{\partial}{\partial x_{1,2}} + \frac{x_{1,1}}{1+x_{1,2}} \frac{\partial}{\partial x_{2,1}} = \tilde{\tau}_{1,2}$, ainsi $[g_1, \tilde{\tau}_{1,1}] = [g_1, \tilde{\tau}_{1,2}] = [g_1, \tilde{\tau}_{2,1}] = 0$. Ensuite, grâce à $g_2 = x_{2,1} \frac{\partial}{\partial x_{1,2}}$, nous avons $[g_2, \tilde{\tau}_{1,1}] = 0$, $[g_2, \tilde{\tau}_{1,2}] \neq 0$ et $[g_2, \tilde{\tau}_{2,1}] \neq 0$. Ainsi le système (2.24) peut être transformé en la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_{1,1} = -\frac{x_{1,1}}{c_1(1+x_{1,2})^2} x_{2,1} u_2 \\ \dot{z}_{1,2} = c_1 \gamma(y_1) z_{1,1} + u_1 + z_{2,1} u_2 \\ \dot{z}_{2,1} = \beta(y_1, y_2) z_{1,2} \\ y_1 = z_{1,2} \\ y_2 = z_{2,1} \end{cases} \quad (2.25)$$

par le difféomorphisme suivant :

$$\phi = \begin{pmatrix} \frac{x_{1,1}}{c_1(1+x_{1,2})} \\ x_{1,2} \\ x_{2,1} \end{pmatrix}$$

Corollaire 2.5.5 *Supposons que les conditions i) et ii) du Théorème 2.5.1 sont vérifiées et $m \geq q$, alors la condition d'OMC (Observability Matching Condition) pour le système (2.21) est de la forme suivante :*

$$\begin{aligned} \text{rang} \frac{\partial}{\partial u} \eta_{i,1}(y, u) &= q \\ \text{et} \\ \frac{\partial}{\partial u} \eta_{i,j}(y, u) &= 0, \text{ pour } 1 \leq i \leq m, 2 \leq j \leq k_i \end{aligned}$$

Ici nous donnons un autre exemple afin d'illustrer le Corollaire 2.5.5.

Exemple 2.5.6 *Considérons le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,1} = \gamma(y_1) \frac{x_{1,1}^2}{(1+x_{1,2})^2} + \gamma(y_1) u_1 + u_2 \\ \dot{x}_{1,2} = \gamma(y_1) \frac{x_{1,1}}{1+x_{1,2}} \\ \dot{x}_{2,1} = \beta(y_1, y_2) x_{1,2} + u_1 + \beta(y_1, y_2) u_2 \\ y_1 = x_{1,2} \\ y_2 = x_{2,1} \end{cases} \quad (2.26)$$

où $\beta(y_1, y_2) \gamma(y_1) \neq 0$ et $y_1 \in]-1, 1[$, $y_2 \in]-1, 1[$. Selon l'Exemple (2.5.4) nous pouvons obtenir $\pi_{1,1} = \alpha_{1,1} = c_1 \gamma(y_1)$ où c_1 est une constante arbitraire non nulle, qui nous donne les nouveaux champs de vecteurs suivants :

$$\begin{cases} \tilde{\tau}_{1,1} = c_1 (1 + x_{1,2}) \frac{\partial}{\partial x_{1,1}} \\ \tilde{\tau}_{1,2} = \frac{\partial}{\partial x_{1,2}} + \frac{x_{1,1}}{1+x_{1,2}} \frac{\partial}{\partial x_{2,1}} \\ \tilde{\tau}_{2,1} = \frac{\partial}{\partial x_{2,1}} \end{cases}$$

ce qui signifie que le difféomorphisme est de la forme suivante :

$$\phi = \begin{pmatrix} \frac{x_{1,1}}{c_1(1+x_{1,2})} \\ x_{1,2} \\ x_{2,1} \end{pmatrix}$$

alors le système (2.26) peut être transformé en :

$$\begin{cases} \dot{z}_{1,1} = \frac{1}{c_1(1+z_{1,2})} (\gamma(y_1) u_1 + u_2) \\ \dot{z}_{1,2} = c_1 \gamma(y_1) z_{1,1} \\ \dot{z}_{2,1} = \beta(y_1, y_2) z_{1,2} + u_1 + \beta(y_1, y_2) u_2 \\ y_1 = z_{1,2} \\ y_2 = z_{2,1} \end{cases} \quad (2.27)$$

Ainsi

$$\eta(y, u) = \begin{bmatrix} \eta_{1,1}(y, u) \\ \eta_{1,2}(y, u) \\ \eta_{2,1}(y, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1(1+y_1)} (\gamma(y_1) u_1 + u_2) \\ 0 \\ u_1 + \beta(y_1, y_2) u_2 \end{bmatrix}$$

Puisque

$$\text{rang} \frac{\partial}{\partial u} \eta_{i,1}(y, u) = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1(1+y_1)} \gamma(y_1) & \frac{1}{c_1(1+y_1)} \\ 1 & \beta(y_1, y_2) \end{bmatrix}, \text{ pour } 1 \leq i \leq 2$$

et

$$\frac{\partial}{\partial u} \eta_{1,2}(y, u) = 0,$$

si $\gamma(y_1)\beta(y_1, y_2) \neq 1$ et $c_1(1+y_1) \neq 0$, ainsi le Corollaire 2.5.5 est vérifié, et tous les états et les entrées du système (2.26) peuvent être récupérés par un observateur.

Remarque 2.5.7 Du point de vue de la transmission, u représente le message confidentiel à crypter. Et dans le but de reconstruire u du système (2.20), g doit être choisi attentivement telle que la condition d'OMC pour que le Corollaire 2.5.5 soit satisfait.

Maintenant, nous allons concevoir un observateur pour le système (2.27). Nous supposons que tous les états et u sont bornés et $\gamma(y_1)\beta(y_1, y_2) \neq 1$ et $c_1(1+y_1) \neq 0$, alors le problème d'inversion à gauche pour le système (2.27) peut être résolu par un observateur à mode glissant étape par étape comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_{1,1} = E_1 \kappa_2 \text{sign}(\tilde{z}_{1,1} - \hat{z}_{1,1}) \\ \dot{\hat{z}}_{1,2} = c_1 \gamma(y_1) \hat{z}_{1,1} + \kappa_1 \text{sign}(z_{1,2} - \hat{z}_{1,2}) \\ \dot{\hat{z}}_{2,1} = \beta(y_1, y_2) \hat{z}_{1,2} + \kappa_3 \text{sign}(z_{2,1} - \hat{z}_{2,1}) \end{cases}$$

où $z_{1,2} = y_1$, $z_{2,1} = y_2$ et

$$\begin{cases} \tilde{z}_{1,1} = \hat{z}_{1,1} + E_1 \frac{\kappa_1 \text{sign}(z_{1,2} - \hat{z}_{1,2})}{c_1 \gamma(y_1)} \\ \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1(1+y_1)} \gamma(y_1) & \frac{1}{c_1(1+y_1)} \\ 1 & \beta(y_1, y_2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_2 \kappa_2 \text{sign}(\tilde{z}_{1,1} - \hat{z}_{1,1}) \\ E_2 \kappa_3 \text{sign}(z_{2,1} - \hat{z}_{2,1}) \end{bmatrix} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \text{si } z_{1,2} = \hat{z}_{1,2}, E_1 = 1, \text{ sinon } E_1 = 0 \\ \text{si } z_{2,1} = \hat{z}_{2,1} \text{ et } \tilde{z}_{1,1} = \hat{z}_{1,1}, \text{ alors } E_2 = 1, \text{ sinon } E_2 = 0 \end{cases}$$

2.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à chercher la forme normale d'OLDSM qui est une extension aux systèmes possédant plusieurs sorties de la forme normale d'OLDS. La technique utilisée dans ce chapitre était la même que celle employée pour la forme normale d'OLDS, c.-à-d., concevoir une nouvelle famille de champs de vecteurs à partir de celle associée aux systèmes dynamiques possédant des sorties multiples. Premièrement, les équations différentielles partielles (2.12) ont été données pour déduire toutes les fonctions $\alpha_{i,j}$, avec lesquelles les conditions géométriques suffisantes ont été données afin de déterminer si un système (2.1) peut être transformé en la forme normale (2.2). Finalement, comme ce que nous avons fait pour la forme normale d'OLDS, le résultat obtenu était également généralisé pour les systèmes possédant des entrées.

Chapitre 3

Forme Normale d'Observabilité Linéaire avec des Sorties Multiples Combinées

3.1 Introduction

Nous allons étudier dans ce chapitre les systèmes non linéaires avec des sorties multiples de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = (h_1(x), \dots, h_m(x))^T \end{cases} \quad (3.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont analytiques. Beaucoup de chercheurs ont essayé de trouver un difféomorphisme local afin de le transformer en la forme normale suivante

$$\begin{cases} \dot{z}_{i,1} = \beta_{i,1}(y) \\ \dot{z}_{i,j} = z_{i,j-1} + \beta_{i,j}(y) \\ y_i = z_{i,k_i} \end{cases}$$

pour $1 \leq i \leq m$, $2 \leq j \leq k_i$ et $\beta_{i,j}(y)$ est une fonction de y .

Il est à noter que, dans cette forme normale, les sorties sont linéaires. Une question légitime se pose : quelle est la forme normale si ces sorties ne sont pas linéaires ?

En fait, il existe une autre forme normale possible, qui peut être exposée comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z}_{i,1} = \beta_{i,1}(y) \\ \dot{z}_{i,j} = z_{i,j-1} + \beta_{i,j}(y) \\ y_1 = z_{1,k_1} \\ y_i = z_{i,k_i} + R_i(z_{1,k_1}, \dots, z_{i-1,k_{i-1}}) \end{cases} \quad (3.2)$$

pour $2 \leq i \leq m$, $2 \leq j \leq k_i$ et $R_i(z_{1,k_1}, \dots, z_{i-1,k_{i-1}})$ est une fonction de $(z_{1,k_1}, \dots, z_{i-1,k_{i-1}})$ et $R_1 = 0$.

Evidemment, ce genre de forme normale est plus générale que celle proposée en [102] et [158]. Ainsi nous allons traiter le problème suivant : Chercher les conditions nécessaires et suffisantes qui garantissent l'existence d'un difféomorphisme local $\phi(x) = z$ afin de transformer le système (3.1) en la forme normale (3.2) [25][26].

Cette forme est appelée la forme normale d'Observabilité Linéaire avec des Sorties Multiples Combinées (forme normale d'OLSMC) et généralise le résultat obtenu en [158] et [102].

Dans un premier temps, nous donnerons les notations. Ensuite, nous ferons une étude comparative avec [158] et [102]. Par la suite, nous introduirons nos résultats principaux. Après cela, nous présenterons une méthode afin de simplifier des calculs, et finalement nous généraliserons notre résultat aux systèmes avec des entrées.

3.2 Notations

Considérons le système (3.1), nous supposons aussi qu'il existe toujours $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m \geq 1$ et $\sum_{i=1}^m k_i = n$ tel que

$$\theta = (\theta_1^1, \dots, \theta_1^{k_1}, \dots, \theta_m^1, \dots, \theta_m^{k_m})^T \quad (3.3)$$

où

$$\theta_i^j = dL_f^{j-1} h_i$$

Ainsi le système (3.1) est observable.

Pour $1 \leq l \leq m$ et $1 \leq j \leq k_l$, Nous notons $(\tau_{i,1})_{1 \leq i \leq m}$ la famille de champs de vecteurs définie par :

$$\theta_l^j(\tau_{i,1}) = \begin{cases} 1, & l = i, j = k_i \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.4)$$

Par induction nous pouvons construire les champs de vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} \tau_{i,r} &= [\tau_{i,r-1}, f] \\ &= (-1)^{r-1} ad_f^{r-1} \tau_{i,r-1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

pour $2 \leq r \leq k_i$.

3.3 Discussions sur la forme normale introduite en [102] et [158]

Nous commençons par un rappel d'un résultat particulier de [102].

Théorème 3.3.1 [102] *Supposons que $k_1 = k_2 = \dots = k_m$ et $\sum_{i=1}^m k_i = n$, et que $\tau_{i,j}$, pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq k_i$, est les champs de vecteurs définis*

par (3.4) et (3.5). Il existe un changement de coordonnées transformant le système (3.1) en la forme normale (3.2) avec $R_l = 0$ si et seulement si

$$[\tau_{i,j}, \tau_{r,s}] = 0 \quad (3.6)$$

pour $1 \leq i, r \leq m$ et $1 \leq j \leq k_i$, $1 \leq s \leq k_r$.

L'exemple suivant illustre l'utilisation du Théorème 3.3.1.

Exemple 3.3.2 *Considérons le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = 0 \\ \dot{x}_4 = x_3 + x_1 x_2 \\ h_1 = x_2 \\ h_2 = x_4 \end{cases} \quad (3.7)$$

Evidemment nous avons $k_1 = k_2 = 2$, et

$$\begin{cases} \tau_{1,1} = \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}, \\ \tau_{1,2} = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}, \\ \tau_{2,1} = \frac{\partial}{\partial x_3}, \\ \tau_{2,2} = \frac{\partial}{\partial x_4} \end{cases}$$

Comme $[\tau_{1,1}, \tau_{1,2}] = -2 \frac{\partial}{\partial x_3} \neq 0$, nous concluons grâce au Théorème 3.3.1, que le système (3.7) ne peut pas être transformé en la forme normale (3.2) avec $R_l = 0$.

En fait la condition de commutativité des crochets de Lie n'est ni nécessaire ni suffisante et ceci quelque soit les valeurs des k_i .

L'exemple étudié en [158] montre que la condition (3.6) n'est pas nécessaire.

Exemple 3.3.3 [158] *Considérons le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = x_2 \\ h_1 = x_2 \\ h_2 = x_3 \end{cases} \quad (3.8)$$

alors nous avons

$$\theta = \begin{pmatrix} dx_2 \\ dx_1 \\ dx_3 \end{pmatrix},$$

ce qui nous donne

$$\begin{cases} \tau_{1,1} = \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ \tau_{1,2} = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ \tau_{2,1} = \frac{\partial}{\partial x_3}. \end{cases}$$

Il est évident que $[\tau_{1,2}, \tau_{2,1}] = -\frac{\partial}{\partial x_1} \neq 0$. Cependant, le difféomorphisme suivant

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

peut transformer le système (3.8) en la forme (3.2) avec $R_2 = 0$. Ainsi la condition (3.6) n'est pas nécessaire.

Afin de donner un exemple pour indiquer que la condition (3.6) n'est pas suffisante, nous commençons par rappeler un résultat de [158].

Supposons que pour certains $1 \leq l \leq m$, nous avons $k_{l+1} \leq k_l$. Définissons :

$$Q_l = \{dL_f^{j-1}h_i \text{ pour } 1 \leq i \leq m, \text{ et } 1 \leq j \leq k_l\} - \{dL_f^{k_l-1}h_l\}$$

Théorème 3.3.4 [158] *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *Le système (3.1) peut être transformé au moyen d'un difféomorphisme en la forme normale (3.2) avec $R_l = 0$.*

ii) *Pour $1 \leq l \leq m$, $1 \leq j \leq k_l$,*

$$\dim \text{span}(Q_l) = lk_l + k_{l+1} + \dots + k_m - 1 \quad (3.9)$$

et il existe les champs de vecteurs $(\tau_{i,1})_{1 \leq i \leq m}$ satisfaisants

$$L_{\tau_{i,1}}L_f^{j-1}h_l = \begin{cases} 1, & \text{pour } l = i \text{ et } j = k_i \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.10)$$

tel que

$$[\tau_{i,j}, \tau_{r,s}] = 0 \quad (3.11)$$

pour $1 \leq i, r \leq m$ et $1 \leq j \leq k_i, 1 \leq s \leq k_r$.

Remarque 3.3.5 *Notons*

$$\tilde{Q}_l = [dh_1, \dots, dL_f^{k_l-1}h_1, \dots, dh_l, \dots, dL_f^{k_l-2}h_l, dh_{l+1}, \dots, dL_f^{k_{l+1}-1}h_{l+1}, \dots, dh_m, \dots, dL_f^{k_m-1}h_m]^T$$

L'existence des champs de vecteurs $(\tau_{l,1})_{1 \leq l \leq m}$ peut toujours être garantie par la condition (3.9) du Théorème 3.3.4 en résolvant les $lk_l + k_{l+1} + \dots + k_m$ équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} \tilde{Q}_l \\ dL_f^{k_l-1}h_l \end{bmatrix} \tau_{l,1} = \begin{bmatrix} V(0)_{\dim \text{span}(\tilde{Q}_l) \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

où $V(0)_{\dim \text{span}(\tilde{Q}_l) \times 1}$ signifie un vecteur colonne de dimension $\dim \text{span}(\tilde{Q}_l)$, car

$$\dim \text{span} \left[Q_l \cup \{dL_f^{k_l-1}h_l\} \right] = lk_l + k_{l+1} + \dots + k_m$$

L'exemple suivant montre que la condition (3.6) n'est pas suffisante.

Exemple 3.3.6 *Considérons le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = x_1 \\ h_1 = x_2 \\ h_2 = x_3 \end{cases} \quad (3.12)$$

alors nous obtenons

$$\theta = \begin{pmatrix} dx_2 \\ dx_1 \\ dx_3 \end{pmatrix},$$

ce qui nous donne

$$\begin{cases} \tau_{1,1} = \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ \tau_{1,2} = \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ \tau_{2,1} = \frac{\partial}{\partial x_3}. \end{cases}$$

Il est évident que la condition (3.6) est vérifiée. Cependant

$$Q_1 = \{dx_2, dx_3, dx_1\}, Q_2 = \{dx_2\}$$

et

$$\begin{cases} \dim \text{span}(Q_1) = 3 > 1 \times 2 + 1 - 1. \\ \dim \text{span}(Q_2) = 1 = 2 \times 1 - 1. \end{cases}$$

ainsi la condition (3.9) du Théorème 3.3.4 n'est pas satisfaite. De plus, puisque $L_{\tau_{1,2}} h_2 = 1 \neq 0$, la condition (3.10) du Théorème 3.3.4 n'est plus satisfaite. Par conséquent, selon le Théorème 3.3.4, le système (3.12) ne peut pas être transformé en la forme normale (3.2) avec $R_l = 0$.

La remarque suivante donne une idée de notre réflexions.

Remarque 3.3.7 *i) Le système (3.8) dans l'Exemple 3.3.3 est linéarisable par*

$$\tau_{1,1} = \frac{\partial}{\partial x_1}, \tau_{1,2} = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

et $\tau_{2,1}$, où $\tau_{2,1}$ est une solution des équations suivantes :

$$\begin{aligned} dh_2(\tau_{2,1}) &= 1 \\ dh_1 L_f \tau_{2,1} &= 0 \\ [\tau_{1,i}, \tau_{2,1}] &= 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq 2 \end{aligned}$$

Les deux premières équations donnent la solution suivante :

$$\tau_{2,1} = \frac{\partial}{\partial x_3} + b(x) \frac{\partial}{\partial x_1}$$

et les deux équations différentielles suivantes donnent $b(x) = x_2$.

ii) Le difféomorphisme suivant

$$z = \phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{1}{2}x_2^2 \\ x_2 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix}$$

transforme le système (3.12) considéré dans l'Exemple 3.3.6 en la forme normale (3.2) avec $R_1 = -z_2$. Ainsi le système (3.12) est de la forme (3.2) avec $R_1 = -z_2$

$$\begin{cases} \tau_{1,1} = \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ \tau_{1,2} = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3}, \\ \tau_{2,1} = \frac{\partial}{\partial x_3}. \end{cases}$$

Plus tard, nous considérerons un autre exemple qui ne vérifie ni la condition (3.6) ni la condition (3.9).

3.4 Résultats principaux

Afin d'introduire le résultat principal, nous posons $\tau = (\tau_{i,j})_{1 \leq i \leq m \text{ et } 1 \leq j \leq k_i}$ et $\Lambda = \theta\tau$. Définissons la forme de R^n -valeur suivante :

$$\omega = \Lambda^{-1}\theta.$$

Et il est évident que

$$\omega\tau = I_{n \times n}$$

Théorème 3.4.1 *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *Il existe un changement de coordonnées $\phi(x) = z$ qui transforme le système (3.1) en la forme (3.2).*

ii) *Il existe les champs de vecteurs $(\tau_{i,1})_{1 \leq i \leq m}$ satisfaisant*

$$dh_l \tau_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ pour } i = l \text{ et } j = k_l \\ R(h_i), \text{ si } 1 \leq i < l \text{ et } j = k_i \\ 0, \text{ sinon} \end{cases} \quad (3.13)$$

pour $1 \leq l \leq m$, où $R(h_i)$ est une fonction de h_i et

$$[\tau_{i,j}, \tau_{s,l}] = 0. \quad (3.14)$$

pour $1 \leq i, s \leq m$, $1 \leq j \leq k_i$ et $1 \leq l \leq k_s$.

iii) *La condition (3.13) est vérifiée et*

$$d\omega = 0. \quad (3.15)$$

alors nous avons localement $\omega = d\phi$.

Remarques 3.4.2 *i) Lorsque $k_l > k_{l+1}$, l'existence des champs de vecteurs $(\tau_{l,1})_{1 \leq l \leq m}$ peut toujours être garantie par la condition (3.9) du Théorème 3.3.4 en résolvant les $(lk_l + k_{l+1} + \dots + k_m)$ équations suivantes*

$$\begin{bmatrix} \tilde{Q}_l \\ dL_f^{k_l-1} h_l \end{bmatrix} \tau_{l,1} = \begin{bmatrix} V(0)_{\dim \text{span}(\tilde{Q}_l) \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

car

$$\dim \text{span} \left[Q_l \cup \left\{ dL_f^{k_l-1} h_l \right\} \right] = lk_l + k_{l+1} + \dots + k_m.$$

ii) Cependant, dans le cas $k_l = k_{l+1}$, évidemment

$$\dim \text{span} Q_{l+1} = \dim \text{span} Q_l$$

Notons que :

$$\hat{Q}_l = \tilde{Q}_l - L_f^{k_{l+1}-1} (dh_{l+1})$$

alors $\tau_{l+1,1}$ peut être déterminé par

$$\begin{bmatrix} \tilde{Q}_{l+1} \\ dL_f^{k_{l+1}-1} h_{l+1} \end{bmatrix} \tau_{l+1,1} = \begin{bmatrix} V(0)_{\dim \text{span}(\tilde{Q}_{l+1}) \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

et $\tau_{l,1}$ doit être calculé comme suit :

$$\begin{bmatrix} \hat{Q}_l \\ dL_f^{k_l-1} h_l \end{bmatrix} \tau_{l,1} = \begin{bmatrix} V(0)_{\dim \text{span}(\hat{Q}_l) \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Preuve. Supposons qu'il existe un changement de coordonnées $\phi(x) = z$ qui transforme le système (3.1) en la forme (3.2). Selon l'équation (3.2), nous avons

$$\tau_{l,1} = \frac{\partial}{\partial z_{l,1}}$$

pour $1 \leq l \leq m$, et

$$\tau_{l,i} = \frac{\partial}{\partial z_{l,i}}$$

pour $1 \leq i \leq k_l$. Ainsi nous obtenons

$$[\tau_{i,j}, \tau_{s,l}] = 0$$

pour $1 \leq i, s \leq m$, $1 \leq j \leq k_i$ et $1 \leq l \leq k_s$.

Et puisque

$$h_l \circ \phi^{-1} = z_{l,k_l} + R_l(z_{1,k_1}, \dots, z_{l-1,k_{l-1}})$$

pour $1 \leq l \leq m$, nous avons

$$\frac{\partial}{\partial z_{i,j}} h_l \circ \phi^{-1} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = l \text{ et } j = k_l \\ \tilde{R}(z_{i,k_i}), & \text{si } 1 \leq i < l \text{ et } j = k_i \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Grâce à $\frac{\partial}{\partial z_{i,j}} h_l \circ \phi^{-1} = dh_l(\tau_{ij})$, nous avons aussi

$$dh_l \tau_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = l \text{ et } j = k_l \\ R(h_i), & \text{si } 1 \leq i < l \text{ et } j = k_i \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Réciproquement, si $[\tau_{i,j}, \tau_{s,l}] = 0$ pour $1 \leq i, s \leq m$, $1 \leq j \leq k_i$ et $1 \leq l \leq k_s$, il existe un difféomorphisme $\phi(x)$ tel que $\phi_*(\tau_{i,j}) = \frac{\partial}{\partial z_{i,j}}$, alors

$$\frac{\partial}{\partial z_{i,j}} \phi_* f = \left[\frac{\partial}{\partial z_{i,j}}, \phi_* f \right] = \phi_* [\tau_{i,j}, f] = \frac{\partial}{\partial z_{i,j+1}}.$$

En conséquence, par intégration, nous obtenons

$$\phi_* f = \begin{bmatrix} \dot{z}_{i,1} \\ \dot{z}_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{i,1}(y) \\ z_{i,j-1} + \beta_{i,j}(y) \end{bmatrix}$$

où $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq k_i$.

Et comme $\frac{\partial}{\partial z_{i,j}} h_l \circ \phi^{-1} = dh_l \tau_{i,j}$ et

$$dh_l \tau_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = l \text{ et } j = k_l \\ R(h_i), & \text{si } 1 \leq i < l \text{ et } j = k_i \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous avons

$$h_l \circ \phi^{-1} = z_{l,k_l} + R_l(z_{1,k_1}, \dots, z_{l-1,k_{l-1}}).$$

Finalement, afin de prouver que la condition *ii*) du Théorème 3.4.1 est équivalente à la condition *iii*), il suffit de montrer que l'équation (3.14) est équivalente à l'équation (3.15).

Rappelons que pour ω et deux champs de vecteurs X, Y nous avons :

$$d\omega(X, Y) = L_X(\omega(Y)) - L_Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$$

Posons $X = \tau_{i,j}$ et $Y = \tau_{l,s}$. Et comme $\omega(\tau_{i,j})$ et $\omega(\tau_{l,s})$ sont constants, nous avons

$$d\omega(\tau_{i,j}, \tau_{l,s}) = -\omega([\tau_{i,j}, \tau_{l,s}])$$

Comme ω est un isomorphisme et $(\tau_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k_i}$ est une base, alors $[\tau_{i,j}, \tau_{s,l}] = 0$, pour $1 \leq i, s \leq m$, $1 \leq j \leq k_i$ et $1 \leq l \leq k_s$, qui implique que $d\omega = 0$. Ainsi, il existe un difféomorphisme local ϕ tel que : $\omega = d\phi$. ■

Remarque 3.4.3 La condition (3.13) implique que la nouvelle sortie h_l dépend des nouvelles sorties h_t pour $1 \leq t < l$, mais ne dépend pas de sorties h_s pour $l \leq s \leq m$.

Déclaration 3.4.4 La condition (3.13) est équivalente à la condition (3.10) plus les équations suivantes :

$$dh_l(\tau_{i,j}) = R(h_i), \text{ si } 1 \leq i < l \text{ et } j = k_i,$$

pour $1 \leq l \leq m$.

Il est à noter que dans la Remarques 3.4.2 il existe deux cas possibles afin de déterminer les champs de vecteurs $(\tau_{l,1})_{1 \leq l \leq m}$. L'exemple suivant traitera le premier cas : $k_l > k_{l+1}$.

Exemple 3.4.5 *Considérons le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = x_1 \\ h_1 = x_2 \\ h_2 = x_3 \end{cases} \quad (3.16)$$

alors nous avons

$$\theta = \begin{pmatrix} dx_2 \\ dx_1 \\ dx_3 \end{pmatrix},$$

Selon le Théorème 3.3.4, nous avons

$$\begin{cases} \tau_{1,1} = \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ \tau_{1,2} = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ \tau_{2,1} = \frac{\partial}{\partial x_3} + b(x) \frac{\partial}{\partial x_1} \end{cases}$$

où $b(x)$ est une fonction de x . Si le système (3.16) peut être transformé en la forme (3.2) avec $R_l = 0$, alors le choix de $b(x)$ doit vérifier les équations (3.10) et (3.11).

Il est facile de voir que $L_{\tau_{1,2}} h_2 = 1 \neq 0$, ainsi la condition (3.10) n'est pas vérifiée. Par conséquent le système (3.16) ne peut pas être transformé en la forme (3.2) avec $R_l = 0$.

Cependant, selon le Théorème 3.4.1, car $dh_2(\tau_{1,1}) = 0$ et $dL_f h_2(\tau_{1,1}) = dh_2(\tau_{1,2}) = 1$, l'équation (3.13) est satisfaite. Ici $dL_f h_2(\tau_{1,1}) = 1$ signifie que la seconde nouvelle sortie dépend de la première sortie. Ensuite, si l'équation (3.14) du Théorème 3.4.1 est aussi satisfaite, alors selon le Théorème 3.4.1, le système (3.16) peut être transformé en la forme (3.2) avec $R_l \neq 0$.

Car

$$\begin{aligned} [\tau_{1,1}, \tau_{1,2}] &= 0, \\ [\tau_{1,1}, \tau_{2,1}] &= \frac{\partial b(x)}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ [\tau_{1,2}, \tau_{2,1}] &= \left(\frac{\partial b(x)}{\partial x_1} x_3 + \frac{\partial b(x)}{\partial x_2} + \frac{\partial b(x)}{\partial x_3} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \end{aligned}$$

ainsi, si $b(x) = x_2$, alors $[\tau_{1,1}, \tau_{1,2}] = [\tau_{1,2}, \tau_{2,1}] = 0$. Ceci signifie que, par

$$\begin{cases} \tau_{1,1} = \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ \tau_{1,2} = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ \tau_{2,1} = \frac{\partial}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}, \end{cases}$$

le système (3.16) peut être transformé en la forme (3.2) avec $R_l \neq 0$. Le calcul nous donne le difféomorphisme suivant

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} x_1 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_2x_3 \\ x_2 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix}$$

avec ce changement, le système (3.16) est transformé en

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 0 \\ \dot{z}_2 = z_1 + z_2 z_3 + \frac{1}{2} z_2^2 \\ \dot{z}_3 = 0 \\ h_1 = z_2 \\ h_2 = z_3 + z_2 \end{cases}$$

Il est à noter que le difféomorphisme n'est pas unique. Parce que si nous choisissons $b(x) = x_3$, nous obtenons aussi $[\tau_{1,1}, \tau_{1,2}] = [\tau_{1,2}, \tau_{2,1}] = 0$, ce qui nous donne un autre difféomorphisme

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{1}{2} x_3^2 \\ x_2 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix}$$

et avec ce difféomorphisme nous obtenons la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 0 \\ \dot{z}_2 = z_1 + \frac{1}{2} (z_3 + z_2)^2 \\ \dot{z}_3 = 0 \\ h_1 = z_2 \\ h_2 = z_3 + z_2 \end{cases}$$

Naturellement nous pouvons également choisir d'autre $b(x)$ satisfaisant les équations (3.13) et (3.14) pour construire d'autres difféomorphismes.

Un autre cas possible et complexe présenté dans la Remarques 3.4.2 est le cas $k_l = k_{l+1}$, qui sera illustré dans l'exemple suivant.

Exemple 3.4.6 (Exemple 3.3.2 suite) L'Exemple (3.3.2) montre qu'il ne peut pas être transformé en la forme normale (3.2) avec $R_l = 0$. Cependant, selon le Théorème (3.3.4), nous avons $k_1 = k_2 = 2$, et

$$\dim \text{span} Q_1 = \dim \text{span} Q_2 = 3$$

ainsi τ_{11} et τ_{21} peuvent être déterminés uniquement comme suit

$$\begin{bmatrix} dh_1 \\ dL_f h_1 \\ dh_2 \\ dL_f h_2 \end{bmatrix} [\tau_{11} \quad \tau_{21}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_2 & x_1 & 1 & 0 \end{bmatrix} [\tau_{11} \quad \tau_{21}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons

$$\begin{cases} \tau_{11} = \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \tau_{21} = \frac{\partial}{\partial x_3} \end{cases}$$

qui nous donne

$$\begin{cases} \tau_{12} = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \tau_{22} = \frac{\partial}{\partial x_4} \end{cases}$$

Puisque

$$[\tau_{11}, \tau_{12}] = -2 \frac{\partial}{\partial x_3} \neq 0,$$

ainsi, selon le Théorème 3.3.4, le système (3.7) ne peut pas être transformé en la forme normale (3.2) avec $R_l = 0$.

Cependant, selon le Théorème 3.4.1 et la Remarque 3.4.2, puisque $k_1 = k_2 = 2$, et $\dim \text{span} Q_1 = \dim \text{span} Q_2 = 3$, si nous voulons vérifier si le système (3.7) peut être transformé en la forme normale (3.2) avec $R_l = 0$, nous devons d'abord déterminer τ_{21} . Nous obtenons

$$\begin{bmatrix} dh_1 \\ dL_f h_1 \\ dh_2 \\ dL_f h_2 \end{bmatrix} \tau_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_2 & x_1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tau_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

qui nous donne $\tau_{21} = \frac{\partial}{\partial x_3}$. Ainsi nous avons $\tau_{22} = \frac{\partial}{\partial x_4}$. Selon le Théorème 3.4.1, τ_{11} doit être calculer comme suit

$$\begin{bmatrix} dh_1 \\ dL_f h_1 \\ dh_2 \end{bmatrix} \tau_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tau_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ce qui nous donne

$$\begin{cases} \tau_{11} = b(x) \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \tau_{12} = \frac{\partial}{\partial x_2} + (x_1 \partial_{x_2} b + (x_3 + x_1 x_2) \partial_{x_4} b) \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \quad + (x_2 + b) \frac{\partial}{\partial x_4} \end{cases}$$

où $\partial_{x_i} b$ signifie $\frac{\partial}{\partial x_i} b$.

Si $[\tau_{11}, \tau_{21}] = 0$, alors nous avons $\partial_{x_3} b = 0$. Si $[\tau_{11}, \tau_{22}] = 0$, nous obtenons $\partial_{x_4} b = 0$. Ainsi nous avons

$$\tau_{12} = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \partial_{x_2} b \frac{\partial}{\partial x_3} + (x_2 + b) \frac{\partial}{\partial x_4}$$

et il est évident que $[\tau_{12}, \tau_{21}] = [\tau_{12}, \tau_{22}] = 0$. De plus, si $[\tau_{11}, \tau_{12}] = 0$, alors $\partial_{x_1} b = \partial_{x_2} b = 0$.

Par conséquent, b est constant, alors nous avons

$$[\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{21}, \tau_{22}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_2 + b & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ce qui signifie

$$\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b - x_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ce qui nous donne

$$z = \phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 - bx_1 \\ x_4 - bx_2 - \frac{1}{2}x_2^2 \end{pmatrix}$$

Avec ce difféomorphisme, le système (3.7) est transformé en

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 0 \\ \dot{z}_2 = z_1 \\ \dot{z}_3 = 0 \\ \dot{z}_4 = z_3 \\ h_1 = z_2 \\ h_2 = z_4 + bz_2 + \frac{1}{2}z_2^2 \end{cases}$$

qui est de la forme (3.2) avec $R_2 = \frac{1}{2}z_2^2 + bz_2$.

Comme nous avons vu dans les deux exemples ci-dessus, parce que les champs de vecteurs $(\tau_{l,1})_{1 \leq l \leq m}$ sont déterminés par la condition (3.9) du Théorème 3.3.4 (ou la condition (3.13) du Théorème 3.4.1), ainsi les solutions $(\tau_{l,1})_{1 \leq l \leq m}$ ne sont pas uniques et il est obligé de vérifier chaque solution par les conditions (3.13) et (3.14) du Théorème 3.4.1. La section suivante proposera une autre méthode afin de simplifier des calculs.

3.5 Simplification des Calculs

Afin d'éviter la vérification fastidieuse, nous proposons d'établir les solutions possibles $(\tau_{l,1})_{1 \leq l \leq m}$, non pas par la condition (3.13) du Théorème 3.4.1, mais par l'équation (3.4). Pour simplifier, nous notons $(T_{l,1})_{1 \leq l \leq m}$ les champs de vecteurs déterminés uniquement par l'équation (3.4), avec lequel nous calculons les champs de vecteurs possibles, dénotés $(\tau_{l,1})_{1 \leq l \leq m}$.

Dans la Remarques 3.4.2, deux cas possibles ont été présentés, ainsi afin d'exploiter la relation entre $(T_{l,1})_{1 \leq l \leq m}$ et $(\tau_{l,1})_{1 \leq l \leq m}$, nous devons aussi analyser ce problème à partir de deux cas différents.

Le premier cas : $k_1 > k_2 > k_3$.

Pour simplicité, nous supposons $k_1 = 3$, $k_2 = 2$ et $k_3 = 1$.

Grâce à l'équation (3.13), nous avons

$$\begin{pmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dh_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{1,1} & \tau_{1,2} & \tau_{1,3} & \tau_{2,1} & \tau_{2,2} & \tau_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_1^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R_1^3 & 0 & R_2^3 & 1 \end{pmatrix}$$

Avec

$$L_{[f,g]}h = L_f L_g h - L_g L_f h$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} L_{\tau_{1,1}} L_f h_1 &= L_f L_{\tau_{1,1}} h_1 - L_{[f,\tau_{1,1}]} h_1 = L_{\tau_{1,2}} h_1 = 0 \\ L_{\tau_{1,2}} L_f h_1 &= L_f L_{\tau_{1,2}} h_1 - L_{[f,\tau_{1,2}]} h_1 = L_{\tau_{1,3}} h_1 = 1 \end{aligned}$$

et

$$L_{\tau_{1,1}}L_f^2h_1 = L_fL_{\tau_{1,1}}L_fh_1 - L_{[f,\tau_{1,1}]}L_fh_1 = L_{\tau_{1,2}}L_fh_1 = 1$$

Avec le même argument, nous avons

$$\begin{cases} dL_fh_1(\tau_{1,1} \ \tau_{1,2}, \ \tau_{2,1}) = (0, \ 1, \ 0) \\ dL_f^2h_1\tau_{1,1} = 1 \\ dL_fh_2(\tau_{1,1} \ \tau_{2,1}) = (0, \ 1) \end{cases}$$

Un autre côté, selon l'équation (3.4), nous avons

$$\begin{pmatrix} dh_1 \\ dL_fh_1 \\ dL_f^2h_1 \\ dh_2 \\ dL_fh_2 \\ dh_3 \end{pmatrix} (T_{1,1}, \ T_{2,1}, \ T_{3,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

en comparant avec le résultat obtenu par l'équation (3.13) :

$$\begin{pmatrix} dh_1 \\ dL_fh_1 \\ dL_f^2h_1 \\ dh_2 \\ dL_fh_2 \\ dh_3 \end{pmatrix} (\tau_{1,1}, \ \tau_{2,1}, \ \tau_{3,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \\ 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où * représente certaines fonctions de x , et nous avons évidemment $T_{1,1} = \tau_{1,1}$. Ensuite, si * est égal à 0, nous avons

$$\begin{aligned} T_{2,1} &= \tau_{2,1} \\ T_{3,1} &= \tau_{3,1}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $(\tau_{l,1})_{1 \leq l \leq m}$ est une solution plus générale que $(T_{l,1})_{1 \leq l \leq m}$. Ensuite, nous pouvons créer $(\tau_{l,1})_{1 \leq l \leq m}$ à partir de $(T_{l,1})_{1 \leq l \leq m}$ comme suit :

$$\begin{cases} \tau_{1,1} = T_{1,1}, \\ \tau_{2,1} = T_{2,1} + b_{1,1}^2(x)\tau_{1,1} \\ \tau_{3,1} = T_{3,1} + b_{1,1}^3(x)\tau_{1,1} + b_{1,2}^3(x)\tau_{1,2} + b_{2,1}^3(x)\tau_{2,1} \end{cases}$$

Et avec une formulation plus générale, nous trouvons :

$$\begin{cases} \tau_{1,1} = T_{1,1}, \\ \tau_{2,1} = T_{2,1} + \sum_{j=1}^{(k_1-k_2)} b_{1,j}^2(x)\tau_{1,j} \\ \tau_{3,1} = T_{3,1} + \sum_{r=1}^2 \sum_{j=1}^{(k_r-k_3)} b_{r,j}^3(x)\tau_{r,j} \end{cases}$$

Le deuxième cas : $k_1 > k_2 = k_3$.

Nous posons $k_1 = 3$, $k_2 = k_3 = 2$.

Grâce à l'équation (3.13), nous avons

$$\begin{pmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dh_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{1,1} & \tau_{1,2} & \tau_{1,3} & \tau_{2,1} & \tau_{2,2} & \tau_{3,1} & \tau_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_1^2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_1^3 & 0 & R_2^3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Avec le même argument, nous obtenons

$$\begin{cases} dL_f h_1 \begin{pmatrix} \tau_{1,1} & \tau_{1,2} & \tau_{2,1} & \tau_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ dL_f^2 h_1 \tau_{1,1} = 1 \\ dL_f h_2 \begin{pmatrix} \tau_{1,1} & \tau_{2,1} & \tau_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ dL_f h_3 \begin{pmatrix} \tau_{1,1} & \tau_{2,1} & \tau_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & R_2^3 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

De la même manière, selon l'équation (3.4), nous obtenons

$$\begin{pmatrix} dh_1 \\ dL_f h_1 \\ dL_f^2 h_1 \\ dh_2 \\ dL_f h_2 \\ dh_3 \\ dL_f h_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{1,1} & T_{2,1} & T_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

En comparant avec le résultat obtenu par l'équation (3.13) :

$$\begin{pmatrix} dh_1 \\ dL_f h_1 \\ dL_f^2 h_1 \\ dh_2 \\ dL_f h_2 \\ dh_3 \\ dL_f h_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{1,1} & \tau_{2,1} & \tau_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2^3 & 1 \end{pmatrix}$$

où * représente certaines fonctions de x , et nous pouvons créer $(\tau_{l,1})_{1 \leq l \leq m}$ à partir de $(T_{l,1})_{1 \leq l \leq m}$ comme suit :

$$\begin{cases} \tau_{1,1} = T_{1,1}, \\ \tau_{3,1} = T_{3,1} + b_{1,1}^3(x) \tau_{1,1} \\ \tau_{2,1} = T_{2,1} + b_{1,1}^2(x) \tau_{1,1} + b_{3,1}^2(x) \tau_{3,1} \end{cases}$$

Dans le cas général, nous obtenons

$$\begin{cases} \tau_{1,1} = T_{1,1}, \\ \tau_{3,1} = T_{3,1} + \sum_{j=1}^{(k_1-k_3)} b_{1,j}^3(x) \tau_{1,j} \\ \tau_{2,1} = T_{2,1} + \sum_{j=1}^{(k_1-k_3)} b_{1,j}^2(x) \tau_{1,j} + b_{3,1}^2(x) \tau_{3,1} \end{cases}$$

Par conséquent, $(\tau_{l,1})_{1 \leq l \leq m}$ peut être généré à partir de $(T_{l,1})_{1 \leq l \leq m}$ comme suit :

$$\begin{cases} \tau_{1,j} = T_{1,j} \text{ pour } 1 \leq j \leq k_1 \\ \tau_{1,j} = [\tau_{1,j-1}, f] \text{ pour } 2 \leq j \leq k_1 \end{cases}$$

et pour $1 \leq s \leq m-1$, si $k_{s+1} < k_s$

$$\begin{cases} \tau_{s+1,1} = T_{s+1,1} + \sum_{r=1}^s \sum_{j=1}^{(k_r - k_{s+1})} b_{r,j}^{s+1}(x) \tau_{r,j} \\ \tau_{s+1,j} = [\tau_{s+1,j-1}, f] \text{ pour } 2 \leq j \leq k_{s+1} \end{cases} \quad (3.17)$$

mais si $k_{s+1} = k_s$ alors nous avons

$$\begin{cases} \tau_{s+1,1} = T_{s+1,1} + \sum_{r=1}^{(s-1)(k_r - k_{s+1})} \sum_{j=1}^{(s-1)(k_r - k_{s+1})} b_{r,j}^{s+1}(x) \tau_{r,j} \\ \tau_{s,1} = T_{s,1} + \sum_{r=1}^{(s-1)(k_r - k_{s+1})} \sum_{j=1}^{(s-1)(k_r - k_{s+1})} b_{r,j}^s(x) \tau_{r,j} + b_{s+1,1}^{s+1}(x) \tau_{s+1,1} \\ \tau_{s+1,j} = [\tau_{s+1,j-1}, f] \text{ pour } 2 \leq j \leq k_{s+1} \end{cases} \quad (3.18)$$

Ci-dessous, la simplification des calculs sera illustrée par les deux exemples présentés dans la section précédente.

Exemple 3.5.1 (*Exemple 3.4.5 suite*) Dans cet exemple, $k_1 = 2$ et $k_2 = 1$, et nous avons obtenu

$$\begin{cases} T_{1,1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \\ T_{1,2} = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \\ T_{2,1} = \frac{\partial}{\partial x_3} \end{cases}$$

Selon l'équation (3.17), nous avons

$$\begin{cases} \tau_{1,1} = T_{1,1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \tau_{1,2} = T_{1,2} = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \tau_{2,1} = T_{2,1} + b_{1,1}^2(x) \tau_{1,1} = b_{1,1}^2(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \end{cases}$$

Car

$$[\tau_{1,1}, \tau_{1,2}] = [\tau_{1,1}, \tau_{2,1}] = [\tau_{1,2}, \tau_{2,1}] = 0$$

Ce qui signifie que $b_{1,1}^2$ est une constante. Et le calcul restant est le même que celui de l'Exemple 3.4.5.

Exemple 3.5.2 (*Exemple 3.4.6 suite*) Dans cet exemple, $k_1 = k_2 = 2$, et nous avons obtenu

$$\begin{cases} T_{1,1} = \frac{\partial}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \\ T_{1,2} = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \\ T_{2,1} = \frac{\partial}{\partial x_3} \\ T_{2,2} = \frac{\partial}{\partial x_4} \end{cases}$$

Selon l'équation (3.18), nous avons

$$\begin{cases} \tau_{2,1} = T_{2,1} = \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \tau_{2,2} = T_{2,2} = \frac{\partial}{\partial x_4} \\ \tau_{1,1} = T_{1,1} + b_{2,1}^2(x) \tau_{2,1} = (b_{2,1}^2(x) - x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \tau_{1,2} = \frac{\partial}{\partial x_2} + (x_1 \partial_{x_2} b_{2,1}^2 + (x_3 + x_1 x_2) \partial_{x_4} b_{2,1}^2) \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \quad + (b_{2,1}^2 + x_2 - x_3) \frac{\partial}{\partial x_4} \end{cases}$$

car

$$[\tau_{1,1}, \tau_{1,2}] = [\tau_{1,1}, \tau_{2,1}] = [\tau_{1,1}, \tau_{2,2}] = [\tau_{2,1}, \tau_{2,2}] = 0$$

nous obtenons

$$b_{2,1}^2(x) = x_3 + c$$

où c est une constante. Et le calcul restant est le même que celui de l'Exemple 3.4.6

Les exemples ci-dessus nous ont montré que les solutions possibles peuvent être calculées directement par l'équation (3.17) ou (3.18).

3.6 Généralisation aux systèmes avec des entrées

Dans cette section, nous généralisons notre résultat aux systèmes possédant des entrées de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x, u) \\ y = (h_1(x), \dots, h_m(x))^T \end{cases} \quad (3.19)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^q$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont des fonctions analytiques et $g(x, 0) = 0$.

Pour le système (3.19), nous cherchons la forme normale comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z}_{i,1} = \beta_{i,1}(y) + \eta_{i,1}(y, u) \\ \dot{z}_{i,j} = z_{i,j-1} + \beta_{i,j}(y) + \eta_{i,j}(y, u) \\ y_1 = z_{1,k_1} \\ y_i = z_{i,k_i} + R_i(z_{1,k_1}, \dots, z_{i-1,k_{i-1}}) \end{cases} \quad (3.20)$$

pour $1 \leq i \leq m$ et $2 \leq j \leq k_i$, $\beta_{i,j}(y)$ et $\eta_{i,j}(y, u)$ sont respectivement des fonctions de y et (y, u) .

Théorème 3.6.1 *Le système (3.19) peut être transformé en la forme normale d'OLSMC (3.20) par un difféomorphisme si et seulement si*

- i) *une des conditions du Théorème 3.4.1 est satisfaite.*
- ii) *$[g, \tau_{i,j}] = 0$, pour $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq k_i - 1$.*

Preuve. La preuve de ce théorème est similaire à celle du Théorème 1.4.1.

■

Remarque 3.6.2 *Si $g(x, u) = g_1(x)u_1 + \dots + g_q(x)u_q$, et les deux conditions i) et ii) du Théorème 3.6.1 sont vérifiées, alors*

$$\eta(y, u) = B_1(y)u_1 + \dots + B_q(y)u_q.$$

Nous allons étudier certains cas spéciaux sur l'injection de sortie.

Corollaire 3.6.3 *Supposons que les conditions i) et ii) du Théorème 3.6.1 sont vérifiées :*

a) *si $[g, \tilde{\tau}_{i,k_i}] = 0$, pour $1 \leq i \leq m$, alors :*

$$\eta(y, u) = \eta(u)$$

b) *si $g(x, u) = g_1(x)u_1 + \dots + g_q(x)u_q$ et*

$$[g_k, \tilde{\tau}_{i,k_i}] = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq q$$

alors

$$\eta(y, u) = B_1u_1 + \dots + B_qu_q.$$

Afin d'illustrer le Théorème 3.6.1 pour les systèmes avec des entrées, nous considérons l'exemple suivant.

Exemple 3.6.4 *Considérons le système suivant*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4u + 2x_2u \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_3 + u^2 \\ \dot{x}_3 = x_2u \\ \dot{x}_4 = 2x_3 - x_1 \\ h_1 = x_2 \\ h_2 = x_4 \end{cases}$$

nous avons

$$\theta = \begin{bmatrix} dx_2 \\ dx_1 - dx_3 \\ dx_4 \\ -dx_1 + 2dx_3 \end{bmatrix}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{cases} T_{1,1} = 2\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \\ T_{1,2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \\ T_{2,1} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \\ T_{2,2} = \frac{\partial}{\partial x_4} \end{cases}$$

Selon l'équation (3.18), nous obtenons

$$\begin{cases} \tau_{2,1} = T_{2,1} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \tau_{2,2} = T_{2,2} = \frac{\partial}{\partial x_4} \\ \tau_{1,1} = T_{1,1} + b_{2,1}^2(x) \tau_{2,1} = (b_{2,1}^2 + 2) \frac{\partial}{\partial x_1} + (b_{2,1}^2 + 1) \frac{\partial}{\partial x_3} \end{cases}$$

Car

$$[\tau_{1,1}, \tau_{2,2}] = 0$$

nous pouvons obtenir $\partial_{x_4} b_{2,1}^2 = 0$, et

$$\begin{aligned} \tau_{1,2} &= \left(\begin{array}{l} -(x_4u + 2x_2u) \partial_{x_1} b_{2,1}^2 - (x_1 - x_3 + u^2) \partial_{x_2} b_{2,1}^2 \\ -x_2u \partial_{x_3} b_{2,1}^2 \end{array} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \\ &+ \left(\begin{array}{l} -(x_4u + 2x_2u) \partial_{x_1} b_{2,1}^2 - (x_1 - x_3 + u^2) \partial_{x_2} b_{2,1}^2 \\ -x_2u \partial_{x_3} b_{2,1}^2 \end{array} \right) \frac{\partial}{\partial x_3} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_2} + b_{2,1}^2 \frac{\partial}{\partial x_4} \end{aligned}$$

Car

$$\begin{cases} [\tau_{1,2}, \tau_{2,1}] = 0 \\ [\tau_{1,2}, \tau_{2,2}] = 0 \\ [\tau_{1,1}, \tau_{1,2}] = 0 \end{cases}$$

Nous avons

$$\partial_{x_1} b_{2,1}^2 = \partial_{x_3} b_{2,1}^2 = \partial_{x_2} b_{2,1}^2 = 0$$

Par conséquent $b_{2,1}^2$ est une constant et nous avons

$$\tau_{1,2} = \frac{\partial}{\partial x_2} + b_{2,1}^2 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$\text{car } g = \begin{pmatrix} x_4 u + 2x_2 u \\ u^2 \\ x_2 u \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ainsi nous obtenons}$$

$$\begin{aligned} [g, \tau_{1,1}] &= [g, \tau_{2,1}] = 0 \\ [g, \tau_{1,2}] &\neq 0 \\ [g, \tau_{2,2}] &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\text{et finalement nous obtenons } \omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -b_{2,1}^2 - 1 & 0 & b_{2,1}^2 + 2 & 0 \\ 0 & -b_{2,1}^2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ ce qui}$$

$$\text{nous donne le difféomorphisme suivant : } z = \phi = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 \\ (b_{2,1}^2 + 2) x_3 - (b_{2,1}^2 + 1) x_1 \\ x_4 - b_{2,1}^2 x_2 \end{bmatrix}.$$

Finalement la forme normale est transformée en :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = (z_4 + b_{2,1}^2 z_2 + z_2) u \\ \dot{z}_2 = z_1 + u^2 \\ \dot{z}_3 = -b_{2,1}^2 z_2 u - (b_{2,1}^2 + 1) (z_4 + b_{2,1}^2) u \\ \dot{z}_4 = z_3 - b_{2,1}^2 u^2 \\ h_1 = z_2 \\ h_2 = z_4 + b_{2,1}^2 z_2 \end{cases}$$

Evidemment, si nous choisissons $b_{2,1}^2 = 0$, alors nous obtenons la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_4 u + z_2 u \\ \dot{z}_2 = z_1 + u^2 \\ \dot{z}_3 = -z_4 u \\ \dot{z}_4 = z_3 \\ h_1 = z_2 \\ h_2 = z_4 \end{cases}$$

qui est de la forme normale (3.2) avec $R_i = 0$.

L'Exemple 3.6.4 montre qu'un système avec des entrées peut être transformé en deux types des formes normales en même temps, soit la forme normale (3.2) avec $R_l = 0$ ou bien la forme normale (3.2) avec $R_l \neq 0$. Mais l'exemple suivant montre que certains systèmes ne peuvent pas être transformé en la forme avec $R_l = 0$.

Exemple 3.6.5 *Considérons l'exemple comme suit*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_4 + x_2 - x_2^2) u \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_3 + u^2 \\ \dot{x}_3 = x_2 u \\ \dot{x}_4 = x_3 + 2x_1 x_2 - 2x_2 x_3 + (2x_2 + 1) u^2 \\ h_1 = x_2 \\ h_2 = x_4 \end{cases}$$

nous avons

$$\theta = \begin{pmatrix} dx_2 \\ dx_1 - dx_3 \\ dx_4 \\ 2x_2 dx_1 + (2x_1 - 2x_3 + 2u^2) dx_2 + (1 - 2x_2) dx_3 \end{pmatrix}$$

et nous obtenons

$$\begin{cases} T_{1,1} = (1 - 2x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} - 2x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \\ T_{1,2} = 2(x_1 - x_3 + u^2) \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + 2(x_1 - x_3 + u^2) \frac{\partial}{\partial x_3} \\ T_{2,1} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \\ T_{2,2} = \frac{\partial}{\partial x_4} \end{cases}$$

Selon l'équation (3.18), nous avons

$$\begin{cases} \tau_{2,1} = T_{2,1} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \tau_{2,2} = T_{2,2} = \frac{\partial}{\partial x_4} \\ \tau_{1,1} = T_{1,1} + b_{2,1}^2(x) \tau_{2,1} = (1 + b_{2,1}^2 - 2x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + (b_{2,1}^2 - 2x_2) \frac{\partial}{\partial x_3} \end{cases}$$

puisque $[\tau_{11}, \tau_{21}] = 0$, nous avons $\partial_{x_1} b_{2,1}^2 + \partial_{x_3} b_{2,1}^2 = 0$. Et grâce à $[\tau_{11}, \tau_{22}] = 0$, nous avons aussi $\partial_{x_4} b_{2,1}^2 = 0$

Ainsi nous avons

$$\begin{aligned} \tau_{12} = & \begin{pmatrix} -(x_4 + x_2 - x_2^2) u \partial_{x_1} b_{2,1}^2 - (x_1 - x_3 + u^2) (\partial_{x_2} b_{2,1}^2 - 2) \\ -x_2 u \partial_{x_3} b_{2,1}^2 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ & + \begin{pmatrix} -(x_4 + x_2 - x_2^2) u \partial_{x_1} b_{2,1}^2 - (x_1 - x_3 + u^2) (\partial_{x_2} b_{2,1}^2 - 2) \\ -x_2 u \partial_{x_3} b_{2,1}^2 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_3} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_2} + b_{2,1}^2 \frac{\partial}{\partial x_4} \end{aligned}$$

Puisque $[\tau_{12}, \tau_{22}] = 0$, nous obtenons $\partial_{x_1} b_{2,1}^2 = 0$, et $\partial_{x_3} b_{2,1}^2 = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} \tau_{12} = & -(x_1 - x_3 + u^2) (\partial_{x_2} b_{2,1}^2 - 2) \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \\ & - (x_1 - x_3 + u^2) (\partial_{x_2} b_{2,1}^2 - 2) \frac{\partial}{\partial x_3} + b_{2,1}^2 \frac{\partial}{\partial x_4} \end{aligned}$$

Comme

$$[\tau_{12}, \tau_{21}] = 0,$$

nous obtenons

$$\partial_{x_2} b_{2,1}^2 = 2$$

Par conséquent

$$b_{2,1}^2(x) = a + 2x_2$$

où a est constante. Finalement

$$\tau_{12} = \frac{\partial}{\partial x_2} + (a + 2x_2) \frac{\partial}{\partial x_4}$$

Il est facile de montrer que $[\tau_{11}, \tau_{12}] = 0$. Car $g = \begin{pmatrix} (x_4 + x_2 - x_2^2)u \\ u^2 \\ x_2u \\ (2x_2 + 1)u^2 \end{pmatrix}$

ainsi nous avons

$$\begin{aligned} [g, \tau_{1,1}] &= [g, \tau_{2,1}] = 0 \\ [g, \tau_{1,2}] &\neq 0 \\ [g, \tau_{2,2}] &\neq 0 \end{aligned}$$

Ensuite, nous obtenons $\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & -a-2x_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ce qui nous donne

le difféomorphisme : $z = \phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 \\ -ax_1 + (a+1)x_3 \\ x_4 - ax_2 - x_2^2 \end{pmatrix}$, avec lequel ce

système est transformé en

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_4u + az_2u \\ \dot{z}_2 = z_1 + u^2 \\ \dot{z}_3 = (1 - a^2)z_2 - az_4u \\ \dot{z}_4 = z_3 + (1 - a)u^2 \\ h_1 = z_2 \\ h_2 = z_4 + az_2 + z_2^2 \end{cases}$$

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle forme normale avec des sorties multiples combinées, qui est une généralisation de la forme normale avec des sorties multiples linéaires traitée en [102] et [158]. Premièrement, nous avons montré que la condition (3.6) n'est ni nécessaire ni suffisante. Ensuite, après avoir donné les conditions nécessaires et suffisantes qui garantissent l'existence d'un difféomorphisme afin de transformer les systèmes non

linéaires en la forme normale possédant des sorties multiples combinées, nous avons proposé d'établir le possible $(\tau_{l,1})_{1 \leq l \leq m}$, non pas par la condition (3.9) du Théorème 3.3.4, mais par l'équation (3.4) afin de simplifier des calculs. Finalement, la généralisation aux systèmes non linéaires avec des entrées a été discutée.

Chapitre 4

Forme Normale d'Observabilité Quadratique Dépendante de la Sortie

4.1 Introduction

Dans le chapitre 1, nous avons donné les conditions suffisantes et nécessaires pour garantir l'existence d'un difféomorphisme qui transforme le système (1.1) en la forme normale d'OLDS (1.2). Mais si ces conditions nécessaires et suffisantes ne sont pas satisfaites, ce qui signifie que le système donné ne peut pas être linéarisé le long de sa sortie, alors évidemment nous devons étudier s'il peut être linéarisé le long de sa sortie au moins en ce qui concerne les termes quadratiques. Nous appelons ceci une approximation d'ordre supérieur en référence à l'approximation au linéaire tangent (c.-à.-d., ordre 1). Cette méthode a été proposée initialement pour l'analyse de la stabilité du système non linéaire en [132], et en [86] pour l'analyse de la commandabilité, et pour l'analyse de l'observabilité en [28]. Le travail de ce chapitre est le prolongement naturel du travail de [28] aux formes normales dépendantes de la sortie. Puisque [28][167][168] ont étudié les formes normales quadratiques basées seulement sur une partie linéaire mise sous forme de Brunovsky, ici nous analyserons un cas plus général, appelé la forme normale d'Observabilité Quadratique Dépendante de la Sortie (la forme normale d'OQDS), qui est une forme approximée de la forme normale d'OLDS présentée dans le chapitre 1.

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = f(\zeta) + g(\zeta)u \\ y = h(\zeta) \end{cases} \quad (4.1)$$

où $\zeta \in D \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions analytiques, et supposons que pour tous $\zeta \in D$, et $\text{rang} [dh, dL_f h, \dots, dL_f^{n-1} h]^T = n$.

Si les conditions du Théorème 1.3.2 ne sont pas vérifiées, nous supposons

que le système (4.1) peut être transformé en la forme suivante¹ :

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \beta(y) + A(y)\eta + \gamma_y^{[2]}(\bar{\eta}) + B(y)u + \vartheta_y^{[1]}(\bar{\eta})u + O_y^{[3]}(\bar{\eta}, u) \\ y = C\eta \end{cases} \quad (4.2)$$

où $\eta \in \mathbb{R}^n$, $\bar{\eta} = [\eta_1, \dots, \eta_{n-1}]^T$,

$$\begin{aligned} \gamma_y^{[2]}(\bar{\eta}) &= [\gamma_{y_1}^{[2]}(\bar{\eta}), \dots, \gamma_{y_n}^{[2]}(\bar{\eta})]^T, \\ \vartheta_y^{[1]}(\bar{\eta}) &= [\vartheta_{y_1}^{[1]}(\bar{\eta}), \dots, \vartheta_{y_n}^{[1]}(\bar{\eta})]^T, \end{aligned}$$

et pour $1 \leq i \leq n$, $\gamma_{y_i}^{[2]}(\bar{\eta})$ et $\vartheta_{y_i}^{[1]}(\bar{\eta})$ sont les fonctions de $\bar{\eta}$ au degré 2 et 1 respectivement paramétrées par y , $\beta(y) = [\beta_1(y), \dots, \beta_n(y)]^T$, et

$$A(y) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1(y) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_{n-1}(y) & 0 \end{pmatrix},$$

et $B(y)$ est défini comme suit² :

$$B(y) = \begin{pmatrix} b(y) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Evidemment par une injection $\beta(y)$, le système (4.2) est équivalent modulo une injection de sortie au système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = A(y)x + \gamma_y^{[2]}(\bar{x}) + B(y)u + \vartheta_y^{[1]}(\bar{x})u + O_y^{[3]}(\bar{x}, u) \\ y = x_n = Cx \end{cases} \quad (4.4)$$

où $\bar{x} = [x_1, \dots, x_{n-1}]^T$.

Notre problème est comment caractériser le fait que tous les termes quadratiques peuvent être supprimés par un difféomorphisme? Si ce genre de difféomorphisme n'existe pas, alors quelle est la forme normale et les termes résonnants?

Afin de répondre à ces questions, dans la prochaine section, nous présentons les équations homologiques pour garantir la transformation quadratiquement équivalente par difféomorphisme. Dans la section 4.3, deux formes normales d'OQDS correspondantes respectivement à privilégier les états ou les entrées du système seront discutées. Ensuite, afin de simplifier le calcul, les nombres caractéristiques de la forme normale d'OQDS privilégiant les états et les entrées seront présentés en utilisant des matrices symétriques pour représenter les parties quadratiques.

¹Pour le moment, nous n'avons pas encore trouvé les conditions nécessaires et suffisantes qui garantissent cette transformation.

²Afin de résoudre le problème d'inversion à gauche pour cette forme, $B(y)$ doit vérifier cette équation, ou d'autre condition comme uniforme asymptotique stabilité de la dynamique des zéros.

4.2 Equations Homologiques

Définition 4.2.1 *Le système (4.4) est quadratiquement équivalent au système*

$$\begin{cases} \dot{z} = A(y)z + \tilde{\gamma}_y^{[2]}(\bar{z}) + B(y)u + \bar{\vartheta}_y^{[1]}(\bar{z})u + O_y^{[3]}(\bar{z}, u) \\ y = Cz \end{cases} \quad (4.5)$$

s'il existe un difféomorphisme de la forme :

$$z = x + \phi_y^{[2]}(\bar{x}) \quad (4.6)$$

qui transforme le terme quadratique $\gamma_y^{[2]}(\bar{x})$ en un autre terme quadratique $\tilde{\gamma}_y^{[2]}(\bar{z})$, où $\phi_y^{[2]}(\bar{x}) = [\phi_{y,1}^{[2]}(\bar{x}), \dots, \phi_{y,n}^{[2]}(\bar{x})]^T$ et les $\phi_{y,i}^{[2]}(\bar{x})$ sont des polynômes homogènes d'ordre 2 en z .

Remarque 4.2.2 *i) Comme pour la forme normale linéaire présentée au chapitre 2, ici nous choisissons la sortie égale à x_n afin de ne pas modifier la sortie, ceci signifie que le difféomorphisme $z = x + \phi_y^{[2]}(\bar{x})$ doit vérifier $\phi_{y,n}^{[2]}(\bar{x}) = 0$.*

ii) Il est à noter que ce choix n'est pas obligé. Nous pouvons aussi choisir $\phi_{y,n}^{[2]}(\bar{x}) = \phi_{y,n}^{[0]}(y)$, c.-à.-d., une fonction de la sortie.

Proposition 4.2.3 *Le système (4.4) est quadratiquement équivalent modulo une injection de sortie au système (4.5), si et seulement si les équations homologiques suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{cases} \gamma_y^{[2]}(\bar{x}) + \Gamma_y^{[2]}(\bar{x}) = A(y)\phi_y^{[2]}(\bar{x}) + \tilde{\gamma}_y^{[2]}(\bar{x}) \\ \vartheta_y^{[1]}(\bar{x}) + \frac{\partial \phi_y^{[2]}(\bar{x})}{\partial x_1} b(y) = \bar{\vartheta}_y^{[1]}(\bar{x}) \end{cases} \quad (4.7)$$

où

$$\Gamma_y^{[2]}(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_y^{[2]}(\bar{x})}{\partial x_2} \alpha_1(y) & \cdots & \frac{\partial \phi_y^{[2]}(\bar{x})}{\partial x_{n-1}} \alpha_{n-2}(y) & 0 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Remarque 4.2.4 *L'équation (4.7) peut être formulée comme suit :*

$$\begin{cases} [A(y)x, \phi_y^{[2]}(\bar{x})] = \tilde{\gamma}_y^{[2]}(\bar{x}) - \gamma_y^{[2]}(\bar{x}) + O_y^{[3]}(\bar{x}) \\ [B(y), \phi_y^{[2]}(\bar{x})] = \bar{\vartheta}_y^{[1]}(\bar{x}) - \vartheta_y^{[1]}(\bar{x}) \end{cases}$$

Preuve. Supposons que $z = x + \phi_y^{[2]}(\bar{x})$, ainsi $\dot{z} = \dot{x} + \frac{\partial \phi_y^{[2]}(\bar{x})}{\partial x} \dot{x}$.

Selon l'équation (4.4) et (4.5), nous avons

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \left[1 + \frac{\partial \phi_y^{[2]}(\bar{x})}{\partial x} \right] [A(y)x + \gamma_y^{[2]}(\bar{x}) + B(y)u + \vartheta_y^{[1]}(\bar{x})u + O_y^{[3]}(\bar{x}, u)] \\ &= A(y) (x + \phi_y^{[2]}(\bar{x})) + \tilde{\gamma}_y^{[2]}(\bar{x} + \phi_y^{[2]}(\bar{x})) + B(y)u + \bar{\vartheta}_y^{[1]}(\bar{x})u + O_y^{[3]}(\bar{x}, u) \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons

$$\begin{cases} \gamma_y^{[2]}(\bar{x}) + \frac{\partial \phi_y^{[2]}(\bar{x})}{\partial x} A(y)x = A(y)\phi_y^{[2]}(\bar{x}) + \tilde{\gamma}_y^{[2]}(\bar{x}) \\ \vartheta_y^{[1]}(\bar{x}) + \frac{\partial \phi_y^{[2]}(\bar{x})}{\partial x} B(y) = \bar{\vartheta}_y^{[1]}(\bar{x}) \end{cases} \quad (4.8)$$

où

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi_y^{[2]}(\bar{x})}{\partial x} A(y)x \\ &= \left[\frac{\partial \phi_y^{[2]}(\bar{x})}{\partial x_2} \alpha_1(y) \quad \dots \quad \frac{\partial \phi_y^{[2]}(\bar{x})}{\partial x_{n-1}} \alpha_{n-2}(y) \quad \frac{\partial \phi_y^{[2]}(\bar{x})}{\partial y} \alpha_{n-1}(y) \quad 0 \right] x \\ &= \Gamma_y^{[2]}(\bar{x}) + O_y^{[3]}(\bar{x}) \end{aligned}$$

et finalement l'équation (4.8) devient :

$$\begin{cases} \gamma_y^{[2]}(\bar{x}) + \Gamma_y^{[2]}(\bar{x}) = A(y)\phi_y^{[2]}(\bar{x}) + \tilde{\gamma}_y^{[2]}(\bar{x}) \\ \vartheta_y^{[1]}(\bar{x}) + \frac{\partial \phi_y^{[2]}(\bar{x})}{\partial x_1} b(y) = \bar{\vartheta}_y^{[1]}(\bar{x}). \end{cases}$$

■

4.3 Forme normale d'OQDS

Puisque dans le système (4.5), il y a deux termes quadratiques : $\tilde{\gamma}_y^{[2]}(\bar{z})$ et $\bar{\vartheta}_y^{[1]}(\bar{z})u$, nous donnerons deux formes normales d'OQDS qui correspondent respectivement à privilégier les états et les entrées (C.-à.-d., $\tilde{\gamma}_y^{[2]}(\bar{z})$ et $\bar{\vartheta}_y^{[1]}(\bar{z})u$). Evidemment celles-ci sont équivalentes, et des exemples seront présentés afin d'illustrer l'intérêt de ces deux formes normales.

4.3.1 Forme normale d'OQDS privilégiant les états

Dans cette section, nous cherchons la forme normale d'OQDS en simplifiant le terme quadratique $\tilde{\gamma}_y^{[2]}(\bar{z})$, que nous appelons la forme normale d'OQDS privilégiant les états.

Théorème 4.3.2 *La forme normale d'OQDS privilégiant les états du système (4.5) par l'équivalence quadratique modulo une injection de sortie est de la*

forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi} = A(y)\xi + \begin{pmatrix} \sum_{j \geq i=1}^{n-1} h_{ij}(y)\xi_i\xi_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + B(y)u \\ \\ + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} \bar{c}_i^1(y)\xi_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n-1} \bar{c}_i^{n-1}(y)\xi_i \\ \sum_{i=1}^{n-1} \bar{c}_i^n(y)\xi_i \end{pmatrix} u + O_y^{[3]}(\bar{\xi}, u) \\ y = \xi_n \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Preuve. Comme nous voulons $\tilde{\gamma}_y^{[2]}(\bar{x}) = 0$, la première équation homologique de (4.7) devient

$$\gamma_y^{[2]}(\bar{x}) + \Gamma_y^{[2]}(\bar{x}) = A(y)\phi_y^{[2]}(\bar{x})$$

où

$$\Gamma_y^{[2]}(\bar{x}) := \left[\frac{\partial \phi_y^{[2]}(\bar{x})}{\partial x_2} \alpha_1(y) \quad \cdots \quad \frac{\partial \phi_y^{[2]}(\bar{x})}{\partial x_{n-1}} \alpha_{n-2}(y) \quad 0 \quad 0 \right]^T x.$$

Nous définissons

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_y^{[2]}(\bar{x}) = [\phi_{y,1}^{[2]}(\bar{x}), \dots, \phi_{y,n}^{[2]}(\bar{x})]^T, \\ \gamma_y^{[2]}(\bar{x}) = [\gamma_{y,1}^{[2]}(\bar{x}), \dots, \gamma_{y,n}^{[2]}(\bar{x})]^T, \\ \vartheta_y^{[1]}(\bar{x}) = [\vartheta_{y,1}^{[1]}(\bar{x}), \dots, \vartheta_{y,n}^{[1]}(\bar{x})]^T, \end{array} \right.$$

où $\phi_{y,n}^{[2]}(\bar{x}) = 0$.

Et nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1(y)\phi_{y,1}^{[2]}(\bar{x}) = \gamma_{y,2}^{[2]}(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{n-2} \left[\frac{\partial \phi_{y,2}^{[2]}(\bar{x})}{\partial x_{i+1}} \alpha_i(y)x_i \right] \\ \vdots \\ \alpha_{n-2}(y)\phi_{y,n-2}^{[2]}(\bar{x}) = \gamma_{y,n-1}^{[2]}(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{n-2} \left[\frac{\partial \phi_{y,n-1}^{[2]}(\bar{x})}{\partial x_{i+1}} \alpha_i(y)x_i \right] \\ \alpha_{n-1}(y)\phi_{y,n-1}^{[2]}(\bar{x}) = \gamma_{y,n}^{[2]}(\bar{x}) \end{array} \right. \quad (4.10)$$

et la première ligne de l'équation (4.7) nous donne

$$\gamma_{y,1}^{[2]}(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{n-2} \left[\frac{\partial \phi_{y,1}^{[2]}(\bar{x})}{\partial x_{i+1}} x_i \alpha_i(y) \right] = 0 \quad (4.11)$$

L'équation (4.10) nous impose tous les $\phi_{y,i}^{[2]}(\bar{x})$ qui sont utilisés pour annuler les termes quadratiques de $\gamma_{y,2}^{[2]}(\bar{x})$ à $\gamma_{y,n}^{[2]}(\bar{x})$ respectivement. Si tous

les $\gamma_{y,i}^{[2]}(\bar{x})$ et $\phi_{y,i}^{[2]}(\bar{x})$ vérifient aussi l'équation (4.11), nous dirons que ce système peut être quadratiquement linéarisable. Sinon, il nous donne les termes résonnants : $\gamma_{y,1}^{[2]}(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i(y) \frac{\partial \phi_{y,1}^{[2]}(\bar{x})}{\partial x_{i+1}} x_i$.

Avec

$$\vartheta_y^{[1]}(\bar{x}) + \frac{\partial \phi_y^{[2]}(\bar{x})}{\partial x_1} b(y) = \bar{\vartheta}_y^{[1]}(\bar{x})$$

Nous avons $\bar{\vartheta}_{y,n}^{[1]}(\bar{x}) = \vartheta_{y,n}^{[1]}(\bar{x})$. Supposons

$$\bar{\vartheta}_{y,n}^{[1]}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n-1} \bar{c}_i^n(y) x_i$$

et

$$\vartheta_{y,n}^{[1]}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i^n(y) x_i,$$

alors $\bar{c}_i^n(y) = c_i^n(y)$. Et il est impossible d'annuler d'autres composants. Ainsi nous pouvons obtenir la forme normale (4.9).

■

Afin de mettre en évidence la méthode proposée ci-dessus, nous considérons l'exemple suivant.

Exemple 4.3.3 *Considérons le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_1^2 - 2x_3^2 x_1 x_2 + x_3^2 x_2^2) + (x_3 - 4x_3^2 x_1 - 2x_3^4 x_2) u \\ \dot{x}_2 = x_3 x_1 + x_3^2 x_2^2 - (x_3 x_2 + 2x_3^2 x_1) u \\ \dot{x}_3 = x_3 x_2 + x_3^2 x_1 u \\ y = x_3 \end{cases} \quad (4.12)$$

où $y \neq 0$. Selon l'équation (4.10), nous avons

$$\begin{cases} \phi_{y,3}^{[2]}(\bar{x}) = 0 \\ \alpha_2(y) \phi_{y,2}^{[2]}(\bar{x}) = \gamma_{y,3}^{[2]}(\bar{x}) \\ \alpha_1(y) \phi_{y,1}^{[2]}(\bar{x}) = \gamma_{y,2}^{[2]}(\bar{x}) + \alpha_1(y) \frac{\partial \phi_{y,2}^{[2]}(\bar{x})}{\partial x_2} x_1 \end{cases}$$

ce qui nous donne

$$\begin{cases} \phi_{y,3}^{[2]}(\bar{x}) = 0 \\ \phi_{y,2}^{[2]}(\bar{x}) = 0 \\ \phi_{y,1}^{[2]}(\bar{x}) = x_3 x_2^2 \end{cases}$$

et nous obtenons

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + x_3 x_2^2 \\ z_2 = x_2 \\ z_3 = x_3 \end{cases}$$

Ainsi les termes quadratiques résonnants sont

$$\gamma_{y,1}^{[2]}(\bar{x}) + \alpha_1(y) \frac{\partial \phi_{y,1}^{[2]}(\bar{x})}{\partial x_2} x_1 = x_1^2 + x_3^2 x_2^2$$

ce qui signifie que dans l'équation (4.9), $h_{12}(y) = 0$, $h_{11}(y) = 1$, $h_{22}(y) = z_3^2$.

Avec ce difféomorphisme, nous avons finalement la forme normale suivante

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1^2 + z_3^2 z_2^2 + (z_3 - 4z_3^2 z_1 - 2z_3^4 z_2) u + O_y^{[3]}(z_1, z_2, u) \\ \dot{z}_2 = z_3 z_1 - (z_3 z_2 + 2z_3^2 z_1) u + O_y^{[3]}(z_1, z_2, u) \\ \dot{z}_3 = z_3 z_2 + z_3^2 z_1 u + O_y^{[3]}(z_1, z_2, u) \\ y = z_3 \end{cases} \quad (4.13)$$

4.3.4 Forme normale d'OQDS privilégiant l'entrée

Dans cette section, nous cherchons une autre forme normale d'OQDS en simplifiant des termes quadratiques : $\bar{\vartheta}_y^{[1]}(\bar{z})u$, dans le système (4.5). Une telle forme s'appelle la forme normale d'OQDS privilégiant l'entrée.

Théorème 4.3.5 *La forme normale d'OQDS privilégiant l'entrée du système (4.5) par l'équivalence quadratique modulo une injection de sortie est de la forme suivante :*

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A(y)\xi + \begin{pmatrix} \sum_{j \geq i=1}^{n-1} d_i^1(y)\xi_i \xi_j \\ \xi_1 \sum_{i=1}^{n-1} d_i^2(y)\xi_i \\ \vdots \\ \xi_1 \sum_{i=1}^{n-1} d_i^n(y)\xi_i \end{pmatrix} + B(y)u \\ + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sum_{i=1}^{n-1} \bar{c}_i^n(y)\xi_i \end{pmatrix} u + O_y^{[3]}(\bar{\xi}, u) \\ y = \xi_n \end{cases} \quad (4.14)$$

Preuve. Comme nous imposons $\phi_{y,n}^{[2]}(\bar{x}) = 0$, nous avons

$$\vartheta_{y,n}^{[1]}(\bar{x}) = \bar{\vartheta}_{y,n}^{[1]}(\bar{x})$$

et si nous posons

$$\vartheta_y^{[1]}(\bar{x}) + \frac{\partial \phi_y^{[2]}(\bar{x})}{\partial x_1} b(y) = 0 \quad (4.15)$$

alors nous obtenons $\bar{\vartheta}_{y,1}^{[1]}(\bar{x}) = \dots = \bar{\vartheta}_{y,n-1}^{[1]}(\bar{x}) = 0$.

Selon la première équation homologique de (4.7),

$$\gamma_y^{[2]}(\bar{x}) + \Gamma_y^{[2]}(\bar{x}) = A(y)\phi_y^{[2]}(\bar{x}) + \tilde{\gamma}_y^{[2]}(\bar{x}) \quad (4.16)$$

nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\gamma}_{y,1}^{[2]}(\bar{x}) = \gamma_{y,1}^{[2]}(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{n-2} \left[\frac{\partial \phi_{y,1}^{[2]}(\bar{x})}{\partial x_{i+1}} x_i \alpha_i(y) \right] \\ \tilde{\gamma}_{y,2}^{[2]}(\bar{x}) + \alpha_1(y) \phi_{y,1}^{[2]}(\bar{x}) = \gamma_{y,2}^{[2]}(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{n-2} \left[\frac{\partial \phi_{y,2}^{[2]}(\bar{x})}{\partial x_{i+1}} \alpha_i(y) x_i \right] \\ \vdots \\ \tilde{\gamma}_{y,n-1}^{[2]}(\bar{x}) + \alpha_{n-2}(y) \phi_{y,n-2}^{[2]}(\bar{x}) = \gamma_{y,n-1}^{[2]}(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{n-2} \left[\frac{\partial \phi_{y,n-1}^{[2]}(\bar{x})}{\partial x_{i+1}} \alpha_i(y) x_i \right] \\ \tilde{\gamma}_{y,n}^{[2]}(\bar{x}) + \alpha_{n-1}(y) \phi_{y,n-1}^{[2]}(\bar{x}) = \gamma_{y,n}^{[2]}(\bar{x}) \end{array} \right.$$

Grâce à l'équation (4.15), le terme $\phi_y^{[2]}(\bar{x})$ peut annuler tous les termes quadratiques de la deuxième ligne jusqu'à la dernière ligne sauf les termes $x_1 \sum_{i=1}^{n-1} d_i^j x_i$, $j \in [1, n]$, ainsi nous pouvons obtenir

$$\tilde{\gamma}_y^{[2]}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \sum_{j \geq i=1}^{n-1} d_i^1(y) x_i x_j \\ x_1 \sum_{i=1}^{n-1} d_i^2(y) x_i \\ \vdots \\ x_1 \sum_{i=1}^{n-1} d_i^n(y) x_i \end{pmatrix}.$$

Finalement nous obtenons la forme normale (4.14). ■

Afin d'illustrer la méthode proposée ci-dessus, nous considérons l'exemple suivant.

Exemple 4.3.6 (*Exemple 4.3.3 suite*) Selon

$$\vartheta_y^{[1]}(\bar{x}) + \frac{\partial \phi_y^{[2]}(\bar{x})}{\partial x_1} b(y) = 0$$

nous obtenons $\bar{\vartheta}_{y,3}^{[1]}(\bar{x}) = \vartheta_{y,3}^{[1]}(\bar{x}) = x_3^2 x_1$.

Car

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi_{y,2}^{[2]}(\bar{x})}{\partial x_1} x_3 = x_3 x_2 + 2x_3^2 x_1 \\ \frac{\partial \phi_{y,1}^{[2]}(\bar{x})}{\partial x_1} x_3 = 4x_3^2 x_1 + 2x_3^4 x_2 \end{array} \right.$$

ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{y,3}^{[2]}(\bar{x}) = 0 \\ \phi_{y,2}^{[2]}(\bar{x}) = x_1 x_2 + x_3 x_1^2 + \kappa_2(y) x_2^2 \\ \phi_{y,1}^{[2]}(\bar{x}) = 2x_3 x_1^2 + 2x_3^3 x_1 x_2 + \kappa_1(y) x_2^2 \end{array} \right.$$

Selon l'équation homologique (4.16), nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\gamma}_{y,1}^{[2]}(\bar{x}) = x_1^2 - 2x_3^2 x_1 x_2 + x_3^2 x_2^2 + \frac{\partial \phi_{y,1}^{[2]}(\bar{x})}{\partial x_2} x_1 x_3 \\ \tilde{\gamma}_{y,2}^{[2]}(\bar{x}) + x_3 \phi_{y,1}^{[2]}(\bar{x}) = x_3^2 x_2^2 + \frac{\partial \phi_{y,2}^{[2]}(\bar{x})}{\partial x_2} x_1 x_3 \\ \tilde{\gamma}_{y,3}^{[2]}(\bar{x}) + x_3 \phi_{y,2}^{[2]}(\bar{x}) = 0 \end{array} \right.$$

Car

$$\tilde{\gamma}_{y,3}^{[2]}(\bar{x}) + x_3 [x_1x_2 + x_3x_1^2 + \kappa_2(y)x_2^2] = 0$$

avec $\kappa_2(y) = 0$, nous pouvons annuler le terme x_2^2 , ainsi nous obtenons

$$\tilde{\gamma}_{y,3}^{[2]}(\bar{x}) = -x_3 [x_1x_2 + x_3x_1^2]$$

et

$$\phi_{y,2}^{[2]}(\bar{x}) = x_1x_2 + x_3x_1^2.$$

et donc

$$\tilde{\gamma}_{y,2}^{[2]}(\bar{x}) + x_3 [2x_3x_1^2 + 2x_3^3x_1x_2 + \kappa_1(y)x_2^2] = x_3^2x_2^2 + x_1^2x_3$$

si nous choisissons $\kappa_1(y) = x_3$, alors nous pouvons aussi annuler le terme x_2^2 , ainsi nous avons

$$\tilde{\gamma}_{y,2}^{[2]}(\bar{x}) = -x_3 [2x_3x_1^2 + 2x_3^3x_1x_2] + x_1^2x_3$$

et

$$\phi_{y,1}^{[2]}(\bar{x}) = 2x_3x_1^2 + 2x_3^3x_1x_2 + x_3x_2^2.$$

Finalement nous trouvons

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{y,1}^{[2]}(\bar{x}) &= x_1^2 - 2x_3^2x_1x_2 + x_3^2x_2^2 + [2x_3^3x_1 + 2x_3x_2]x_1x_3 \\ &= (1 + 2x_3^4)x_1^2 + x_3^2x_2^2 \end{aligned}$$

Et nous obtenons

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + 2x_3x_1^2 + 2x_3^3x_1x_2 + x_3x_2^2 \\ z_2 = x_2 + x_1x_2 + x_3x_1^2 \\ z_3 = x_3 \end{cases} \quad (4.17)$$

Avec ce difféomorphisme, nous avons la forme normale suivante

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = (1 + 2z_3^4)z_1^2 + z_3^2z_2^2 + z_3u + O_y^{[3]}(z_1, z_2, u) \\ \dot{z}_2 = z_3z_1 + (z_3 - 2z_3^2)z_1^2 - 2z_3^4z_1z_2 + O_y^{[3]}(z_1, z_2, u) \\ \dot{z}_3 = z_3z_2 - z_3z_1z_2 - z_3^2z_1^2 + z_3^2z_1u + O_y^{[3]}(z_1, z_2, u) \\ y = z_3 \end{cases} \quad (4.18)$$

4.4 Nombres Caractéristiques

Dans cette section, nous donnerons une autre méthode qui nous permet de déterminer systématiquement le difféomorphisme (4.6). Ici nous déterminons la classe d'équivalence quadratique d'observabilité d'un système sans avoir à résoudre formellement les équations homologiques (4.7). Pour cela, nous introduirons ce que nous appelons les matrices caractéristiques.

4.4.1 Nombres caractéristiques pour la forme normale d'OQDS privilégiant les états

Afin de simplifier l'équation (4.7), nous supposons :

$$\begin{cases} \phi_{y,i}^{[2]}(\bar{x}) = x^T \phi_{y,i} x, \\ \tilde{\gamma}_{y,i}^{[2]}(\bar{x}) = x^T \tilde{\gamma}_{y,i} x, \\ \gamma_{y,i}^{[2]}(\bar{x}) = x^T \gamma_{y,i} x, \end{cases}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{y,i} := \begin{pmatrix} \phi_{11}^i(y) & \cdots & \phi_{1,n-1}^i(y) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \phi_{1,n-1}^i(y) & \cdots & \phi_{n-1,n-1}^i(y) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{\gamma}_{y,i} := \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_{11}^i(y) & \cdots & \tilde{\gamma}_{1,n-1}^i(y) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\gamma}_{1,n-1}^i(y) & \cdots & \tilde{\gamma}_{n-1,n-1}^i(y) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_{y,i} := \begin{pmatrix} \gamma_{11}^i(y) & \cdots & \gamma_{1,n-1}^i(y) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{1,n-1}^i(y) & \cdots & \gamma_{n-1,n-1}^i(y) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

Nous obtenons

$$\Gamma_y^{[2]}(\bar{x}) = [\Gamma_{y,1}^{[2]}(\bar{x}), \dots, \Gamma_{y,n}^{[2]}(\bar{x})]^T$$

où $\Gamma_{y,i}^{[2]}(\bar{x}) = x^T \Gamma_{y,i} x$ et

$$\Gamma_{y,i} = \bar{A}^T(y) \phi_{y,i} + \phi_{y,i} \bar{A}(y),$$

où

$$\bar{A}(y) := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1(y) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_{n-2}(y) & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$A(y) \phi_y^{[2]}(\bar{x}) := x^T \bar{\phi}_y x,$$

pour tous x , l'équation homologique (4.7) peut être décrite comme suit :

$$x^T \gamma_y x + x^T \Gamma_y x = x^T \bar{\phi}_y x + x^T \tilde{\gamma}_y x$$

Et nous avons

$$\gamma_y + \Gamma_y = \bar{\phi}_y + \tilde{\gamma}_y \tag{4.19}$$

si $\tilde{\gamma}_y = 0$, nous pouvons annuler tous les termes quadratique du système (4.4).

Car

$$A(y)\phi_y^{[2]}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1(y)\phi_{y,1}^{[2]}(\bar{x}) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(y)\phi_{y,n-1}^{[2]}(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

si $\tilde{\gamma}_y^{[2]} = 0$, alors

$$\begin{pmatrix} \gamma_{y,1} \\ \gamma_{y,2} \\ \vdots \\ \gamma_{y,n} \end{pmatrix} + \bar{A}^T(y) \begin{pmatrix} \phi_{y,1} \\ \phi_{y,2} \\ \vdots \\ \phi_{y,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{y,1} \\ \phi_{y,2} \\ \vdots \\ \phi_{y,n} \end{pmatrix} \bar{A}(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1(y)\phi_{y,1} \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(y)\phi_{y,n-1} \end{pmatrix},$$

nous avons

$$\begin{cases} \gamma_{y,1} + \bar{A}^T(y)\phi_{y,1} + \phi_{y,1}\bar{A}(y) = 0 \\ \alpha_i(y)\phi_{y,i} = \gamma_{y,i+1} + \bar{A}^T(y)\phi_{y,i+1} + \phi_{y,i+1}\bar{A}(y), \end{cases}$$

pour $1 \leq i \leq n-1$.

Finalement par récurrence, nous avons

$$\phi_{y,i} = \sum_{k=0}^{n-1-i} \left\{ \frac{\sum_{j=0}^k [C_j^k (\bar{A}^T(y))^{k-j} \gamma_{y,i+k+1} \bar{A}^j(y)]}{\prod_{m=0}^k \alpha_{i+m}} \right\} \quad (4.20)$$

pour $1 \leq i \leq n-1$, où C_j^k signifie le coefficient combinatoire.

Avec ce difféomorphisme, d'après l'égalité ci-dessous :

$$\vartheta_y^{[1]}(\bar{x}) + \frac{\partial \phi_y^{[2]}(\bar{x})}{\partial x_1} b(y) = \bar{\vartheta}_y^{[1]}(\bar{x})$$

nous avons

$$\vartheta_{y,n}^{[1]}(\bar{x}) = \bar{\vartheta}_{y,n}^{[1]}(\bar{x}).$$

Supposons

$$\begin{cases} \vartheta_{y,n}^{[1]}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n-1} c_j^n(y) x_j, \\ \bar{\vartheta}_{y,n}^{[1]}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n-1} \bar{c}_j^n(y) x_j, \end{cases}$$

alors

$$\bar{c}_j^n(y) = c_j^n(y).$$

En raison de

$$\vartheta_y^{[1]}(\bar{x}) + \frac{\partial \phi_y^{[2]}(\bar{x})}{\partial x_1} b(y) = \bar{\vartheta}_y^{[1]}(\bar{x})$$

et supposons

$$\begin{cases} \vartheta_{y,i}^{[1]}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n-1} c_j^i(y)x_j, \\ \bar{\vartheta}_{y,i}^{[1]}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n-1} \bar{c}_j^i(y)x_j. \end{cases}$$

Alors à cause de $\phi_{y,i}^{[2]}(\bar{x}) = x^T \phi_{y,i} x$, nous obtenons

$$\begin{cases} \bar{c}_j^i(y) = c_j^i(y) + 2b(y)\phi_{1,j}^i(y), \\ \bar{c}_j^n(y) = c_j^n(y) \end{cases} \quad (4.21)$$

pour $1 \leq i, j \leq n-1$.

Définition 4.4.2 Nous définissons la matrice caractéristique pour le système (4.4) comme suit :

$$M_y = \gamma_{y,1} + \bar{A}^T(y)\phi_{y,1} + \phi_{y,1}\bar{A}(y) \quad (4.22)$$

et

$$C_y = \begin{pmatrix} \bar{c}_1^1(y) & \cdots & \bar{c}_{n-1}^1(y) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{c}_1^n(y) & \cdots & \bar{c}_{n-1}^n(y) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

où M_y et C_y sont en fonction seulement de y .

Théorème 4.4.3 La forme normale d'OQDS privilégiant les états du système (4.5) est comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A(y)\xi + \xi^T \begin{pmatrix} M_y \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xi + B(y)u + C_y \xi u + O_y^{[3]}(\bar{\xi}, u) \\ y = \xi_n \end{cases} \quad (4.24)$$

où M_y est défini en (4.22).

Remarque 4.4.4 i) $M_y(i, j)$ dans l'équation (4.24) dépend des coefficients

$h_{ij}(y)$ de l'équation (4.9) comme suit :

$$\begin{cases} M_y(i, j) = M_y(j, i) = \frac{1}{2}h_{ij}(y), \quad i < j \\ M_y(i, i) = h_{ii}(y) \end{cases}$$

ii) Il y a $3n(n-1)/2$ nombres caractéristique.

Exemple 4.4.5 (*Exemple 4.3.3 suite*) Selon l'équation (4.20) nous avons

$$\begin{cases} \phi_{y,3} = 0 \\ \phi_{y,2} = \frac{\gamma_{y,3}}{\alpha_2(y)} = 0 \\ \phi_{y,1} = \alpha_1^{-1} \gamma_{y,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

nous obtenons

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + x_3 x_2^2 \\ z_2 = x_2 \\ z_3 = x_3 \end{cases}$$

Et les nombres caractéristiques pour ce système sont

$$M_y = \gamma_{y,1} + \bar{A}^T(y) \phi_{y,1} + \phi_{y,1} \bar{A}(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi nous avons $M_y(1,1) = h_{11}(y)$, $M_y(1,2) = M_y(2,1) = h_{12}(y)$, $M_y(2,2) = h_{22}(y)$.

Grâce à l'équation (4.21), nous avons

$$\begin{cases} \bar{c}_1^1(y) = -4x_3^2, \bar{c}_2^1(y) = -2x_3^4 \\ \bar{c}_1^2(y) = -2x_3^2, \bar{c}_2^2(y) = -x_3 \\ \bar{c}_1^3(y) = x_3^2, \bar{c}_2^3(y) = 0 \end{cases}$$

ce qui signifie

$$C_y = \begin{pmatrix} -4x_3^2 & -2x_3^4 & 0 \\ -2x_3^2 & -x_3 & 0 \\ x_3^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalement nous obtenons la même forme normale privilégiant les états que (4.13) :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1^2 + z_3^2 z_2^2 + (z_3 - 4z_3^2 z_1 - 2z_3^4 z_2) u + O_y^{[3]}(z_1, z_2, u) \\ \dot{z}_2 = z_3 z_1 - (2z_3^2 z_1 + z_3 z_2) u + O_y^{[3]}(z_1, z_2, u) \\ \dot{z}_3 = z_3 z_2 + z_3^2 z_1 u + O_y^{[3]}(z_1, z_2, u) \\ y = z_3 \end{cases}$$

4.4.6 Nombres caractéristiques pour la forme normale d'OQDS privilégiant l'entrée

Afin de simplifier l'équation (4.7), nous supposons que

$$\begin{cases} \vartheta_{y,n}^{[1]}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n-1} c_j^n(y) x_j, \\ \bar{\vartheta}_{y,n}^{[1]}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n-1} \bar{c}_j^n(y) x_j, \end{cases}$$

et

$$\bar{c}_j^n(y) = c_j^n(y). \quad (4.25)$$

Comme

$$\vartheta_y^{[1]}(\bar{x}) + \frac{\partial \phi_y^{[2]}(\bar{x})}{\partial x_1} b(y) = \bar{\vartheta}_y^{[1]}(\bar{x})$$

et

$$\phi_{y,i}^{[2]}(\bar{x}) = x^T \begin{pmatrix} \phi_{11}^i(y) & \cdots & \phi_{1,n-1}^i(y) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \phi_{1,n-1}^i(y) & \cdots & \phi_{n-1,n-1}^i(y) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} x,$$

si nous posons

$$\phi_{1,j}^i(y) = -\frac{c_j^i(y)}{2b(y)}$$

nous obtenons $\bar{\vartheta}_{y,1}^{[1]}(\bar{x}) = \dots = \bar{\vartheta}_{y,n-1}^{[1]}(\bar{x}) = 0$.

Ensuite, nous avons

$$\gamma_y + \Gamma_y = \bar{\phi}_y + \tilde{\gamma}_y$$

et nous pouvons obtenir

$$\begin{cases} \gamma_{y,1} + \bar{A}(y)\phi_{y,1} + \phi_{y,1}\bar{A}(y) = \bar{\gamma}_{y,1} \\ \bar{\gamma}_{y,i+1} + \alpha_i(y)\phi_{y,i} = \gamma_{y,i+1} + \bar{A}^T(y)\phi_{y,i+1} + \phi_{y,i+1}\bar{A}(y) \end{cases}$$

pour $1 \leq i \leq n-1$.

Définissons

$$\begin{aligned} \Upsilon_{y,i} &= \begin{pmatrix} \Upsilon_{11}^i(y) & \cdots & \Upsilon_{1,n-1}^i(y) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Upsilon_{1,n-1}^i(y) & \cdots & \Upsilon_{n-1,n-1}^i(y) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1-i} \left\{ \frac{\sum_{j=0}^k [C_j^k (\bar{A}^T(y))^{k-j} [\gamma_{y,i+k+1} - \tilde{\gamma}_{y,i+k+1}] \bar{A}^j(y)]}{\prod_{m=0}^k \alpha_{i+m}} \right\} \end{aligned} \quad (4.26)$$

et

$$\begin{aligned} \bar{\Upsilon}_{y,i} &= \begin{pmatrix} \bar{\Upsilon}_{11}^i(y) & \cdots & \bar{\Upsilon}_{1,n-1}^i(y) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{\Upsilon}_{1,n-1}^i(y) & \cdots & \bar{\Upsilon}_{n-1,n-1}^i(y) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1-i} \left\{ \frac{\sum_{j=0}^k [C_j^k (\bar{A}^T(y))^{k-j} \gamma_{y,i+k+1} \bar{A}^j(y)]}{\prod_{m=0}^k \alpha_{i+m}} \right\} \end{aligned} \quad (4.27)$$

A cause de

$$\phi_{1,j}^i(y) = -\frac{c_j^i(y)}{2b(y)}, \quad i, j \in [1, n-1]$$

si nous posons

$$\phi_{l,s}^i(y) = \bar{\Upsilon}_{l,s}^i(y), \quad i \in [1, n-1], \quad l, s \in [2, n-1]$$

nous avons $\tilde{\gamma}_{l,s}^i = 0, i \in [2, n], l, s \in [2, n-1]$.

Ainsi, nous obtenons le difféomorphisme suivant

$$\phi_{y,i} : \begin{cases} \phi_{1,j}^i(y) = -\frac{c_j^i(y)}{2b(y)}, \quad i, j \in [1, n-1] \\ \phi_{l,s}^i(y) = \bar{\Upsilon}_{l,s}^i(y), \quad i \in [1, n-1], \quad l, s \in [2, n-1] \end{cases}$$

Car nous avons $\tilde{\gamma}_{l,s}^i = 0, i \in [2, n], l, s \in [2, n-1]$, alors $\tilde{\gamma}_{1,j}^i, i \in [2, n], j \in [1, n-1]$ peut être déterminé par l'équation suivante :

$$\phi_{1,j}^i(y) = -\frac{c_j^i(y)}{2b(y)} = \Upsilon_{1,j}^i(y)$$

et nous notons

$$M_{y_k}(i, j) = M_{y_k}(j, i) = \begin{cases} \tilde{\gamma}_{1,j}^k, & i = 1 \\ 0, & i \neq 1, n \end{cases}, \quad (4.28)$$

pour $1 \leq j \leq n-1$ et $2 \leq k \leq n$.

Finalement car

$$\gamma_{y,1} + \bar{A}(y)\phi_{y,1} + \phi_{y,1}\bar{A}(y) = \tilde{\gamma}_{y,1}$$

nous pouvons définir

$$M_{y,1}(i, j) = M_{y,1}(j, i) = \tilde{\gamma}_{i,j}^1, \quad i < j \quad (4.29)$$

Théorème 4.4.7 *La forme normale d'OQDS privilégiant l'entrée du système (4.5) est comme suit :*

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A(y)\xi + \xi^T \begin{pmatrix} M_{y,1} \\ M_{y,2} \\ \vdots \\ M_{y,n} \end{pmatrix} \xi + B(y)u + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sum_{i=1}^{n-1} \bar{c}_i^n(y)\xi_i \end{pmatrix} u + O_y^{[3]}(\bar{\xi}, u) \\ y = \xi_n \end{cases}$$

où \bar{c}_i^n et $M_{y,i}$ sont définis par les équations (4.25), (4.28) et (4.29).

Remarque 4.4.8 *Le nombre des coefficients libres est $3n(n-1)/2$.*

Exemple 4.4.9 (*Exemple 4.3.3 suite*) Selon

$$\bar{c}_j^n(y) = c_j^n(y)$$

ainsi nous obtenons $\bar{c}_1^3(y) = x_3^2$ et $\bar{c}_2^3(y) = 0$. Ensuite, nous avons

$$\begin{cases} c_1^1(y) = -4x_3^2, c_2^1(y) = -2x_3^4 \\ c_1^2(y) = -2x_3^2, c_2^2(y) = -x_3 \end{cases}$$

avec $b(y) = x_3$.

A partir de l'équation (4.27), nous pouvons obtenir

$$\begin{cases} \bar{\Upsilon}_{y,2} = \frac{\gamma_{y,3}}{\alpha_2} = 0 \\ \bar{\Upsilon}_{y,1} = \frac{\gamma_{y,2}}{\alpha_1} + \frac{\bar{A}^T(y)\gamma_{y,3} + \gamma_{y,3}\bar{A}(y)}{\alpha_1\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

ainsi nous avons

$$\begin{cases} \phi_1(y) = \begin{bmatrix} 2x_3 & x_3^3 & 0 \\ x_3^3 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \phi_2(y) = \begin{bmatrix} x_3 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \phi_3(y) = 0 \end{cases}$$

Et l'équation (4.26) nous donne

$$\begin{cases} \Upsilon_{y,2} = \frac{\gamma_{y,3} - \tilde{\gamma}_{y,3}}{\alpha_2} = -\frac{\tilde{\gamma}_{y,3}}{\alpha_2} \\ \Upsilon_{y,1} = \frac{\gamma_{y,2} - \tilde{\gamma}_{y,2}}{\alpha_1} + \frac{\bar{A}^T(y)[\gamma_{y,3} - \tilde{\gamma}_{y,3}] + [\gamma_{y,3} - \tilde{\gamma}_{y,3}]\bar{A}(y)}{\alpha_1\alpha_2} \\ = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\tilde{\gamma}_{1,1}^2}{x_3} & -\frac{\tilde{\gamma}_{1,2}^2}{x_3} & 0 \\ -\frac{\tilde{\gamma}_{1,2}^2}{x_3} & x_3 - \frac{\tilde{\gamma}_{2,2}^2}{x_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Parce que

$$\phi_{1,j}^i(y) = -\frac{c_j^i(y)}{2b(y)} = \Upsilon_{1,j}^i(y)$$

nous pouvons obtenir

$$\begin{cases} \phi_{1,1}^2 = x_3 = \Upsilon_{1,1}^2(y) \\ \phi_{1,2}^2 = \frac{1}{2} = \Upsilon_{1,2}^2(y) \end{cases}$$

De même

$$\begin{cases} \tilde{\gamma}_{1,1}^3 = -x_3^2, \\ \tilde{\gamma}_{1,2}^3 = -\frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

et nous avons

$$\begin{cases} \phi_{1,1}^1 = 2x_3 = \Upsilon_{1,1}^1(y) \\ \phi_{1,2}^1 = x_3^3 = \Upsilon_{1,2}^1(y) \end{cases}$$

ainsi nous pouvons obtenir

$$\begin{cases} \tilde{\gamma}_{1,1}^2 = x_3 - 2x_3^2 \\ \tilde{\gamma}_{1,2}^2 = -x_3^4 \end{cases}$$

Et finalement, puisque

$$\gamma_{y,1} + \bar{A}(y)\phi_{y,1} + \phi_{y,1}\bar{A}(y) = \tilde{\gamma}_{y,1} = \begin{pmatrix} 1 + 2x_3^4 & 0 & 0 \\ 0 & x_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cela nous donne

$$\begin{cases} \tilde{\gamma}_{1,1}^1 = 1 + 2x_3^4 \\ \tilde{\gamma}_{1,2}^1 = 0 \\ \tilde{\gamma}_{2,2}^1 = x_3^2 \end{cases}$$

ce qui nous permet de calculer les matrices M_y suivantes :

$$\begin{cases} M_{y,1} = \begin{pmatrix} 1 + 2x_3^4 & 0 & 0 \\ 0 & x_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ M_{y,2} = \begin{pmatrix} x_3 - 2x_3^2 & -x_3^4 & 0 \\ -x_3^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ M_{y,3} = \begin{pmatrix} -x_3^2 & -\frac{1}{2}x_3 & 0 \\ -\frac{1}{2}x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

ce qui nous conduit à la même forme normale privilégiant l'entrée que (4.18) suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = (1 + 2z_3^4) z_1^2 + z_3^2 z_2^2 + z_3 u + O_y^{[3]}(z_1, z_2, u) \\ \dot{z}_2 = z_3 z_1 + (z_3 - 2z_3^2) z_1^2 - 2z_3^4 z_1 z_2 + O_y^{[3]}(z_1, z_2, u) \\ \dot{z}_3 = z_3 z_2 - z_3 z_1 z_2 - z_3^2 z_1^2 + z_3^2 z_1 u + O_y^{[3]}(z_1, z_2, u) \\ y = z_3 \end{cases}.$$

4.5 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la recherche de la forme normale d'OQDS. Tout d'abord, deux équations homologues ont été données pour garantir l'équivalence de la transformation quadratique. Puisque dans le système étudié, il y a deux termes quadratiques, ainsi nous avons étudié deux formes normales d'OQDS qui correspondent respectivement à privilégier les états et l'entrée, mais elles sont équivalentes. Afin de simplifier le calcul, alors nous avons proposé d'employer la matrice caractéristique des termes quadratiques pour les deux formes normales d'OQDS. Il est à noter que toutes les études

ci-dessus sont basées sur l'hypothèse que le système original est linéairement observable par rapport à la sortie. En cryptographie, nous chercherons à aller plus loin (c.-à.-d, partie linéairement inobservable) afin d'augmenter la sécurité.

Deuxième partie

Partie Pratique : Transmission Chaotique

Chapitre 5

Chaos, Communication et Forme Normale

5.1 Introduction

La transmission chaotique de données a été à l'origine de la transmission de données et a attiré beaucoup d'attention, particulièrement après le travail exceptionnel de Carroll et de Pecora sur la synchronisation de deux systèmes chaotiques [122]. Bien que l'étude d'appliquer le chaos dans la transmission de données soit plus récente que celle de la transmission traditionnelle, telle que les algorithmes DES, RSA et ainsi de suite [151], le chaos possède plusieurs propriétés qui sont très intéressantes pour la transmission. Dans ce chapitre, nous discuterons d'abord des principaux avantages de l'approche par transmission chaotique. De plus, comme la plupart des approches de la transmission chaotique sont basées sur la synchronisation du chaos, nous rappellerons les techniques de synchronisation les plus populaires utilisées dans des schémas de transmission chaotique. Après cela, nous donnerons une vue d'ensemble des principaux schémas de transmission chaotique. Puisque la majeure partie des schémas de transmission chaotique proposée se concentre seulement sur le système mono-entrée mono-sortie, il existe un inconvénient majeur quand nous le généralisons au cas avec des entrées multiples et des sorties multiples, ceci sera discuté dans la section 5.6. Afin de surmonter cet inconvénient, nous proposerons un nouveau schéma de transmission chaotique avec des entrées multiples, et un exemple sera donné afin de souligner l'applicabilité de la méthode proposée.

5.2 Chaos et Transmission

5.2.1 Avantages du chaos

En première approche, les systèmes chaotiques sont des systèmes dynamiques qui évoluent dans une région bornée, qui possède une trajectoire partout dense dans cette région, qui sont très sensibles aux conditions initiales [1, 33, 32, 41] : deux conditions initiales très proches conduisent à

deux trajectoires qui s'éloignent rapidement l'une de l'autre [78, 115, 147, 150]. Les propriétés nous permettent théoriquement de générer un nombre infini de signaux chaotiques non corrélés d'un même système en utilisant différentes valeurs initiales. Ceci peut être employé pour générer des séries de nombres pseudo-aléatoires. Cette série est très utile dans certains crypto systèmes traditionnels ou dans le protocole de TCP/IP [45],[10]. Une autre application de cette propriété est de produire des séquences chaotiques [77], [76] pour remplacer les séquences étalées conventionnelles (telles que des m-séquences ou des séquences d'or [127] utilisées dans les systèmes de spectre étalé par séquence directe. Ensuite, il est à noter qu'en raison de leur propriété aléatoire, les signaux chaotiques ont des fonctions d'autocorrélation très étroites et des spectres de puissance à large bande proche du bruit blanc. Ainsi, la corrélation croisée de signaux chaotiques a une valeur très petite. Puisque le système chaotique a une trajectoire non périodique et est sensible aux conditions et aux paramètres initiaux, logiquement il peut aussi être employé pour crypter des messages.

Dans les systèmes de transmission conventionnels, des signaux sinusoïdaux sont employés comme signaux porteurs, ce qui offrent une efficacité excellente dans une large bande. Cependant, la puissance transmise est concentrée dans une bande étroite, entraînant une densité spectrale de puissance élevée. Les problèmes principaux avec cette caractéristique sont : l'atténuation élevée dans une bande de fréquence étroite ce qui peut mener à la perte de synchronisation, des niveaux élevés d'interférence avec d'autres utilisateurs du réseau, les possibilités élevées d'interception, etc. Au contraire, les signaux chaotiques sont habituellement identifiés comme du bruit et ont des bandes larges, ainsi ils peuvent être utilisés pour étaler l'information originale à bande étroite. Ainsi, en utilisant les signaux chaotiques pour crypter l'information, les signaux résultants sont des signaux de spectre écarté ayant une bande plus grande et des densités spectrales de puissance inférieure à des solutions usuelles [111].

5.2.2 Technique de Démodulation

Du point de vue de la transmission, il existe la technique de démodulation cohérente et la technique de démodulation non cohérente pour récupérer le signal transmis [92]. Dans une démodulation non cohérente, le récepteur ne connaît pas (et n'essaie pas d'estimer) la forme d'onde transmise. Au lieu de cela, il emploie des attributs statistiques du signal transmis afin de décider des propriétés du signal émis, par exemple, la variance, l'espérance et beaucoup d'autres propriétés statistiques. L'avantage principal d'employer des méthodes non cohérentes est que le récepteur n'a pas à être synchronisé avec l'émetteur. De plus, les récepteurs non cohérents sont souvent plus simples que leurs homologues cohérents. L'inconvénient en employant la démodulation non cohérente est que certaines propriétés statistiques du signal transmis peuvent permettre à un récepteur non autorisé de décoder le message sans aucune connaissance de la dynamique du secrète de l'émetteur.

Par conséquent les schémas de transmission chaotique de données qui permettent la démodulation non cohérente ne sont pas très sûres d'un point de vue du chiffage. Mais ils sont très utiles dans un environnement où la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur est difficile.

La démodulation cohérente implique que la forme d'onde transmise est connue par ce récepteur mais il peut aussi être corrélé par du bruit, pour maximiser le SNR (signal to noise ratio). Pour le signal transmis qui est modulé, la démodulation cohérente exige la récupération de l'amplitude et de la phase du signal. Ceci peut être fait en employant une PLL (Phase Lock Loop) qui récupère la phase du signal, et un AGC (Automatic Gain Control) qui normalise l'amplitude du signal reçu. Dans le cas de la transmission chaotique, la connaissance de l'état de l'émetteur implique la connaissance de la forme d'onde transmise. Par conséquent, la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur permet au récepteur de reconstruire la forme d'onde transmise et d'employer des techniques de détections cohérentes.

Il y avait plusieurs schémas de transmission chaotique en employant le chaos pour le cryptage et ces majeurs schémas sont basés sur la synchronisation du chaos. Dans un premier temps, les phénomènes de synchronisation de système chaotique seront revus.

5.3 Synchronisation

Le rôle de la synchronisation est d'essayer à estimer certains des états du système dynamique ou parfois des entrées inconnues. Ici cinq types principaux de synchronisations seront présentés. Il est à noter que même ces cinq types de synchronisations ne sont pas totalement séparables, et bien sure qu'il existe d'autres types de synchronisations [118] [123] [128][143].

5.3.1 Synchronisation basée sur la partition du système

La première approche de la synchronisation chaotique a été proposée par Pecora et Carrol en [122], et elle est basée sur la partition du système.

Donnons un système chaotique de dimension $n \geq 3$ suivant :

$$\dot{x} = f(x), \quad (5.1)$$

et supposons qu'il peut être divisé en deux sous systèmes :

$$\begin{cases} \dot{x}_R = f_R(x_R) \\ \dot{x}_T = f_T(x_R, x_T) \end{cases} \quad (5.2)$$

où $x_R \in \mathbb{R}^{n_R}$, $x_T \in \mathbb{R}^{n_T}$, $n_R + n_T = n$. Le premier sous système s'appelle le système conducteur, et le second est appelé le système de réponse. Ensuite, nous pouvons encore diviser le sous système conducteur de (5.2) en deux autres sous systèmes comme suit :

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{x}_{R_1} = f_{R_1}(x_{R_1}, x_{R_2}) \\ \dot{x}_{R_2} = f_{R_2}(x_{R_1}, x_{R_2}) \end{cases} \\ \dot{x}_T = f_T(x_R, x_T) \end{cases} \quad (5.3)$$

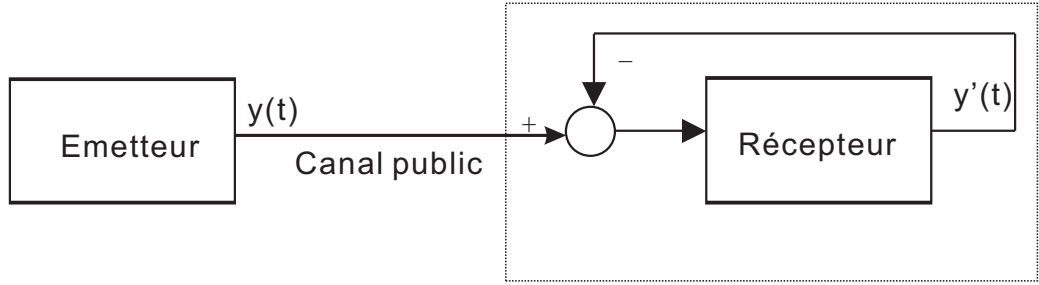


FIG. 5.1 – Synchronisation par un contrôle en boucle fermée

La synchronisation du système (5.1) est basé sur la stabilité du sous système de réponse (5.3), qui ne peut pas être déterminée de manière globale par la stabilité de sa matrice Jacobinne : J_{f_T} , car celle ci dépend évidemment de l'état¹ x_R . Ainsi le comportement de ce sous système dépend de l'exposant de Lyapunov du système (5.3), qui s'appelle l'exposant exponentiel conditionnel . En [121], il est prouvé que, si tous les exposants sont négatifs, la stabilité asymptotique du sous système de réponse peut être garantie. Mais les évidences sont trouvées que dexu systèmes chaotiques couplés avec les exposants exponentiels conditionnels négatifs peuvent désynchroniser [156].

5.3.2 Synchronisation par la boucle fermée

Une autre technologie de la synchronisation est basée sur la boucle fermée qui peut être illustrée en figure 5.1 où nous employons l'erreur entre l'émetteur et le récepteur pour corriger le comportement du récepteur afin de réaliser la synchronisation.

Supposons que l'émetteur s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (5.4)$$

et que le récepteur peut être décrit comme suit

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + g(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = h(\hat{x}) \end{cases} \quad (5.5)$$

où g est une fonction de l'erreur entre y et \hat{y} , et que cette fonction est choisie afin de garantir la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur. En fait, ce genre de récepteur peut être considéré comme la conception d'un observateur. Celle-ci sera présentée dans la section suivante. Ensuite, nous pouvons également appliquer quelques stratégies adaptatives quand nous employons l'erreur entre l'émetteur et le récepteur pour piloter le récepteur [31, 82, 36, 40, 100, 157].

¹Il faudrait faire attention au fait que la conjecture d'Aizerman n'est pas vraie [73][85].

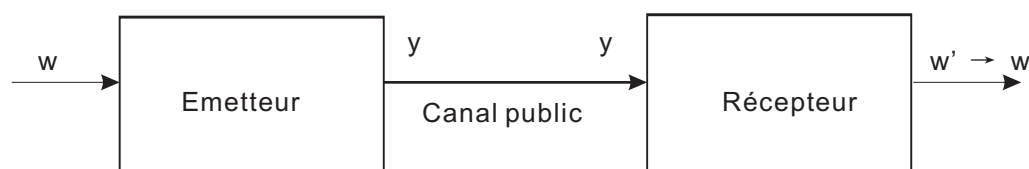


FIG. 5.2 – Synchronisation par l'inversion du système

5.3.3 Synchronisation à l'aide d'observateur

La synchronisation peut également être réalisée en employant un observateur [116][114]. L'observateur est une méthode typique afin d'estimer les états inconnus d'un système dynamique qui ne peuvent pas être mesurés directement : soit inaccessible, soit pas économique.

Considérons l'émetteur comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) = Ax + f(x) \\ y = h(x) = Cx \end{cases}$$

et un d'observateurs possibles peut être conçu de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) = A\hat{x} + f(\hat{x}) + K(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = h(\hat{x}) = C\hat{x} \end{cases}$$

En définissant $e = x - \hat{x}$, nous pouvons obtenir

$$\dot{e} = (A - KC)e + f(x) - f(\hat{x}) \quad (5.6)$$

Dans ce cas, le problème de la synchronisation devient celui de la stabilité au voisinage du point fixe : 0, du système (5.6). Si la fonction : $f(x)$ vérifie la condition Lipschitz, et si nous pouvons trouver un gain approprié : K afin de garantir la stabilité du système (5.6), alors la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur peut être réalisée.

Cette approche peut également être regardée comme un type de synchronisation par la boucle fermée puisque le récepteur est conduit également par l'erreur des signaux de sortie de l'émetteur et du récepteur. Il est à noter que l'observateur discuté ci-dessus est un des types d'observateurs, appelé l'observateur grand gain. D'autres observateur ont été proposés dans différents buts, comme : l'observateur adaptatif pour l'évaluation les états et les paramètres du système dynamique [165][166][17], l'observateur dead-beat pour les systèmes en temps discret [2], l'observateur à mode glissant basé sur la théorie des systèmes à structure variable [60] [110][125], et bien d'autres.

5.3.4 Synchronisation par l'inversion du système

Jusqu'à présent, toutes les approches mentionnées ont dans le but de synchroniser seulement les états du système, et elles ne concernent pas la synchronisation (ou plus exactement l'estimation) des entrées inconnues du système. Cependant, la possibilité d'estimer les entrées inconnues est évidemment essentielle à la transmission chaotique de données puisque l'entrée

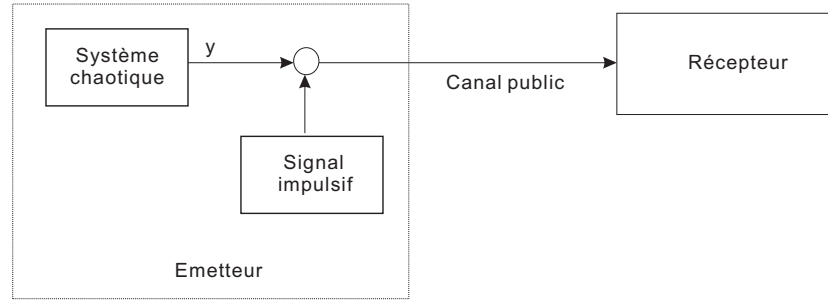


FIG. 5.3 – Synchronisation impulsive

inconnue est généralement le message confidentiel. Naturellement, il existe également certains observateurs à entrée inconnue qui permettent d'accomplir l'estimation de ces dernières [37, 54, 38, 67, 113].

Une autre méthode proposée est basée sur la solubilité du problème d'inversion à gauche afin d'achever les synchronisations des états et entrées inconnues du système [49]. Celle-ci peut être décrite en figure 5.2, où l'émetteur peut être écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des états du système, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des entrées inconnues, $f, : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ sont des vecteurs des fonctions analytiques.

Pour le récepteur, son vecteur d'entrée est le vecteur de sortie de l'émetteur. Nous essayons de concevoir un récepteur tel que son vecteur de sortie convergera au moins asymptotiquement vers le vecteur d'entrée de l'émetteur. Ce problème s'appelle l'inversion à gauche du système².

Il est à noter que l'inversion du système exige des conditions additionnelles par rapport au problème d'observabilité, telles que le degré relatif [80][125]. Ceci sera discuté dans la section suivante. Ensuite, pour la conception du récepteur, nous pouvons construire un observateur, dans lequel nous pouvons appliquer des stratégies adaptatives, autrement dit cette approche est aussi reliée aux autres approches.

5.3.5 Synchronisation impulsive

Dans un schéma de transmission usuel, un des états du système dynamique est transmis afin de réaliser la synchronisation par le récepteur. Dans le but de réduire la redondance du signal transmis, c.-à-d., envoyer le signal minimum possible, la synchronisation impulsive (ce concept est analogue à la synchronisation échantillonnée) a été proposée en [163].

Dans cette approche, en raison de l'introduction d'un opérateur de Dirac, le problème de synchronisation entre l'émetteur et le récepteur devient celui

²Ici nous appelons problème de l'inversion à gauche, le problème d'estimer les entrées inconnues mais aussi la totalité de l'état.

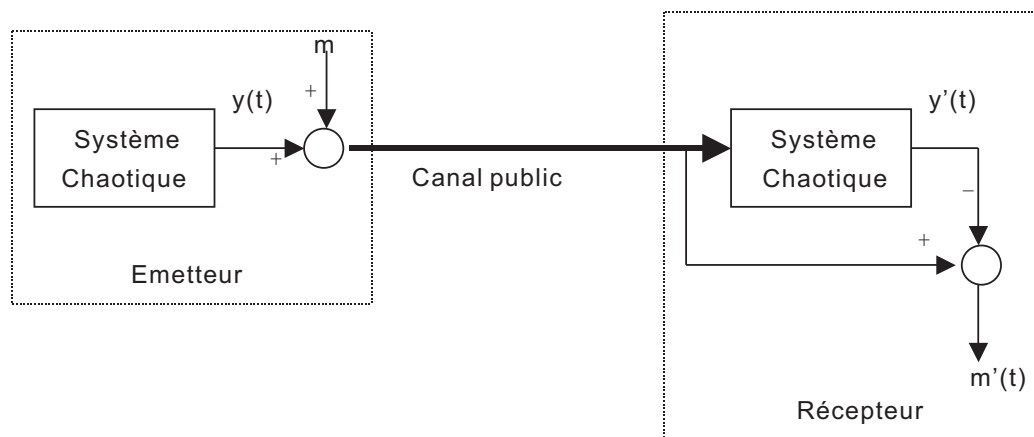


FIG. 5.4 – Schéma dit de l'addition chaotique

de stabiliser un système impulsif, ce problème est exhaustivement discuté en [163]. Et certains schémas basés sur cette approche peuvent être trouvés en [93] [81][118].

A l'exception de ce type de synchronisations évoqué ci-dessus, quelques autres types de synchronisations des systèmes chaotiques ont également été étudiées, telles que la synchronisation généralisée [98] [141], la synchronisation de phase [139] et bien d'autres.

5.4 Transmission basée sur la synchronisation de système chaotique

La plupart des approches de synchronisation discutées précédemment peuvent être directement appliquées dans la transmission de données, ainsi ici nous rappellerons trois schémas principaux : l'addition chaotique, la commutation chaotique et la modulation chaotique, et leurs versions étendues.

5.4.1 L'addition chaotique

Le schéma par addition chaotique a été proposé en [99][122] afin d'appliquer le chaos dans la transmission de données (la figure 5.4).

Avec cette méthode, le message confidentiel est additionné à un signal chaotique (la sortie d'un système chaotique), et le signal résultant est envoyé au récepteur pour la synchronisation. En conséquence, après la synchronisation, le message confidentiel peut être récupéré par une simple opération de soustraction entre la sortie du récepteur et le signal émis sur le canal public. Il est à noter que, dans ce schéma, l'attracteur étrange du système chaotique n'est pas modifié par le message confidentiel, mais dans les deux schémas suivants, nous verrons que les attracteurs étranges modifiés par des messages confidentiels.

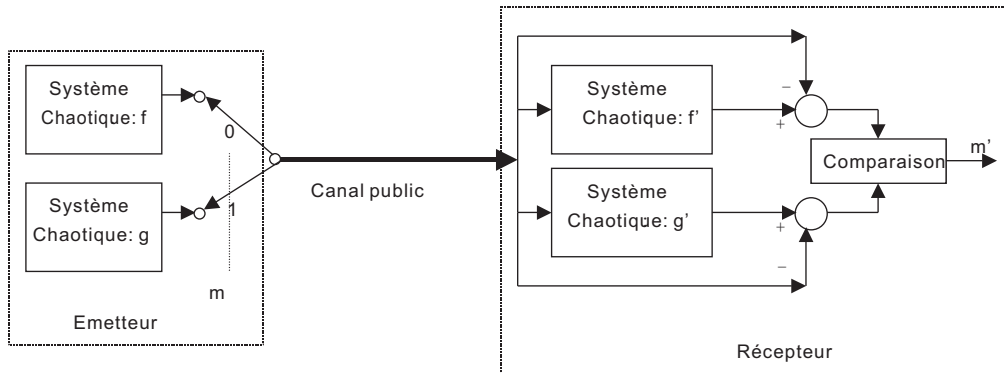


FIG. 5.5 – Schéma dit de la commutation chaotique

5.4.2 La commutation chaotique

Un autre schéma de transmission chaotique de données est la commutation chaotique (CSK : Chaotique Switch Keying) [119], qui exige que le message soit binaire, et elle s'inspire de la modulation à saut de fréquence (SFK). Le diagramme de cette approche est illustré en figure 5.5, où une opération de commutation est employée selon la valeur du message binaire : Si sa valeur est 0, le système chaotique f est choisi et le signal de sortie est transmis, sinon la sortie du système chaotique g est transmis. Dans ce sens, le message binaire commute l'émetteur entre deux attracteurs étranges correspondants à deux systèmes chaotiques.

Du côté du récepteur, il y a deux sous systèmes chaotiques f' et g' qui correspondent respectivement à f et g . Supposons que le canal est parfait, et que le signal transmis est 0, alors le sous système f' se synchronisera avec le système chaotique f , mais le sous système g' ne pourra pas être synchronisé. Selon les erreurs de synchronisation de (f', f) et (g', f) , le signal peut être récupéré avec succès.

Il est à noter que la méthode CSK est basée sur la démodulation cohérente. Une modification de la méthode CSK pour la démodulation non cohérente a été également proposée en distinguant l'énergie de bit de deux systèmes chaotiques. Parfois, seulement un système chaotique est employé pour générer deux différentes énergies de bit, par exemple par amplificateur, ou par en retard, la méthode s'appelle alors DCSK (Differential CSK) [96], et FM-DCSK (Frequent Modulation DCSK) [97]

5.4.3 La modulation chaotique

Une autre idée utilise le message pour modifier directement l'attracteur étrange du système chaotique. Ces méthodes s'appellent la modulation chaotique, et elle peut se décomposer en deux types de méthodes : la modulation chaotique de paramètre [161], celle-ci modifie le paramètre du système chaotique, et la modulation chaotique d'état [155], qui modifie l'état du système chaotique. Mais ces deux méthodes font bouger directement l'attracteur étrange du système (figure 5.6).

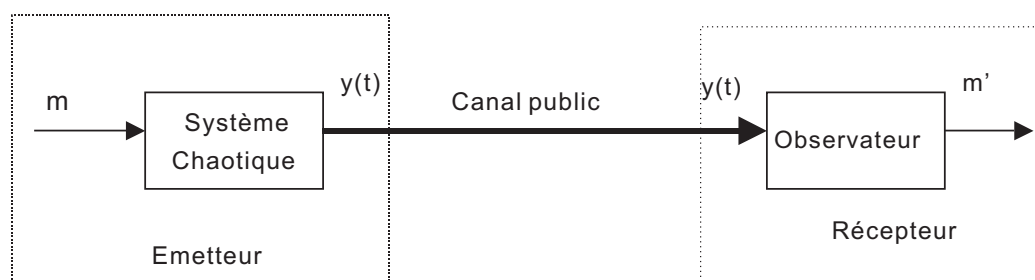


FIG. 5.6 – Schéma de modulation chaotique

Pour le récepteur, afin de synchroniser l'émetteur, nous pouvons employer la technique de la synchronisation par le contrôle en boucle fermé, ou la synchronisation par l'observateur, de même la synchronisation par inversion à gauche du système si l'émetteur est inversible.

Evidemment, il existe bien d'autres types de synchronisations chaotiques qui sont pour la plupart de combinaisons des techniques cités ci-dessus, citons [162][93][81][123].

5.5 Analyse de la sécurité du système chaotique

En général, un système chaotique peut être écrit de la façon suivante :

$$\dot{x} = f(x, p)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^k$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est analytique. L'émetteur basé sur ce système chaotique peut être écrit sous la forme générale ci-dessous

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, p) + g(x, p, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (5.7)$$

où $p \in \mathbb{R}^k$, $u \in \mathbb{R}^p$ représente les informations de l'utilisateur et du message respectivement.

Considérons les formes normales que nous avons étudiées dans les chapitres précédents comme suit :

$$\dot{z} = \beta(y, p) + A(y, p)z + b(y, p)u + \bar{f}_{(y,p)}^{[2]}(\bar{z}) + \bar{g}_{(y,p)}^{[1]}(\bar{z})u + O_{(y,p)}^{[3]}(\bar{z}, u) \quad (5.8)$$

où y représente la sortie, p représente le vecteur des paramètres (Une partie de p peut être considérée comme la clé privée), u représente l'entrée inconnue (elle peut être considérée comme le message à crypter).

Remarque 5.5.1 *i) Si $\bar{f}_{(y,p)}^{[2]}(\bar{z}) + \bar{g}_{(y,p)}^{[1]}(\bar{z})u + O_{(y,p)}^{[3]}(\bar{z}, u) = 0$, alors le système (5.8) est en la forme normale d'OLDS discutée dans le Chapitre 1.*

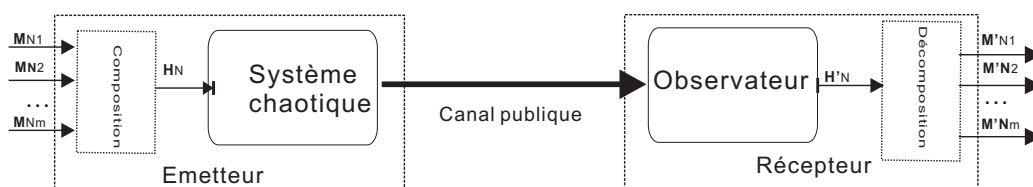


FIG. 5.7 – Schéma avec des entrées composées

ii) Si $\bar{f}_{(y,p)}^{[2]}(\bar{z}) + \bar{g}_{(y,p)}^{[1]}(\bar{z})u + O_{(y,p)}^{[3]}(\bar{z}, u) \neq 0$, et si $A(y, p)$ est linéairement observable, alors le système (5.8) est en la forme normale d'OQDS présentée dans le Chapitre 4.4.

Le problème de la transformation du système (5.7) (C'est à dire l'émetteur de la transmission chaotique) en la forme normale (5.8) a été exhaustivement étudié dans les chapitres 1 et 4. Puisque les formes normales étudiées dans les chapitres précédents sont écrites en fonction de la sortie avec l'entrée inconnue du système, il est logique de penser que le système chaotique transformé sous sa forme normale est plus facile à étudier et analyser que sur sa forme d'origine, comme cela a été mis en évidence en [22] pour les formes normales non paramétrées par les sorties.

5.6 Analyse du système de transmission chaotique mono-entrée

La plupart des méthodes basées sur le chaos pour la transmission chaotique ne possèdent pas structurellement des entrées multiples car un système de transmission chaotique mono-entrée peut être facilement adapté au cas avec des entrées multiples par des technologies de composition (telles que multiplexage temporel, modulation de fréquence, et ainsi de suite) (voir la figure 5.7). C'est un moyen très pratique et économique. Malheureusement l'inconvénient de ce genre de schéma est que toutes entrées partagent le même risque d'être cassé. En fait, certains des systèmes de transmission chaotique proposés ont déjà été cassés [124], [144], [164].

La question est alors comment disperser le risque ? Une solution intuitive est de ne pas employer la composition pour combiner des entrées multiples. Sous cette considération, nous proposons un nouveau schéma, dans lequel pour l'émetteur la composition est employée pour combiner des sorties multiples de l'émetteur, ceci uniquement dans le but de n'utiliser qu'un canal. Mais le cryptage et décryptage se fait sur des systèmes avec des entrées multiples et des sorties multiples. Pour le récepteur, une approche basée sur l'observateur pour résoudre le problème d'inversion à gauche est appliquée. Ce schéma peut donc être considéré comme une version étendue aux systèmes avec des sorties multiples et des entrées multiples proposée en [49].

Selon ce schéma, des entrées multiples possèdent des risques différents à casser, c.-à-d., même si le message M_{N_1} dans la figure 5.8, par exemple, a



FIG. 5.8 – Schéma avec des sorties composées

été cassé, les autres restent toujours sécurisés. Cependant, un des problèmes principaux pour ce schéma est qu'il est impossible d'établir un émetteur qui contient un large nombre d'utilisateurs. Une solution est de diviser les utilisateurs en plusieurs groupes selon différentes conditions ou niveaux urgents. Dans ce cas, différents groupes ($M_{N1}, M_{N2}, \dots, M_{Nm}$ voir la figure 5.8) ont différents degrés de sécurité, et tous les utilisateurs dans le même groupe partagent la même possibilité à retrouver les entrées parce qu'ils ont la même combinaison des entrées. Cette idée est similaire au concept QoS (Quality of Service) dans les réseaux.

En conséquence, notre problème à traiter est : Soit un système chaotique, est-il possible d'établir un système de transmission chaotique avec des entrées multiples [172][173] ?

Ce problème puis sera résolu dans le cadre de la commande non linéaire. Et un système de transmission basé sur la synchronisation chaotique sera construit afin d'illustrer la méthode proposée.

5.7 Système de transmission chaotique avec des entrées multiples

Considérons le système chaotique de dimension $n \geq 3$, qui peut être représenté en une forme plus générale de la façon suivante :

$$\dot{x} = f(x, p) \tag{5.9}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des états, $p \in \mathbb{R}^k$ représente le vecteur des paramètres et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un vecteur des fonctions analytiques.

Avec le système (5.9), le but est d'établir un système de transmission avec des entrées multiples qui peut être décrit de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, p) + \sum_{i=1}^m g_i(x, p) u_i \\ y = [h_1(x), \dots, h_p(x)]^T \end{cases} \tag{5.10}$$

où x, p , et f ont été définis dans l'équation (5.9). $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur des sorties et $u \in \mathbb{R}^m$ représente l'information confidentielle à transmettre. Les champs de vecteurs $g_i = [g_{i1}, \dots, g_{im}]^T$ et $h = [h_1, \dots, h_p]^T$ sont supposés suffisamment lisses et de dimension approprié. Sans perte de généralité, nous supposons que, pour tous x , la distribution $span \{g_1, \dots, g_m\}$ et sa codistribution $span \{dh_1, \dots, dh_p\}$ sont non singulières. De plus nous ne traiterons que le cas $m \leq p$.

Définition 5.7.1 *Le degré relatif ρ du système (5.10) est défini par $\rho = \{\rho_1, \dots, \rho_p\}$, où $\rho_i = \min\{s \text{ tel que } L_{g_k} L_f^{s-1} h_i \neq 0 \text{ pour } k = 1 : m\}$, $i = 1 : p$.*

Définition 5.7.2 [80] *Le système (5.10), dans le cas : $p = m$, possède un degré relatif fort $\{r_1, \dots, r_m\}$ au point x_0 , si*

i) $L_{g_j} L_f^k h_i = 0$, pour tous $1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq m, k < r_i - 1$, pour tous x au voisinage du x_0 ,

ii) la $m \times m$ matrice

$$\Gamma(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix}$$

est non singulière en $x = x_0$.

Si le système (5.10) a un nombre de sorties égal à celui d'entrée, alors la condition d'OMC (Observability Matching Condition) proposée en [125] est équivalente au théorème suivant.

Théorème 5.7.3 *Si le système (5.10) possède un degré relatif fort $r = r_1 + \dots + r_m = n$, tous les états et les entrées inconnues peuvent être localement récupérés.*

En [80], les conditions suffisantes et nécessaires qui garantissent l'existence des sorties (et comment elles peuvent être calculées), telles que le degré relatif fort du système soit $r = n$, ont été données. A partir de cela, un système de transmission chaotique avec des entrées multiples peut être facilement établi. Cependant, cette méthode ne contient pas une complexité de calcul élevée pour le cryptage car $r = n$. Ainsi afin d'augmenter la sécurité, la complexité est augmentée en choisissant des sorties telles que $r = \sum_{i=1}^p \rho_i < n$. Même dans ce cas, nous allons montrer qu'il est possible de reconstruire tous les messages inconnus, à la condition que ce système satisfasse certaines conditions.

Rappelons l'algorithme d'inversion à gauche proposé en [4]. Nous supposons que $p \geq m$, et que le système (5.10) possède un vecteur de degré relatif $\rho = \{\rho_1, \dots, \rho_p\}$. Il est à noter que, dans ce chapitre nous ne considérons pas le cas du degré relatif infini. Définissons les ensembles suivants qui seront utilisés dans la suite :

- Φ est la codistribution engendrée par les dérivées des sorties mesurées et qui ne sont pas affectées par les entrées :

$$\Phi = \text{span}\{dh_1, \dots, dL_f^{\rho_1-1} h_1, \dots, dL_f^{\rho_p-1} h_p\}$$

- Ω est une base de Φ :

$$\Omega = \{dh_1, \dots, dL_f^{r_1-1} h_1, \dots, dh_p, \dots, dL_f^{r_p-1} h_p\}$$

et \mathcal{L} est la distribution correspondante :

$$\mathcal{L} = \text{span}\{h_1, \dots, L_f^{r_1-1} h_1, \dots, h_p, \dots, L_f^{r_p-1} h_p\}$$

où $r = \dim \Omega = \sum_{i=1}^p r_i$.

- $\Omega_{\mathcal{L}}$ est le module engendré par Ω sur \mathcal{L} , et $\Omega_{\mathcal{L}}^1$ est le sous module engendré par

$$\{dh_1, \dots, dL_f^{r_1-2}h_1, \dots, dh_p, \dots, dL_f^{r_p-2}h_p\}$$

sur \mathcal{L} où $L_f^{-1}h_j = 0$ et $L_f^0h_j = h_j$.

- G est la plus petite distribution involutive qui contient $\{g_1(x), \dots, g_m(x)\}$. Posons $k = \dim G$, $m \leq k \leq n$.
- G^\perp est l'annihilateur de G :

$G^\perp = \text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}\}$, où α_i sont les 1-formes telles que, pour tous $\lambda \in G$, $l_\lambda \alpha_i = 0$ pour $1 \leq i \leq n - k$, où $l_\lambda \alpha = \alpha(\lambda)$ est le produit intérieur du champ de vecteur entre λ et α .

Supposons $r < n$, et qu'il existe une transformation $(\xi, \eta) = \phi(x)$ telle que le système (5.10) puis être localement transformé en la forme normale suivante :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1^i = \xi_2^i \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{r_i-1}^i = \xi_{r_i}^i \\ \dot{\xi}_{r_i}^i = L_f^{r_i}h_i(x) + \sum_{j=1}^m L_{g_j}L_f^{r_i-1}h_i(x)u_j \\ \dot{\eta} = p(\xi, \eta) + q(\xi, \eta)u \\ y_i = \xi_1^i \end{cases} \quad (5.11)$$

où

$$\xi = [\xi^1 \quad \dots \quad \xi^p]^T$$

et

$$\xi^i = \begin{bmatrix} \xi_1^i \\ \vdots \\ \xi_{r_i}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_i(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_i-1}h_i(x) \end{bmatrix}, \text{ pour } i \in [1, p].$$

Nous considérons seulement le cas où $r < n$ et supposons que la distribution $\text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$ n'est pas involutive, alors u ne peut pas être obtenu, en utilisant l'algorithme d'observation classique. En [4], les auteurs ont proposé un algorithme qui est suffisant et constructif pour récupérer les états et les entrées inconnues du système, de plus un observateur est proposé afin de récupérer ces données en temps fini. L'idée essentielle de cet algorithme est de chercher l'information supplémentaire par des combinaisons des sorties et de leurs dérivées.

Définissons :

$$V = [L_f^{r_1}h_1(x) \quad \dots \quad L_f^{r_p}h_p(x)]^T + \Gamma(x)u \quad (5.12)$$

$$= [y_1^{(r_1)} \quad \dots \quad y_p^{(r_p)}]^T \quad (5.13)$$

qui peut être obtenu en utilisant la forme normale (5.11), où

$$\Gamma(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1}L_f^{r_1-1}h_1(x) & \dots & L_{g_m}L_f^{r_1-1}h_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1}L_f^{r_p-1}h_p(x) & \dots & L_{g_m}L_f^{r_p-1}h_p(x) \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Supposons qu'il existe un $1 \times p$ vecteur $K(x) = [k_1(x), \dots, k_p(x)] \in \mathcal{L}(x)$, avec $K(x) \neq 0$ tel que

$$K\Gamma = 0 \quad (5.15)$$

et définissons une sortie factice³ suivante :

$$\bar{y} = \bar{h}(x) = KV = \sum_{i=1}^p k_i(x)L_f^{r_i}h_i(x).$$

Si $\bar{y} \notin \mathcal{L}(x)$, il peut être considéré comme une sortie factice appropriée afin d'estimer plus d'états⁴. Posons $y \triangleq [y, \bar{y}]^T$, et le système possède un nouveau degré relatif par rapport à cette sortie. Si $r = n$ (avec cette nouvelle sortie y), il a été prouvé en [4] que l'état x peut être récupéré en temps fini.

La proposition suivante nous donne alors les conditions équivalentes qui garantissent l'existence d'une solution de l'équation (5.15) et l'existence des sorties factices appropriées.

Proposition 5.7.4 [4] *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *L'équation (5.15) possède une solution non triviale $K(x)$, et $\bar{y} = KV \notin \mathcal{L}(x)$.*

ii) *L'ensemble de la classe équivalente $E = \frac{G^\perp \cap \Omega_\mathcal{L}}{G^\perp \cap \Omega_\mathcal{L}^1}$ des éléments de $G^\perp \cap \Omega_\mathcal{L}$ modulo $G^\perp \cap \Omega_\mathcal{L}^1$ est tel que $E \neq \emptyset$,*

iii) *$\Xi = \{\alpha \in G^\perp \cap \Omega_\mathcal{L} \text{ tel que } l_f \alpha \notin \mathcal{L}\} \neq \{0\}$.*

5.8 Exemple pour la transmission avec des entrées multiples

Dans cette section, afin de mettre en évidence la méthode proposée, nous allons utiliser un système chaotique de dimension 4 afin de construire un système de transmission chaotique avec des entrées multiples et un observateur à mode glissant pour synchroniser l'émetteur.

5.8.1 Système chaotique de Qi

Ce système chaotique de dimension 4 a été proposé en [133], celui-ci est décrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) + x_2x_3x_4 \\ \dot{x}_2 = b(x_1 + x_2) - x_1x_3x_4 \\ \dot{x}_3 = -cx_3 + x_1x_2x_4 \\ \dot{x}_4 = -dx_4 + x_1x_2x_3 \end{cases} \quad (5.16)$$

où $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$ sont les états, et a, b, c, d sont les paramètres positifs.

³Factice au sens qu'elle n'est pas mesurée directement mais reconstitué par l'observateur.

⁴Il est à noter qu'il peut exister une sous variété de singularité $S = \{x \in U \text{ tel que } \frac{\partial \bar{h}(x)}{\partial x} \in \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial x}\}$ avec $\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial x} = \text{span}\{\frac{\partial}{\partial x}h_1, \dots, \frac{\partial}{\partial x}L_f^{r_1-1}h_1, \dots, \frac{\partial}{\partial x}h_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x}L_f^{r_p-1}h_p\}$.

En [133], ce système chaotique a été exhaustivement analysé. Nous rappelons ici seulement certaines caractéristiques du système. Premièrement, afin d'assurer la dissipativité du système, les paramètres doivent satisfaire :

$$b - (a + c + d) < 0 \quad (5.17)$$

Sous cette condition, le comportement du système (5.16) peut être analysé selon les choix différents des paramètres :

Posons $a = 35$, $b = 10$, $c = 1$. Si $d \in]0, 21.88]$, le système (5.16) est à un comportement chaotique, avec un exposant de Lyapunov positif. Si $d \in]21.88, 26.8]$, le système (5.16) possède un attracteur périodique. Si $d \in]26.8, 33]$, le système (5.16) redevient chaotique. Il est à noter que, cet attracteur étrange (pour $d \in]21.88, 26.8]$) est différent du premier attracteur étrange (pour $d \in]0, 21.88]$). Lorsque d varie dans l'intervalle $]33, 36.5]$, le système (5.16) évolue comme un cycle limite. Finalement, lorsque $d > 36.5$, l'attracteur du système est un point fixe.

5.8.2 Exemple

Dans le but d'améliorer la sécurité du cryptage, l'intérêt principal du procédé avec plusieurs sorties est d'avoir à résoudre un problème d'inversion à gauche avec des sorties factices \bar{y} . Ensuite, des parties de la clé privée apparaissent dans \bar{y} et dans les variétés d'observabilités singulières.

Comme il a été discuté dans la section 5.3, même si le degré relatif fort du système est inférieur à sa dimension, il est encore possible de récupérer tous les états et les messages confidentiels. Pour d'illustrer ce cas, nous considérons l'émetteur basé sur le système chaotique (5.16) suivant :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)m = \begin{bmatrix} a(x_2 - x_1) + x_2x_3x_4 + m_1 \\ b(x_1 + x_2) - x_1x_3x_4 \\ -cx_3 + x_1x_2x_4 + x_3m_2 \\ -dx_4 + x_1x_2x_3 - x_4m_2 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

où $g_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ et $g_2 = [0 \ 0 \ x_3 \ -x_4]^T$. Nous supposons que m_1 et m_2 sont petits pour ne pas casser le comportement chaotique, et que $m_2 > 0$, et que la condition suivante est satisfaite

$$m_2 + d - c > 0. \quad (5.19)$$

Supposons que les sorties sont $y = (x_1 \ x_2)^T$, un calcul direct nous montre que le degré relatif fort du système (5.18) est $r = 3$. Ainsi, suivant le guide de l'algorithme proposé en [4], posons

$$\mathcal{L}(x) = \text{span}\{h_1, h_2, L_f h_2\}$$

car

$$L_f h_2 = b(x_1 + x_2) - x_1x_3x_4 = x_3x_4 \text{ mod } \{x_1, x_2\}$$

nous avons $\mathcal{L}(x) = \text{span}\{x_1, x_2, x_3x_4\}$. Calculons

$$\Gamma = \begin{pmatrix} L_{g_1}h_1 & L_{g_2}h_1 \\ L_{g_1}L_fh_2 & L_{g_2}L_fh_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b - x_3x_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, nous pouvons choisir $K = (b - x_3x_4, -1)$ tel que $K\Gamma = 0$.

Ensuite, les sortie factices suivantes peuvent être définies :

$$\begin{aligned} \bar{y} &= K \begin{bmatrix} L_fh_1 \\ L_f^2h_2 \end{bmatrix} = (b - x_3x_4)\dot{y}_1 - \dot{y}_2 \\ &= (x_3^2 + x_4^2) \text{ mod } \mathcal{L}(x) \end{aligned}$$

grâce à $\bar{y} \notin \mathcal{L}(x)$. Par conséquent, le point i) de la Proposition 5.7.4 est satisfait. Posons maintenant :

$$y \triangleq [x_1, x_2, x_3^2 + x_4^2]^T.$$

avec cette nouvelle sortie y , la dimension de l'ensemble

$$\Phi = \text{span}\{dx_1, dx_2, dx_3x_4, d(x_3^2 + x_4^2)\}$$

est égale à 4. Ce qui signifie que nous pouvons reconstruire tous les états en temps fini. Une conséquence directe est le fait que $\text{span}\{g_1, g_2\}$ est régulier, ce qui implique que les messages inconnus peuvent aussi être récupérés en temps fini. Pour cela, nous concevons l'observateur à mode glissant suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = a(x_2 - x_1) + x_2\tilde{x}_3\tilde{x}_4 + E_1\lambda_1\text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = b(x_1 + x_2) + \lambda_2\text{sign}(x_2 - \hat{x}_2) \\ \frac{d(\hat{x}_3\hat{x}_4)}{dt} = -(c + d)\tilde{x}_3\tilde{x}_4 \\ \quad + E_2\lambda_3\text{sign}(\tilde{x}_3\tilde{x}_4 - \hat{x}_3\hat{x}_4) \\ \frac{d(\hat{x}_3^2 + \hat{x}_4^2)}{dt} = -2c\tilde{x}_3^2 - 2d\tilde{x}_4^2 + 4x_1x_2\tilde{x}_3\tilde{x}_4 \\ \quad + 2E_3\lambda_4\text{sign}((\tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2) - (\hat{x}_3^2 + \hat{x}_4^2)) \end{cases} \quad (5.20)$$

avec

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{cases} 1 & x_2 = \hat{x}_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ E_2 &= \begin{cases} 1 & \text{si } E_1 = 1 \text{ et } x_1 = \hat{x}_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ E_3 &= \begin{cases} 1 & \text{si } E_2 = 1 \text{ et } \tilde{x}_3\tilde{x}_4 = \hat{x}_3\hat{x}_4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ E_4 &= \begin{cases} 1 & \text{si } E_3 = 1 \text{ et } \tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2 = \hat{x}_3^2 + \hat{x}_4^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

et avec les états auxiliaires

$$\begin{aligned} \tilde{x}_3\tilde{x}_4 &= -\frac{\lambda_2\text{sign}(x_2 - \hat{x}_2)}{x_1} \\ \tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2 &= \frac{E_2\lambda_3\text{sign}(\tilde{x}_3\tilde{x}_4 - \hat{x}_3\hat{x}_4)}{x_1x_2}. \end{aligned}$$

Nous pouvons aussi définir les messages auxiliaires

$$\begin{aligned} \tilde{m}_1 &= E_2\lambda_1\text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \tilde{m}_2 &= \frac{E_4\lambda_4\text{sign}((\tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2) - (\hat{x}_3^2 + \hat{x}_4^2))}{\tilde{x}_3^2 - \tilde{x}_4^2}. \end{aligned}$$

Remarque 5.8.3 Dans toutes les simulations, pour éviter les chattering, nous avons remplacé la fonction *sign* par la fonction *actangent*.

L'erreur sur la dynamique d'observabilité est défini par $e_i = x_i - \hat{x}_i$, et nous avons

$$\dot{e}_2 = -x_1 x_3 x_4 - \lambda_2 \text{sign}(x_2 - \hat{x}_2).$$

Choisissons $v = \frac{1}{2}e_2^2$, alors nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{v} &= e_2 \dot{e}_2 \\ &= e_2 (-x_1 x_3 x_4 - \lambda_2 \text{sign}(e_2)) \end{aligned}$$

Supposons que les états soient bornés, ainsi, en choisissant $\lambda_2 > |-x_1 x_3 x_4|_{\max}$, nous avons $\dot{v} < 0$. De plus, un régime glissant apparaît après t_1 sur la surface $e_2 = 0$. Comme $\dot{e}_2 = 0$ et $e_2 = 0$, $\forall t > t_1$, nous obtenons :

$$-x_1 x_3 x_4 = \lambda_2 \text{sign}(e_2).$$

et

$$\tilde{x}_3 \tilde{x}_4 = -\frac{\lambda_2 \text{sign}(e_2)}{x_1} = x_3 x_4$$

et $E_1 = 1$. Nous avons aussi

$$\dot{e}_1 = m_1 - E_1 \lambda_1 \text{sign}(e_1)$$

Pour les mêmes raisons, si $\lambda_1 > \max\{m_1\}$, il existe t_2 , tel que $e_1 = \dot{e}_1 = 0$, pour $t > t_2 > t_1$. Alors :

$$m_1 - \lambda_1 \text{sign}(e_1) = 0$$

et $E_2 = 1$, qui nous donne

$$\tilde{m}_1 = E_2 \lambda_1 \text{sign}(e_1) = m_1.$$

A partir du système (5.18), il peut être calculé :

$$\frac{d(x_3 x_4)}{dt} = -(c+d)x_3 x_4 + x_1 x_2 (x_3^2 + x_4^2)$$

de même :

$$\frac{d(x_3^2 + x_4^2)}{dt} = -2cx_3^2 - 2dx_4^2 + 4x_1 x_2 x_3 x_4 + 2(x_3^2 - x_4^2)m_2. \quad (5.21)$$

En posons $e_{34} = x_3 x_4 - \hat{x}_3 \hat{x}_4$, sa dynamique est donnée par :

$$\dot{e}_{34} = x_1 x_2 (x_3^2 + x_4^2) - E_2 \lambda_3 \text{sign}(e_{34})$$

Ainsi après t_3 , $e_{34} = \dot{e}_{34} = 0$, si $\lambda_3 > |x_1 x_2 (x_3^2 + x_4^2)|_{\max}$. Nous obtenons

$$x_1 x_2 (x_3^2 + x_4^2) - \lambda_3 \text{sign}(e_{34}) = 0$$

et nous déduirons immédiatement la variable auxiliaire

$$\tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2 = \frac{E_2 \lambda_3 \text{sign}(\tilde{x}_3 \tilde{x}_4 - \hat{x}_3 \hat{x}_4)}{x_1 x_2} = x_3^2 + x_4^2.$$

Pour déterminer \tilde{x}_3^2 et \tilde{x}_4^2 , nous définissons

$$\begin{aligned} \tilde{x}_3 \tilde{x}_4 &= A \\ \tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2 &= B \end{aligned}$$

et il est deux couples de solutions :

$$\begin{aligned} S_1 : \begin{cases} \tilde{x}_{3_1}^2 = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4A^2}}{2} \\ \tilde{x}_{4_1}^2 = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4A^2}}{2} \end{cases} \\ \text{et} \\ S_2 : \begin{cases} \tilde{x}_{3_2}^2 = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4A^2}}{2} \\ \tilde{x}_{4_2}^2 = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4A^2}}{2} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Supposons que S_1 est la bonne solution. A partir de (5.21), le message confidentiel peut être récupéré correctement comme suit :

$$-c\tilde{x}_{3_1}^2 - d\tilde{x}_{4_1}^2 + (\tilde{x}_{3_1}^2 - \tilde{x}_{4_1}^2) m_{2_1} = C. \quad (5.23)$$

Dans ce cas, nous avons, pour S_2 :

$$-c\tilde{x}_{3_2}^2 - d\tilde{x}_{4_2}^2 + (\tilde{x}_{3_2}^2 - \tilde{x}_{4_2}^2) m_{2_2} = C. \quad (5.24)$$

Avec les équations (5.23) et (5.24), nous avons :

$$m_{2_2} = \frac{-c\tilde{x}_{3_1}^2 - d\tilde{x}_{4_1}^2 + (\tilde{x}_{3_1}^2 - \tilde{x}_{4_1}^2) m_{2_1} + c\tilde{x}_{3_2}^2 + d\tilde{x}_{4_2}^2}{(\tilde{x}_{3_2}^2 - \tilde{x}_{4_2}^2)} \quad (5.25)$$

Notons que $\tilde{x}_{3_1}^2 = \tilde{x}_{4_2}^2$ et $\tilde{x}_{3_2}^2 = \tilde{x}_{4_1}^2$. L'équation (5.25) devient

$$\begin{aligned} m_{2_2} &= \frac{-c\tilde{x}_{3_1}^2 - d\tilde{x}_{4_1}^2 + (\tilde{x}_{3_1}^2 - \tilde{x}_{4_1}^2) m_{2_1} + c\tilde{x}_{4_1}^2 + d\tilde{x}_{3_1}^2}{(\tilde{x}_{4_1}^2 - \tilde{x}_{3_1}^2)} \\ &= c - d - m_{2_1} \end{aligned}$$

Selon l'équation (5.19), $m_{2_2} < 0$. Ainsi, m_{2_2} ne peut pas être un bon message parce que $m_2 > 0$. Suivant cette technique, la vraie solution correspondante aux \tilde{x}_3^2 et \tilde{x}_4^2 peut être implicitement trouvée.

Ensuite, posons $e_{3^2+4^2} = (\tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2) - (\hat{x}_3^2 + \hat{x}_4^2)$, ce qui nous donne :

$$\dot{e}_{3^2+4^2} = 2(x_3^2 - x_4^2)m_2 - 2E_3 \lambda_4 \text{sign}(e_{3^2+4^2})$$

Ainsi, si $\lambda_4 > |(x_3^2 + x_4^2)m_2|_{\max}$, nous avons $e_{3^2+4^2} = \dot{e}_{3^2+4^2} = 0$, après t_4 , et

$$(x_3^2 - x_4^2)m_2 - \lambda_4 \text{sign}(e_{3^2+4^2}) = 0$$

ce qui nous donne

$$\tilde{m}_2 = \frac{E_4 \lambda_4 \text{sign}(e_{3^2+4^2})}{\tilde{x}_3^2 - \tilde{x}_4^2} = m_2.$$

La figure 5.9 montre les états de l'émetteur et ceux du récepteur. La figure 5.9 prouve que les états du récepteur convergent rapidement vers ceux de l'émetteur. Et la figure 5.10 exhibe les messages originaux et leurs estimations. Nous constatons qu'après l'estimation de tous les états, les messages confidentiels sont bien reconstruits.

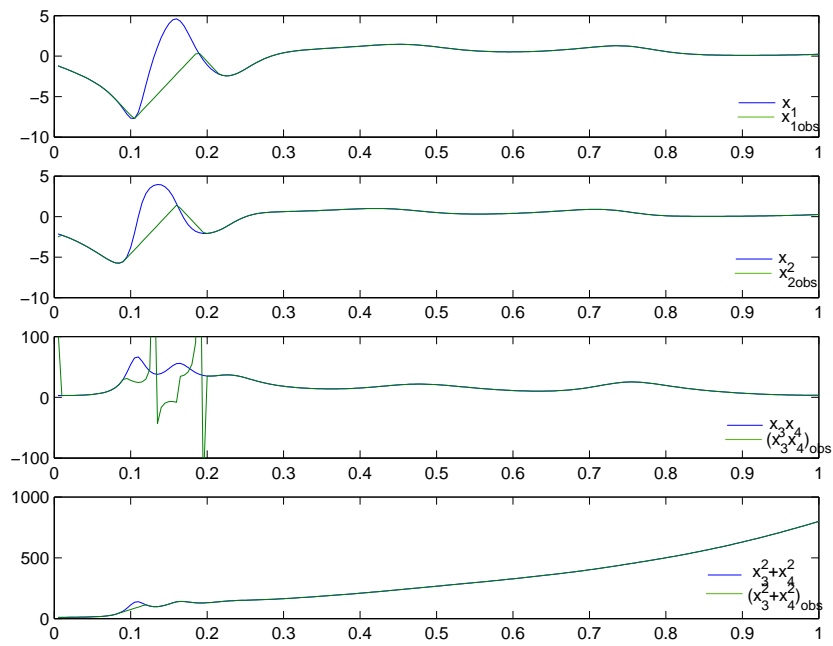


FIG. 5.9 – Observations des états de l'émetteur et ces du récepteur

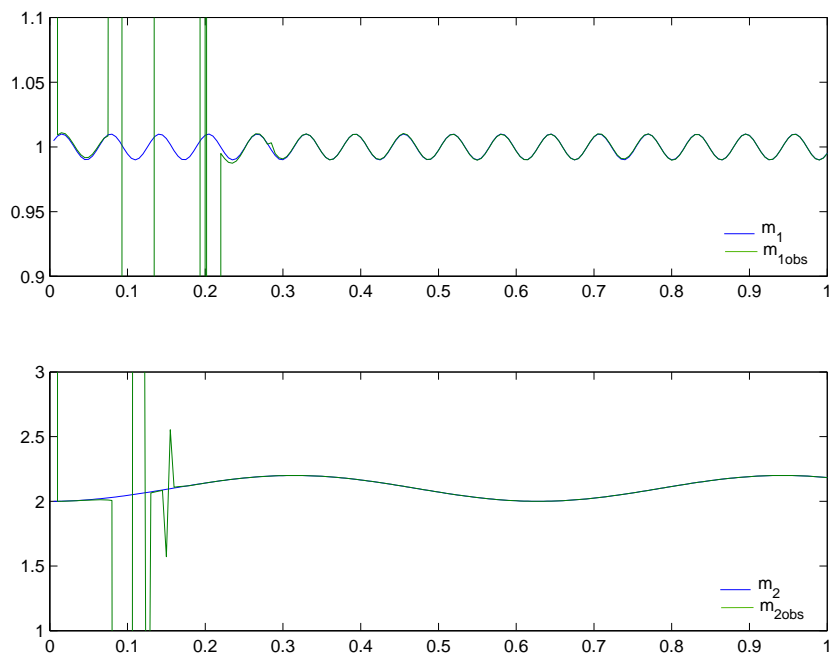


FIG. 5.10 – Observations des messages de l'émetteur et ces du récepteur

5.9 Conclusion

Ce chapitre a premièrement montré les propriétés du chaos et ses avantages dans son application à la transmission de données cryptées. Puisqu'un grand nombre de systèmes de transmission chaotique de données est basé sur la synchronisation du système chaotique, plusieurs techniques principales de synchronisation sont rappelées, et trois schémas fondamentaux de la transmission chaotique sont détaillés. Après cela, nous nous sommes concentré sur la façon de choisir un système chaotique pour la transmission chaotique de données. Puisque les formes normales étudiées dans les chapitres précédents sont écrites en fonction de la sortie et de l'entrée inconnue du système, il est logique de penser que le système chaotique transformé sous sa forme normale est plus facile à étudier et analyser que sur sa forme d'origine.

Ensuite, après l'analyse des inconvénients du système de transmission chaotique avec mono-entrée, un nouveau schéma avec des systèmes à des entrées multiples a été proposé afin de réduire le risque d'être cassé. Finalement un exemple simple a été simulé à l'aide de la méthode proposée.

Chapitre 6

Synchronisation Chaotique Basée sur la Stabilité de la Dynamique des Zéros

6.1 Introduction

Si nous essayons de concevoir un observateur pour résoudre le problème d'inversion à gauche [49], la condition d'OMC doit être vérifiée, elle a été discutée, pour les systèmes mono-entrée mono-sortie en [27], et pour les systèmes avec des entrées multiples et des sorties multiples en [125]. Malheureusement ces conditions additionnelles ont besoin que le système dynamique doit posséder un degré relatif égal à sa dimension, qui sont très strictes et beaucoup de systèmes ne satisfont pas ces conditions. Par conséquent, dans ce chapitre, nous proposons une méthode afin de relaxer la condition d'OMC traditionnelle pour la synchronisation du chaos.

En fait, ce chapitre est une autre discussion approfondie au sujet de l'algorithme présenté dans le chapitre 5. Nous prouverons que même si cet algorithme ne fonctionne pas, c.-à-d., la condition d'OMC n'est pas vérifiée, cependant si quelques conditions complémentaires sont imposées, l'état et l'entrée sont encore possibles d'être reconstruits [174]. Un observateur à mode glissant général sera conçu pour résoudre le problème d'inversion à gauche et sa convergence sera également prouvée dans ce chapitre. Enfin l'Exemple (5.18) discuté dans le chapitre 5.8 sera modifié afin d'illustrer la méthode proposée.

6.2 Problème traité

Dans le chapitre 5, nous avons discuté le cas où le degré relatif d'un système dynamique est inférieur à sa dimension, et comment trouver des nouvelles sorties factices pour obtenir plus d'informations des états. Et nous savons bien que, si avec les nouvelles sorties factices, le nouveau degré relatif du système est égal à sa dimension, alors tous états du système dynamique

pouvons être récupérés.

Cependant, supposons que après la $s^{\text{ème}}$ itération de l'algorithme présenté en [4], nous avons obtenu

$$\bar{\mathcal{L}}(x) = \text{span}\{h_1, \dots, L_f^{r_1-1}h_1, \dots, h_p, \dots, L_f^{r_p-1}h_p, \bar{y}_{p+1}, \dots, L_f^{r_{p+1}-1}\bar{y}_{p+1}, \dots, \bar{y}_{p+s}, \dots, L_f^{r_{p+s}-1}\bar{y}_{p+s}\}, \quad (6.1)$$

et pour cette dernière itération de cet algorithme, s'il n'existe pas la nouvelle sortie $\bar{y} \notin \bar{\mathcal{L}}$, ou s'il a une singularité, de plus si $\dim \bar{\mathcal{L}} < n$, est-ce que nous pouvons encore récupérer tous états et les entrées inconnues? Ce problème sera discuté dans la section suivante.

6.3 OMC et la stabilité de la dynamique des zéros

Lemme 6.3.1 [80] *Supposons que la dernière itération de l'algorithme nous donne $\bar{\mathcal{L}}(x)$ défini dans l'équation (6.1) où $\dim \bar{\mathcal{L}} = q < n$ et $\text{rank} \Gamma = m$. Définissons*

$$\Omega = \{dh_1, \dots, dL_f^{r_1-1}h_1, \dots, dh_m, \dots, dL_f^{r_m-1}h_m, d\bar{y}_{p+1}, \dots, dL_f^{r_{p+1}-1}\bar{y}_{p+1}, \dots, d\bar{y}_{p+s}, \dots, dL_f^{r_{p+s}-1}\bar{y}_{p+s}\}$$

Si

$$\dim(G^\perp \cup \Omega) = n \quad (6.2)$$

où G^\perp est défini dans le chapitre 5, alors le système (5.11) peut être décrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1^i = \xi_2^i \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{r_i-1}^i = \xi_{r_i}^i \\ \dot{\xi}_{r_i}^i = a_i(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^m b_j^i(\xi, \eta)u_j \\ \dot{\eta} = q(\xi, \eta) \\ y_i = \xi_1^i \end{cases} \quad (6.3)$$

où $a_i(\xi, \eta) = L_f^{r_i}h_i|_{\phi^{-1}(\xi, \eta)}$, et $b_j^i(\xi, \eta) = L_{g_j}L_f^{r_i-1}h_i|_{\phi^{-1}(\xi, \eta)}$, pour $i \in [1, p+s]$.

Preuve. Supposons que

$$\dim(G^\perp \cup \Omega) = n$$

avec $\dim \bar{\mathcal{L}} = q < n$ et $\text{rang} \Gamma = m$, il est possible de trouver $(n - q)$ fonctions à partir de l'ensemble $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}\}$, sans perte de généralité, en choisissant $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-q}\}$, tel que les n une formes $\{dh_1, \dots, dL_f^{r_1-1}h_1, \dots, dh_p, \dots, dL_f^{r_p-1}h_p, d\bar{y}_{p+1}, \dots, dL_f^{r_{p+1}-1}\bar{y}_{p+1}, \dots, d\bar{y}_{p+s}, \dots, dL_f^{r_{p+s}-1}\bar{y}_{p+s},$

$d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-q}$ sont linéairement indépendantes. Alors il existe un difféomorphisme

$$\begin{aligned} \phi = & \{h_1, \dots, L_f^{r_1-1}h_1, \dots, h_p, \dots, L_f^{r_p-1}h_p, \\ & \bar{y}_{p+1}, \dots, L_f^{r_{p+1}-1}\bar{y}_{p+1}, \dots, \bar{y}_{p+s}, \dots, L_f^{r_{p+s}-1}\bar{y}_{p+s}, \\ & \lambda_1, \dots, \lambda_{n-q}\} \end{aligned}$$

qui transforme le système (5.11) en la forme (6.3), dont la dynamique des zéros est donnée par :

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta)|_{\xi=0}. \quad (6.4)$$

■

Corollaire 6.3.2 *Si $\dim G = k = m$, ce qui signifie que le vecteur des entrées $\{g_1(x), \dots, g_m(x)\}$ sont involutives, alors $\dim G^\perp = n - m$. Ensuite, si $\text{rank} \Gamma = m$, alors la condition (6.2) est évidemment satisfaite. Ainsi, il existe un difféomorphisme qui transforme le système original en la forme (6.3).*

Corollaire 6.3.3 *Pour le système (5.10), si $p = m = 1$, il y a seulement une entrée g , celle-ci est évidemment involutive. Ainsi, dans ce cas, le système (5.10) peut être aussi transformé en la forme (6.3).*

Corollaire 6.3.4 *Si $\dim \bar{\mathcal{L}} = r < n$ et $\dim(G^\perp \cup \Omega) < n$, alors il n'existe pas la partie de la dynamique des zéros dans le système transformé, c.-à-d., l'équation (6.4) devient $\dot{\eta} = q(\xi, \eta, u)$.*

Remarque 6.3.5 *i) Si pour tous $i \in [1, p + s]$, $j \in [1, n - q]$, $\frac{\partial \xi_{r_i}^i}{\partial \eta_1} = \dots = \frac{\partial \xi_{r_i}^i}{\partial \eta_{n-q}} = 0$, c.-à-d., l'équation (6.4) devient $\dot{\eta} = q(\eta)$, alors il est possible de récupérer l'entrée inconnue u .*

ii) Si, pour un certain $i \in [1, p + s]$, $j \in [1, n - q]$, nous avons $\frac{\partial \xi_{r_i}^i}{\partial \eta_j} \neq 0$, alors l'entrée inconnue u dépend de la détectabilité de η .

Pour résoudre le problème posé ci-dessus, nous avons besoin des hypothèses suivantes :

Hypothèse 6.3.6 *La dynamique des zéros du système (6.3) est détectable uniformément, au moins exponentiellement, c.-à-d., il existe une fonction de Lyapunov définitive strictement positive $V(\eta - \bar{\eta})$ qui satisfait, pour tous $\eta, \bar{\eta}$ et ξ , les relations suivantes :*

$$\dot{V}(\eta - \bar{\eta}) = \frac{\partial V}{\partial(\eta - \bar{\eta})} [q(\xi, \eta) - q(\xi, \bar{\eta})] \leq -K_0 V$$

où K_0 est une constante strictement positive.

Hypothèse 6.3.7 *Le système (6.3) possède des Entrées Bornées des Etats Bornés (EBEB).*

Sous les Hypothèses 6.3.6 et 6.3.7, nous pouvons observer les états et l'entrée inconnue pour le système (6.3) à l'aide d'un observateur à mode glissant de la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{\hat{\xi}}_1^i = \hat{\xi}_2^i + \lambda_1^i \text{sign}(\xi_1^i - \hat{\xi}_1^i) \\ \dot{\hat{\xi}}_2^i = \hat{\xi}_3^i + E_1^i \lambda_2^i \text{sign}(\tilde{\xi}_2^i - \hat{\xi}_2^i) \\ \vdots \\ \dot{\hat{\xi}}_{r_i-1}^i = \hat{\xi}_{r_i}^i + E_{r_i-2}^i \lambda_{r_i-1}^i \text{sign}(\tilde{\xi}_{r_i-1}^i - \hat{\xi}_{r_i-1}^i) \\ \dot{\hat{\xi}}_{r_i}^i = a_i(\tilde{\xi}, \hat{\eta}) + E_{r_i-1}^i \lambda_{r_i}^i \text{sign}(\tilde{\xi}_{r_i-1}^i - \hat{\xi}_{r_i-1}^i) \\ \dot{\hat{\eta}} = q(\tilde{\xi}, \hat{\eta}) E_{n-q} \end{cases} \quad (6.5)$$

avec les états auxiliaires :

$$\tilde{\xi}_{t+1}^i = \hat{\xi}_{t+1}^i + E_t^i \lambda_{t+1}^i \text{sign}(\tilde{\xi}_{t+1}^i - \hat{\xi}_{t+1}^i) \quad (6.6)$$

où

$$E_t^i = \begin{cases} 1 & \text{si } \tilde{\xi}_{t+1}^i = \hat{\xi}_{t+1}^i \text{ et } E_{t-1}^i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.7)$$

et

$$E_{n-q} = \begin{cases} 1 & \text{si tous } E_t^i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour $i \in [1, q]$ (Notons : $\tilde{\xi}_1^i = \xi_1^i$).

Lemme 6.3.8 *Grâce à l'observateur donné dans l'équation (6.5), pour n'importe quelle condition initiale, il existe $t_r > 0$ tel que $\forall t > t_r$*

$$\hat{\xi}(t) = \tilde{\xi}(t) = \xi(t)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\eta(t) - \hat{\eta}(t)| = 0$$

Preuve. Posons $e_t^i = \xi_t^i - \hat{\xi}_t^i$, pour $i \in [1, p+s]$, $t \in [1, r_i]$, ($\tilde{\xi}_1 = \xi_1$).

Supposons qu'après la $(j-1)^{\text{ème}}$ étape, $j \in [2, p+s]$, nous avons obtenu :

$$\tilde{\xi}_{j-1}^i = \hat{\xi}_{j-1}^i$$

et $E_{j-1}^i = 1$. Alors nous avons

$$\tilde{\xi}_j^i = \hat{\xi}_j^i + \lambda_{j-1}^i \text{sign}(\tilde{\xi}_{j-1}^i - \hat{\xi}_{j-1}^i) = \hat{\xi}_j^i.$$

Ainsi, pour la $j^{\text{ème}}$ étape, l'erreur d'observation peut être décrit de la façon suivante :

$$\dot{e}_j^i = \xi_{j+1}^i - \hat{\xi}_{j+1}^i - E_{j-1}^i \lambda_j^i \text{sign}(\tilde{\xi}_j^i - \hat{\xi}_j^i)$$

Nous pouvons choisir la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_j^i = \frac{1}{2} (e_j^i)^2$$

Grâce à $E_{j-1}^i = 1$, et $\tilde{\xi}_j^i = \xi_j^i$, nous avons :

$$\dot{V}_j^i = e_j^i \left[\xi_{j+1}^i - \hat{\xi}_{j+1}^i - \lambda_j^i \text{sign}(e_j^i) \right]$$

Ainsi si $\lambda_j^i > \left| \xi_{j+1}^i - \hat{\xi}_{j+1}^i \right|_{\max}$
(c.-à.-d., $\exists k_j^i > 0$, tel que $\lambda_j^i = k_j^i + \left| \xi_{j+1}^i - \hat{\xi}_{j+1}^i \right|_{\max}$), alors

$$\dot{V}_j^i = -k |e| = -kV^{1/2}$$

ce qui signifie qu'il existe t_j^i , tel que si $t > t_j^i > t_{j-1}^i$, $e_j^i = \dot{e}_j^i = 0$, et nous obtenons

$$\xi_{j+1}^i - \hat{\xi}_{j+1}^i = \lambda_j^i \text{sign}(e_j^i) \quad (6.8)$$

Selon les définitions de (6.6) et (6.7), nous avons

$$\tilde{\xi}_{j+1}^i = \hat{\xi}_{j+1}^i$$

et $E_j^i = 1$.

Par conséquent, étape par étape, nous pouvons récupérer tous les composants de vecteur ξ . Mais comme l'entrée u_i est inconnue, nous ne pouvons pas reconstruire η à partir de ξ_r^i . Cependant, sous l'Hypothèse 6.3.6, nous pouvons récupérer les états restants comme suit.

L'Hypothèse 6.3.7 nous assure que l'état est borné pour tous $t > 0$, ainsi η est borné. Ensuite, l'erreur d'estimation de la dynamique des zéros ($e_{n-q} = \eta - \hat{\eta}$) est égal à :

$$\dot{e}_{n-q} = q(\xi, \eta) - q(\tilde{\xi}, \hat{\eta})$$

et selon l'Hypothèse 6.3.6, nous savons

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\eta(t) - \hat{\eta}(t)| = 0.$$

■

Proposition 6.3.9 *Sous les Hypothèses 6.3.6 et 6.3.7, avec $\text{rank}\Gamma = m$, grâce à l'observateur (6.5), pour n'importe quelle condition initiale, il existe $t_r > 0$ tel que $\forall t > t_r$*

$$\hat{\xi}(t) = \tilde{\xi}(t) = \xi(t),$$

de plus

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\eta(t) - \hat{\eta}(t)| = 0$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |u(t) - \tilde{u}(t)| = 0$$

Preuve. Reconstruction de l'entrée inconnue u

Comme ξ et u sont bornés, nous pouvons choisir

$$\lambda_{k_i}^i > \left| a_i(\xi, \eta) - a_i(\tilde{\xi}, \hat{\eta}) + \sum_{j=1}^m b_j^i(\xi, \eta) u_j \right|,$$

tel que $e_{r_i}^i$ converge vers zéro en temps fini. Par conséquent, nous obtenons $\xi = \tilde{\xi}$.

Posons

$$\Gamma = \begin{bmatrix} b_1^1(\xi, \eta) & \cdots & b_m^1(\xi, \eta) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^{p+s}(\xi, \eta) & \cdots & b_m^{p+s}(\xi, \eta) \end{bmatrix}$$

Car $\text{rank}\Gamma = m$, sans perte de généralité, nous pouvons supposer que les premières m lignes sont indépendantes, c.-à-d., $\text{rank}B(\xi, \eta) = m$, où

$$B(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} b_1^1(\xi, \eta) & \cdots & b_m^1(\xi, \eta) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^m(\xi, \eta) & \cdots & b_m^m(\xi, \eta) \end{bmatrix}.$$

Ainsi nous avons

$$\dot{\hat{\xi}}_r = A(\tilde{\xi}, \hat{\eta}) + B(\tilde{\xi}, \hat{\eta})u,$$

$$\text{où } \dot{\hat{\xi}}_r = \begin{bmatrix} \dot{\hat{\xi}}_{r_1}^1 \\ \vdots \\ \dot{\hat{\xi}}_{r_m}^m \end{bmatrix}, A(\tilde{\xi}, \hat{\eta}) = \begin{bmatrix} a_1(\tilde{\xi}, \hat{\eta}) \\ \vdots \\ a_m(\tilde{\xi}, \hat{\eta}) \end{bmatrix} \text{ et } u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}.$$

Après les estimations de l'état ξ en temps fini et de l'état η de façon exponentielles, il existe $t_r > t_j^i$, pour tous $i \in [1, p+s]$, $j \in [1, r_i]$, lorsque $t > t_r$, tel que

$$e_A := A(\xi, \eta) - A(\tilde{\xi}, \hat{\eta})$$

ensuite nous pouvons obtenir

$$e_A + B(\tilde{\xi}, \hat{\eta})u = E_{r-1} \lambda_r \text{sign}(\tilde{\xi}_r - \hat{\xi}_r) \quad (6.9)$$

où

$$E_{r-1} = \begin{bmatrix} E_{r_1-1}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E_{r_2-1}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & E_{r_m-1}^m \end{bmatrix},$$

$$\lambda_r = \begin{bmatrix} \lambda_{r_1}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{r_2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{r_m}^m \end{bmatrix}$$

et

$$\text{sign}(\tilde{\xi}_r - \hat{\xi}_r) = \begin{bmatrix} \text{sign}(\tilde{\xi}_{r_1}^1 - \hat{\xi}_{r_1}^1) \\ \vdots \\ \text{sign}(\tilde{\xi}_{r_m}^m - \hat{\xi}_{r_m}^m) \end{bmatrix}.$$

Ainsi si nous supposons

$$\tilde{u} = B^{-1}(\tilde{\xi}, \hat{\eta}) E_{r-1} \lambda_r \text{sign}(\tilde{\xi}_r - \hat{\xi}_r) \quad (6.10)$$

pour $t > t_r$, nous obtenons

$$u - \tilde{u} = [B^{-1}(\xi, \eta) - B^{-1}(\xi, \hat{\eta})] E_{r-1} \lambda_r \text{sign}(\tilde{\xi}_r - \hat{\xi}_r) - B^{-1}(\xi, \eta) e_A$$

et par conséquent, grâce à la convergence de e_A et $(\eta - \hat{\eta})$ vers zéro, nous avons

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u - \tilde{u}| = 0$$

■

6.4 Exemple

Afin d'illustrer la méthode proposée, nous modifions l'Exemple (5.18) discuté au Chapitre 5.8 afin de construire l'émetteur suivant :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)m = \begin{bmatrix} a(x_2 - x_1) + x_2 x_3 x_4 + m_1 \\ b(x_1 + x_2) - x_1 x_3 x_4 \\ -c x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_3 x_5 m_2 \\ -d x_4 + x_1 x_2 x_3 - x_4 x_5 m_2 \\ -10 x_5 + x_3 x_4 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

où $g_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ et $g_2 = [0 \ 0 \ x_3 x_5 \ -x_4 x_5 \ 0]^T$. Il est évident que g_1 et g_2 sont involutifs. Et nous supposons aussi que m_1 et m_2 sont petits pour ne pas casser le comportement chaotique, $m_2 > 0$, et la condition suivante est satisfaite

$$m_2 + \frac{d-c}{x_5} > 0. \quad (6.12)$$

Les sorties sont aussi imposées $y = [x_1 \ x_2]^T$. Et g_1 et g_2 sont bien choisis tels que le degré relatif du système est $r = 3$. Ainsi, selon l'algorithme proposé en [4], nous pouvons aussi obtenir

$$\Gamma = \begin{pmatrix} L_{g_1} h_1 & L_{g_2} h_1 \\ L_{g_1} L_f h_2 & L_{g_2} L_f h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b - x_3 x_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

ensuite nous avons

$$K = (b - x_3x_4, \quad -1)$$

tel que $K\Gamma = 0$.

Avec la même procédure que pour l'Exemple (5.18), finalement nous obtenons

$$y \triangleq [x_1, \quad x_2, \quad x_3^2 + x_4^2]^T .$$

ce qui donne $\bar{\mathcal{L}}(x) = \text{span}\{x_1, x_2, x_3x_4, (x_3^2 + x_4^2)\}$, où $\dim \bar{\mathcal{L}}(x) = 4 < 5$. Mais comme $\{g_1, g_2\}$ est involutif, et selon le Corollaire 6.3.2, l'émetteur (6.11) peut être transformé en la forme normale (6.3). Grâce à la Proposition 6.3.9, nous pouvons reconstruire les états et les entrées inconnues en temps fini. Dans ce but, nous concevons l'observateur à mode glissant pour le système (6.11) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}_1 = a(x_2 - x_1) + x_2\tilde{x}_3\tilde{x}_4 + E_1\lambda_1 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = b(x_1 + x_2) + \lambda_2 \text{sign}(x_2 - \hat{x}_2) \\ \frac{d(\hat{x}_3\hat{x}_4)}{dt} = -(c+d)\tilde{x}_3\tilde{x}_4 \\ \quad + E_2\lambda_3 \text{sign}(\tilde{x}_3\tilde{x}_4 - \hat{x}_3\hat{x}_4) \\ \frac{d(\hat{x}_3^2 + \hat{x}_4^2)}{dt} = -2c\tilde{x}_3^2 - 2d\tilde{x}_4^2 + 4x_1x_2\tilde{x}_3\tilde{x}_4 \\ \quad + 2E_3\lambda_4 \text{sign}((\tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2) - (\hat{x}_3^2 + \hat{x}_4^2)) \\ \dot{\hat{x}}_5 = E_3(-10\hat{x}_5 + \tilde{x}_3\tilde{x}_4) \end{array} \right. \quad (6.13)$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda_i &> 0, \quad i = 1, \dots, 4 \\ E_1 &= \begin{cases} 1 & x_2 = \hat{x}_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ E_2 &= \begin{cases} 1 & \text{si } E_1 = 1 \text{ et } x_1 = \hat{x}_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ E_3 &= \begin{cases} 1 & \text{si } E_2 = 1 \text{ et } \tilde{x}_3\tilde{x}_4 = \hat{x}_3\hat{x}_4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ E_4 &= \begin{cases} 1 & \text{si } E_3 = 1 \text{ et } \hat{x}_5 = x_5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

et avec les états auxiliaires :

$$\tilde{x}_3\tilde{x}_4 = -\frac{\lambda_2 \text{sign}(x_2 - \hat{x}_2)}{x_1} \quad (6.14)$$

$$\tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2 = \frac{E_2\lambda_3 \text{sign}(\tilde{x}_3\tilde{x}_4 - \hat{x}_3\hat{x}_4)}{\hat{x}_5 x_1 x_2}. \quad (6.15)$$

Evidemment la singularité d'observabilité de la sous variété S est égal à $S = \{x_1 = 0\} \cup \{x_1x_2 = 0\}$.

Définissons

$$\tilde{m}_1 = E_2\lambda_1 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \quad (6.16)$$

et

$$\tilde{m}_2 = \frac{E_5\lambda_4 \text{sign}((\tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2) - (\hat{x}_3^2 + \hat{x}_4^2))}{\hat{x}_5(\tilde{x}_3^2 - \tilde{x}_4^2)}. \quad (6.17)$$

où

$$E_5 = \begin{cases} 1 & \text{si } E_4 = 1 \text{ et } \tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2 = \hat{x}_3^2 + \hat{x}_4^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les erreur d'observation sont définis par :

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 - \hat{x}_1 \\ e_2 &= x_2 - \hat{x}_2 \\ e_{34} &= x_3x_4 - \hat{x}_3\hat{x}_4 \\ e_{3^2+4^2} &= (x_3^2 + x_4^2) - (\hat{x}_3^2 + \hat{x}_4^2) \\ e_5 &= x_5 - \hat{x}_5 \end{aligned}$$

A partir du système (6.11), nous pouvons obtenir

$$\frac{d(x_3x_4)}{dt} = -(c+d)x_3x_4 + x_1x_2(x_3^2 + x_4^2)$$

et

$$\frac{d(x_3^2 + x_4^2)}{dt} = -2cx_3^2 + 4x_1x_2x_3x_4 - 2dx_4^2 + 2(x_3^2 - x_4^2)m_2. \quad (6.18)$$

Ainsi, l'erreur d'observation est donné par

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = x_2(x_3x_4 - \tilde{x}_3\tilde{x}_4) + m_1 - E_1\lambda_1\text{sign}(e_1) \\ \dot{e}_2 = -x_1x_3x_4 - \lambda_2\text{sign}(e_2) \\ \dot{e}_{34} = -(c+d)(x_3x_4 - \tilde{x}_3\tilde{x}_4) + x_1x_2(x_3^2 + x_4^2) \\ \quad - E_2\lambda_3\text{sign}(\tilde{x}_3\tilde{x}_4 - \hat{x}_3\hat{x}_4) \\ \dot{e}_{3^2+4^2} = -2c(x_3^2 - \tilde{x}_3^2) - 2d(x_4^2 - \tilde{x}_4^2) \\ \quad + 4x_1x_2(x_3x_4 - \tilde{x}_3\tilde{x}_4) + 2(x_3^2 - x_4^2)m_2 \\ \quad - 2E_3\lambda_4\text{sign}((\tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2) - (\hat{x}_3^2 + \hat{x}_4^2)) \\ \dot{e}_5 = -10x_5 + x_3x_4 - E_3(-10\hat{x}_5 + \tilde{x}_3\tilde{x}_4) \end{cases}$$

La convergence de l'observateur à mode glissant a été prouvée dans le chapitre précédent. Mais pour cet exemple, il est à noter que la possibilité d'estimer m_2 exige les connaissances de \tilde{x}_3^2 et \tilde{x}_4^2 , qui peuvent être calculés de la façon suivante après les estimations de \hat{x}_5 , $\tilde{x}_3\tilde{x}_4$ et $(\tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2)$.

Les convergences de $\tilde{x}_3\tilde{x}_4$ et $(\tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2)$ peuvent être facilement obtenues. Ensuite, comme x_5 est détectable (c.-à.-d., sa convergence est uniformément exponentiellement), nous pouvons estimer \hat{x}_5 . En fait, si nous choisissons

$$V(e_5) = \frac{e_5^2}{2}$$

alors

$$\dot{V}(e_5) = -10e_5^2 < 0$$

qui implique que l'Hypothèse 6.3.6 est vérifiée avec $K_0 = 20$, et nous obtenons

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x_5 - \hat{x}_5| = 0.$$

Et puis, nous pouvons définir

$$\begin{aligned} \tilde{x}_3\tilde{x}_4 &= A \\ \tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2 &= B \end{aligned}$$

Evidemment il y a deux groupes de solutions :

$$S_1 : \begin{cases} \tilde{x}_{3_1}^2 = \frac{B+\sqrt{B^2-4A^2}}{2} \\ \tilde{x}_{4_1}^2 = \frac{B-\sqrt{B^2-4A^2}}{2} \end{cases}$$

et

$$S_2 : \begin{cases} \tilde{x}_{3_2}^2 = \frac{B-\sqrt{B^2-4A^2}}{2} \\ \tilde{x}_{4_2}^2 = \frac{B+\sqrt{B^2-4A^2}}{2} \end{cases} \quad (6.19)$$

Supposons que S_1 est la bonne solution. Selon l'équation (6.18), les messages confidentiels peuvent être récupérés correctement comme suit :

$$-c\tilde{x}_{3_1}^2 - d\tilde{x}_{4_1}^2 + (\tilde{x}_{3_1}^2 - \tilde{x}_{4_1}^2) \hat{x}_5 m_{2_1} = -2x_1 x_2 \tilde{x}_3 \tilde{x}_4 \triangleq C. \quad (6.20)$$

Dans ce cas, nous avons, pour S_2 :

$$-c\tilde{x}_{3_2}^2 - d\tilde{x}_{4_2}^2 + (\tilde{x}_{3_2}^2 - \tilde{x}_{4_2}^2) \hat{x}_5 m_{2_2} = C. \quad (6.21)$$

L'utilisation des équations (6.20) et (6.21), nous donnons

$$m_{2_2} = \frac{\begin{bmatrix} -c\tilde{x}_{3_1}^2 - d\tilde{x}_{4_1}^2 + (\tilde{x}_{3_1}^2 - \tilde{x}_{4_1}^2) \hat{x}_5 m_{2_1} \\ +c\tilde{x}_{3_2}^2 + d\tilde{x}_{4_2}^2 \end{bmatrix}}{(\tilde{x}_{3_2}^2 - \tilde{x}_{4_2}^2) \hat{x}_5}$$

Notons que $\tilde{x}_{3_1}^2 = \tilde{x}_{4_2}^2$ et $\tilde{x}_{3_2}^2 = \tilde{x}_{4_1}^2$. Ainsi cette équation devient

$$\begin{aligned} m_{2_2} &= \frac{\begin{bmatrix} -c\tilde{x}_{3_1}^2 - d\tilde{x}_{4_1}^2 + (\tilde{x}_{3_1}^2 - \tilde{x}_{4_1}^2) \hat{x}_5 m_{2_1} \\ +c\tilde{x}_{4_1}^2 + d\tilde{x}_{3_1}^2 \end{bmatrix}}{(\tilde{x}_{4_1}^2 - \tilde{x}_{3_1}^2) \hat{x}_5} \\ &= \frac{c-d}{\hat{x}_5} - m_{2_1} \end{aligned}$$

Si m_{2_1} est la bonne solution, alors $m_{2_2} < 0$ selon l'équation (6.12) et ceci exclut la solution m_{2_2} . Suivant ce chemin, la bonne solution correspondante à \tilde{x}_3^2 et \tilde{x}_4^2 peut être déterminée.

Depuis \tilde{x}_3^2 et \tilde{x}_4^2 sont estimés, nous avons

$$\dot{e}_{3^2+4^2} = 2x_5(x_3^2 - x_4^2)m_2 - 2E_3\lambda_4 \text{sign}(e_{3^2+4^2})$$

Ainsi, choisissons $\lambda_4 > \sup_{\forall t>0} |x_5(x_3^2 - x_4^2)m_2|$, et nous obtenons

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x_5(x_3^2 - x_4^2)m_2 - \lambda_4 \text{sign}(e_{3^2+4^2})| = 0.$$

Finalement la relation (6.17) aboutit à l'estimation du deuxième message confidentiel :

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{m}_2 - m_2| \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left| \frac{E_4\lambda_4 \text{sign}(e_{3^2+4^2})}{\hat{x}_5(\tilde{x}_3^2 - \tilde{x}_4^2)} - \frac{E_4\lambda_4 \text{sign}(e_{3^2+4^2})}{x_5(\tilde{x}_3^2 - \tilde{x}_4^2)} \right| \\ &= 0. \end{aligned}$$

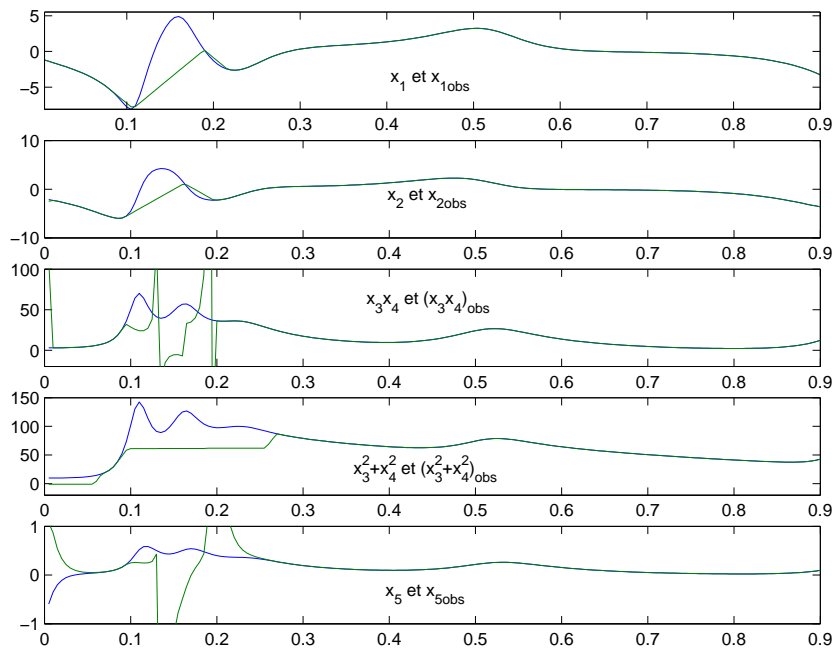


FIG. 6.1 – Observation des états de l'émetteur et ceux du récepteur

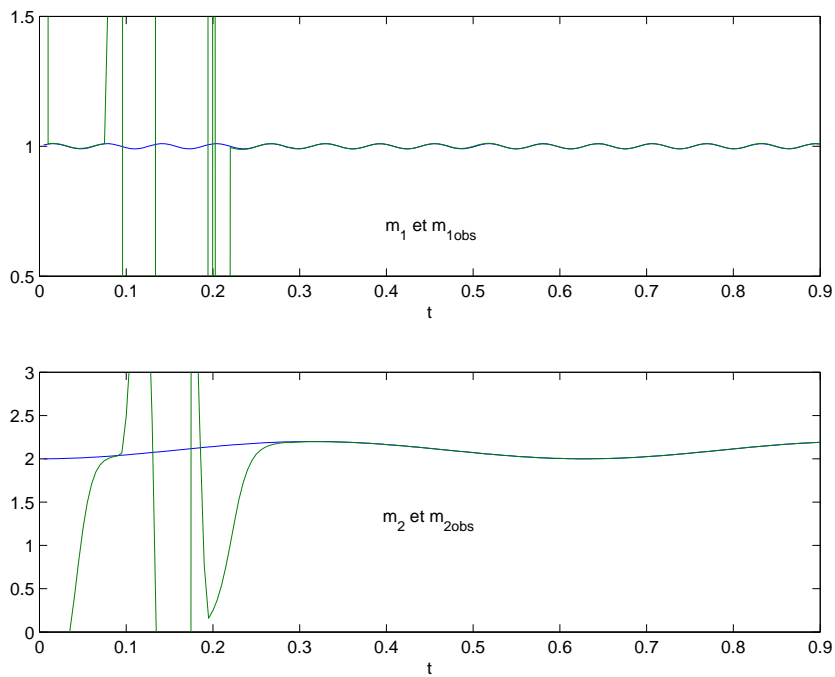


FIG. 6.2 – Observation des messages de l'émetteur et ceux du récepteur

La figure 6.1 exhibe les états de l'émetteur et ceux du récepteur, et la figure 6.2 montre les messages originaux et ceux de l'observation. La figure 6.1 montre que les états du récepteur convergent rapidement vers ceux de l'émetteur. Dans la figure 6.2, nous pouvons voir qu'après les estimations des états, les messages confidentiels sont reconstruits avec succès.

6.5 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à une discussion approfondie de l'algorithme présenté dans le chapitre précédent. Nous avons prouvé que même si cet algorithme ne fonctionnait pas, c.-à-d., que la condition d'OMC n'est pas vérifiée, sous quelques conditions additionnelles, il est également possible d'estimer l'état et l'entrée. Cette relaxation de la condition d'OMC traditionnelle est basée sur la stabilité de la partie de la dynamique des zéros. Ensuite, nous avons proposé un observateur très général basé sur la technique de mode glissante afin de résoudre le problème d'inversion à gauche. Finalement un exemple sur un système de transmission chaotique a été établi afin de souligner l'intérêt de la méthode proposée.

Chapitre 7

Approche d'Augmentation du Rapport Signaux Utiles sur Signaux Emis

7.1 Introduction

Dans les chapitres 5 et 6, nous avons présenté des schémas de transmission chaotique à des entrées multiples, mais ces schémas, aussi que la majorité des schémas présentés dans la littérature, possèdent le même inconvénient : l'amplitude du messages confidentiels doit être significativement plus petite que celle du signal chaotique. Dans ce chapitre, nous allons proposer un nouveau schéma de transmission chaotique pour surmonter cet inconvénient. L'idée fondamentale de cette nouvelle approche est de séparer les fonctions de synchronisation et de chiffrement, qui ne sont réalisées que par un signal scalaire unique dans le schéma traditionnel. Notre schéma est basé sur la théorie de l'inversion à gauche, ce qui nous conduit à l'étudier comme un problème de synthèse d'observateur avec des sorties multiples [116].

Dans ce chapitre, une présentation brève du problème et le but de notre travail seront premièrement donnés dans la section 7.2. Dans la section 7.3, après une analyse de l'inversion à gauche, nous proposerons notre schéma à l'aide d'un observateur mode glissant afin de récupérer des états et des entrées d'un système de transmission chaotique. Un exemple sera donné afin de mettre en évidence l'intérêt de la méthode proposée dans la section 7.5.

7.2 Analyse des Méthodes Classiques

Dans un premier temps, nous allons mettre en évidence pourquoi l'amplitude du message dans les schémas classiques devrait être significativement plus petite que celle du signal du système chaotique. Par exemple dans le schéma par addition, la contrainte fondamentale de celui-ci est que le spectre du signal chaotique doit être continu et infiniment plus large, et de densité de puissance plus élevée que le signal à cacher. En d'autres termes, le

spectre de puissance du message doit être caché dans celui du signal chaotique. Par conséquent, afin de maintenir la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur, et s'assurer que le signal chaotique masque le message, la dynamique du message doit être en énergie plus petite que celle de signal chaotique ajouté au message et sa fréquence incluse dans sa bande passante. D'autre part, l'addition du message au signal scalaire dans l'émetteur peut dégrader la qualité de la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur, et même entraîner la perte de la synchronisation si le message est de grande amplitude. De même dans le schéma de modulation, le message doit être plus petit que le signal chaotique pour ne pas casser le comportement chaotique du système.

Après l'analyse, nous avons constaté que la raison principale de limiter l'amplitude du message, dans les schémas traditionnels, est que nous utilisons seulement un signal scalaire pour à la fois synchroniser l'émetteur et le récepteur et aussi transmettre le message. Ainsi ce signal scalaire joue deux rôles : la synchronisation et la transmission de message. C'est pourquoi un juste équilibre doit être trouvé. Si le message est trop grand il y a des difficultés de synchronisation, ou alors le comportement chaotique du système original est détruit. De plus si le message chaotique est trop petit, il est indissociable du bruit. Ainsi si nous séparons les deux tâches en employant plus de signaux, nous pouvons accroître l'amplitude du message sans nous heurter à ce dilemme.

A partir de cette idée, nous proposons un nouveau schéma où l'émetteur est considéré comme un système avec des sorties multiples possédant des entrées multiples inconnues, ainsi nous devons résoudre la synthèse d'un observateur afin de solutionner le problème d'inversion à gauche pour un système avec des entrées multiples et des sorties multiples.

7.3 Nouveau Schéma

Rappelons que, dans les schémas traditionnels, un signal scalaire unique est transmis au récepteur, mais ce signal joue deux rôles en même temps : il représente le message codé, et il synchronise le système.

Nous proposons un schéma afin de transmettre un nombre important de messages avec des amplitudes non négligeables par rapport au signal chaotique. La figure 7.1 présente le schéma bloc du système.

Dans ce schéma, l'émetteur est composé d'un système chaotique : $\Sigma_C \in \mathbb{R}^{N_C}$, pour générer le signal chaotique, et un système dynamique (celui-ci peut être aussi chaotique) : $\Sigma_D \in \mathbb{R}^{N_D}$, pour chiffrer les messages. Et toutes les sorties de Σ_D et une partie des sorties de Σ_C : H_{NC1} sont utilisées afin de concevoir un observateur.

L'idée principale est que les entrées sont premièrement mélangées par le système dynamique, et non pas directement par un système chaotique. Ensuite, afin d'utiliser la caractéristique du système chaotique, nous ajoutons une fonction $\theta(x) \in \mathbb{R}^{N_\theta} \subset \mathbb{R}^{N_C}$ au système dynamique. Selon la figure 7.1, la synchronisation est réalisée par la sortie de Σ_C : $H_{NC1} \in \mathbb{R}^{N_{C1}} \subset \mathbb{R}^{N_C}$.

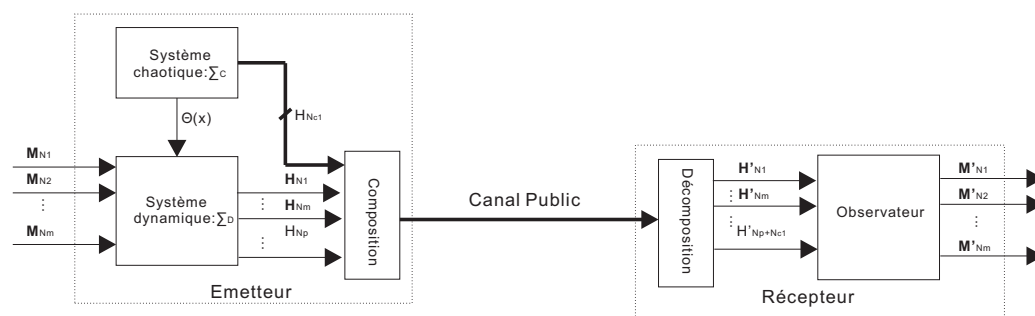


FIG. 7.1 – Le schéma basé sur les sous systèmes combinés concernant l'amplitude du message

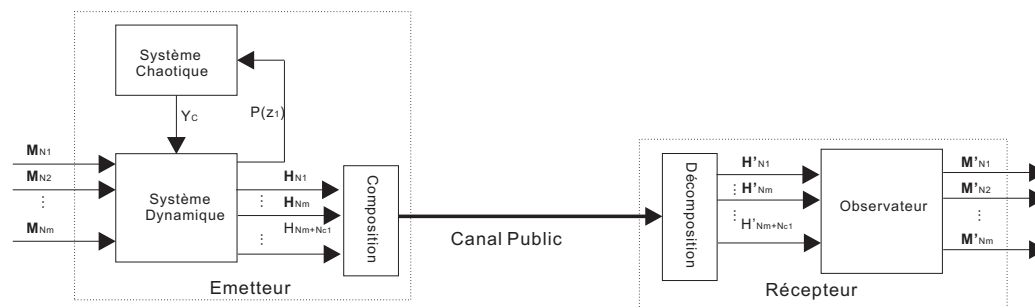


FIG. 7.2 – Le schéma amélioré basé sur les sous systèmes combinés concernant l'amplitude du message

Et la sortie de $\Sigma_D : (H_{N1}, \dots, H_{Np})^T \in \mathbb{R}^{N_{DO}}$ est utilisée pour représenter les messages codés. Ainsi, l'amplitude du message peut être augmentée. La version mono-entrée mono sortie de ce schéma est exactement identique à celle de [163], dans laquelle les auteurs ont utilisé l'échantillon impulsif de Σ_C , au lieu de H_{Nc1} , pour réaliser la synchronisation.

Afin d'augmenter la sécurité, au lieu de transmettre H_{Nc1} directement au récepteur, nous essayons de le reconstruire par la sortie de Σ_D . Ainsi, nous devons ajouter au moins N_{C1} signaux à la sortie du système Σ_D afin de récupérer le signal de synchronisation pour le système Σ_C , donc N_{DO} dans la figure 7.2 est supérieur ou égal à la somme de N_p et N_{C1} dans la figure 7.1. De plus, puisque le système chaotique n'est pas en fonction des entrées inconnues, une autre idée est de combiner le système Σ_C et le système Σ_D avec $\phi(z_1) \in \mathbb{R}^{N_\phi} \subset \mathbb{R}^{N_{D1}}$, qui est une fonction de faible amplitude d'une partie des états de Σ_D afin de ne pas casser le comportement chaotique de système Σ_C . Ces idées complémentaires nous donnent le schéma amélioré de la figure 7.2.

Dans ce schéma, nous supposons que l'émetteur est observable et qu'il

peut être décrit comme suit :

$$\begin{aligned} \Sigma_C : \left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = f_C(x, \phi(z_1)) \\ \dot{z} &= \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = f_D(z, \theta(x)) + \sum_{i=1}^{N_m} g_i(z, \theta(x)) m_i \end{aligned} \right. \\ \Sigma_D : \left\{ \begin{aligned} &= \begin{bmatrix} f_{D_1}(z, \theta(x)) \\ f_{D_2}(z, \theta(x)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_m} g_{i_1}(z, \theta(x)) m_i \\ \sum_{i=1}^{N_m} g_{i_2}(z, \theta(x)) m_i \end{bmatrix} \\ y_D &= h_D(z) \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (7.1)$$

où $x = (x_1^T, x_2^T)^T \in \mathbb{R}^{N_C}$, $z = (z_1^T, z_2^T)^T \in \mathbb{R}^{N_D}$ sont les vecteurs d'état du système chaotique Σ_C et du système dynamique Σ_D . Ceux-ci peuvent être divisés comme suit : $x_1 \in \mathbb{R}^{N_{C1}}$ et $x_2 \in \mathbb{R}^{N_{C2}}$, $z_1 \in \mathbb{R}^{N_{D1}}$ et $z_2 \in \mathbb{R}^{N_{D2}}$, où x_1 et z_1 sont les états qui peuvent être récupérés à partir de y_D à l'aide d'un observateur, et ceci ne dépend pas de m . Et x_2 et z_2 représentent respectivement l'espace complémentaire de x et z . $m = [m_1 \ \cdots \ m_{N_m}]^T \in \mathbb{R}^{N_m}$ sont les entrées inconnues, et $\phi(z_1) \in \mathbb{R}^{N_\phi} \subset \mathbb{R}^{N_{D1}}$, $\theta(x) \in \mathbb{R}^{N_\theta} \subset \mathbb{R}^{N_C}$. De plus, les fonctions $f_C : \mathbb{R}^{N_C} \times \mathbb{R}^{N_\phi} \rightarrow \mathbb{R}^{N_C}$, $f_{D_1} : \mathbb{R}^{N_D} \times \mathbb{R}^{N_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{N_{D1}}$, $f_{D_2} : \mathbb{R}^{N_D} \times \mathbb{R}^{N_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{N_{D2}}$, $g_{i_1} \in \mathbb{R}^{N_D} \times \mathbb{R}^{N_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{N_{D1}}$, $g_{i_2} \in \mathbb{R}^{N_D} \times \mathbb{R}^{N_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{N_{D2}}$ et $h_D : \mathbb{R}^{N_D} \times \mathbb{R}^{N_{D0}}$ sont analytiques.

Dans ce schéma, puisque x_1 et z_1 peuvent être retrouvés directement à partir de y_D sans connaître m , pour le système Σ_C , il est possible d'estimer tous les états avec la connaissance de x_1 et de l'entrée connue z_1 . Ensuite, pour le système Σ_D , et avec la connaissance de y_D et de l'entrée connue $\theta(x)$, nous pouvons aussi récupérer tous les états et toutes entrées inconnues m . Ainsi, afin de pouvoir reconstruire toutes les entrées inconnues du (7.1), nous supposons que, pour le système (7.1), le problème d'inversion à gauche doit être résolu.

Remarque 7.3.1 *Cette hypothèse peut être garantie par un choix approprié des fonctions : f_D , f_C et g . De plus, nous pouvons déterminer x_1 à partir du choix des sorties du sous système Σ_C . En [125], un algorithme d'inversion à gauche a été proposé et des conditions suffisantes d'inversion à gauche ont été exhibés.*

7.4 Synthèse d'Observateur

Comme mentionné précédemment, nous considérons la réalisation du récepteur comme un problème de conception d'observateur à entrées inconnues basé sur la théorie de l'inversion à gauche. Alors, nous pouvons concevoir un observateur à mode glissant étape par étape comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_C : \quad \dot{\hat{x}} &= E_x \lambda_3 \text{sign}(\tilde{x} - \hat{x}) \\ \hat{\Sigma}_{D_1} : \quad \dot{\hat{z}}_1 &= E_{D_1} \lambda_1 \text{sign}(\tilde{z}_1 - \hat{z}_1) \\ \hat{\Sigma}_{D_2} : \quad \dot{\hat{z}}_2 &= E_{D_2} \lambda_2 \text{sign}(\tilde{z}_2 - \hat{z}_2) \end{aligned} \quad (7.2)$$

où

$$\lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_{i,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{i,N_{Di}} \end{bmatrix}, i \in [1, 2]$$

$$\lambda_3 = \begin{bmatrix} \lambda_{3,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{3,N_C} \end{bmatrix}$$

et

$$\text{sign}(\tilde{z}_i - \hat{z}_i) = \begin{bmatrix} \text{sign}(\tilde{z}_{i,1} - \hat{z}_{i,1}) \\ \vdots \\ \text{sign}(\tilde{z}_{i,N_{Di}} - \hat{z}_{i,N_{Di}}) \end{bmatrix}, i \in [1, 2]$$

$$\text{sign}(\tilde{x} - \hat{x}) = \begin{bmatrix} \text{sign}(\tilde{x}_1 - \hat{x}_1) \\ \vdots \\ \text{sign}(\tilde{x}_{N_C} - \hat{x}_{N_C}) \end{bmatrix}$$

$$E_x = \begin{bmatrix} E_{x_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & E_{x_{N_C}} \end{bmatrix},$$

où pour $i \in [1, N_C]$,

$$E_{x_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } E_{x_{i-1}} = 1 \text{ et } \tilde{x}_{i-1} = \hat{x}_{i-1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$E_{D_i} = \begin{bmatrix} E_{D_{i,1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & E_{D_{i,N_{Di}}} \end{bmatrix},$$

où pour $i \in [1, 2], j \in [1, N_{Di}]$,

$$E_{D_{i,j}} = \begin{cases} 1 & \text{si } E_{D_{i,j-1}} = 1 \text{ et } \tilde{z}_{i,j-1} - \hat{z}_{i,j-1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les $\tilde{z}_{1,j}$ sont les solutions explicites ou implicites de l'équation suivante :

$$\tilde{z}_{1,j} = \left\{ \begin{array}{l} z_{1,j} \mid f_{D_{1,j}}(\tilde{z}_{1,1}, \dots, \tilde{z}_{1,j-1}, z_{1,j}, \dots, z_{1,N_{D1}}, z_2, x) \\ + \sum_{i=1}^{N_m} g_{i,1,j}(\tilde{z}_{1,1}, \dots, \tilde{z}_{1,j-1}, z_{1,j}, \dots, z_{1,N_{D1}}, z_2, x) m_i \\ = E_{D_{1,j}} \lambda_{1,j} \text{sign}(\tilde{z}_{1,j} - \hat{z}_{1,j}), j \in [1, N_{D1}] \end{array} \right\}, \quad (7.3)$$

et les même solutions pour \tilde{x}_j et $\tilde{z}_{2,j}$:

$$\tilde{x}_j = \left\{ \begin{array}{l} x_j \mid f_C(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{j-1}, x_j, \dots, x_{N_C}, \tilde{z}_1) \\ = E_{x_j} \lambda_{3,j} \text{sign}(\tilde{x}_j - \hat{x}_j), j \in [1, N_C] \end{array} \right\} \quad (7.4)$$

$$\tilde{z}_{2,j} = \left\{ \begin{array}{l} z_{2,j} \mid f_{D_{2,j}}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_{2,1}, \dots, \tilde{z}_{2,j-1}, z_{2,j}, \dots, z_{2,N_{D_2}}, x) \\ + \sum_{i=1}^{N_m} g_{i_{2,j}}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_{2,1}, \dots, \tilde{z}_{2,j-1}, z_{2,j}, \dots, z_{2,N_{D_2}}, x) m_i \\ = E_{D_{2,j}} \lambda_{2,j} \text{sign}(\tilde{z}_{2,j} - \hat{z}_{2,j}), \quad j \in [1, N_{D_2}] \end{array} \right\}. \quad (7.5)$$

Preuve. Nous posons $e_{z_{i,j}} = z_{i,j} - \hat{z}_{i,j}$, $i \in [1, 2]$, $j \in [1, N_{D_i}]$, et $e_{x,k} = x_k - \hat{x}_k$, $k \in [1, N_C]$.

Première partie :

Supposons que dans la $(j-1)^{\text{ème}}$ étape nous obtenons

$$\tilde{z}_{1,j-1} = z_{1,j-1}$$

et $E_{D_{1,j}} = 1$.

Alors, pour la $j^{\text{ème}}$ étape nous avons :

$$\dot{e}_{z_{1,j}} = \left[\begin{array}{l} f_{D_{1,j}}(z, x) + \sum_{i=1}^{N_m} g_{i_{1,j}}(z, x) m_i \\ - E_{D_{1,j}} \lambda_{1,j} \text{sign}(\tilde{z}_{1,j} - \hat{z}_{1,j}) \end{array} \right]$$

Nous choisissons une fonction de Lyapunov comme suit

$$V_{1,j} = \frac{1}{2} e_{z_{1,j}}^2$$

Grâce à $E_{D_{1,j}} = 1$, nous avons

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1,j} &= \dot{e}_{z_{1,j}} e_{z_{1,j}} \\ &= e_{z_{1,j}} \left[\begin{array}{l} f_{D_{1,j}}(z, x) + \sum_{i=1}^{N_m} g_{i_{1,j}}(z, x) m_i \\ - \lambda_{1,j} \text{sign}(e_{z_{1,j}}) \end{array} \right] \end{aligned}$$

Donc si $\lambda_{1,j} > \left| f_{D_{1,j}}(z, x) + \sum_{i=1}^{N_m} g_{i_{1,j}}(z, x) m_i \right|_{\max}$, $\dot{V}_{1,j} < 0$, alors il existe $t_{1,j}$, tel que si $t > t_{1,j} > t_{1,j-1}$, $e_{z_{1,j}} = \dot{e}_{z_{1,j}} = 0$, et nous obtenons

$$f_{D_{1,j}}(z, x) + \sum_{i=1}^{N_m} g_{i_{1,j}}(z, x) m_i = \lambda_{1,j} \text{sign}(e_{z_{1,j}}) \quad (7.6)$$

L'équation (7.6) est identique à (7.3) et nous obtenons la solution suivante :

$$\tilde{z}_{1,j} = z_{1,j}$$

et d'après la définition de E_{D_1} , nous posons $E_{D_{1,j+1}} = 1$.

Donc nous pouvons récupérer les composantes du vecteur z_1 étape par étape. De plus, si nous choisissons bien les fonctions $f_{D_1}(z, x)$ et $g_{i_1}(z, x)$, nous pouvons reconstruire les composantes du vecteur x_1 également à partir de l'équation (7.6).

Deuxième partie :

Nous avons la dynamique d'erreur d'observation sur x qui est de la forme suivante :

$$\dot{e}_{x_j} = f_{C_j}(x, z_1) - E_{x_j} \lambda_{2,j} \text{sign}(\tilde{x}_j - \hat{x}_j), \quad j \in [1, N_C]$$

Ainsi si $\lambda_{2,j} > |f_{C_j}(x, z_1)|_{\max}$, il existe $t_{2,j}$, tel que si $t > t_{2,j} > t_{2,j-1}$, $e_{x_j} = \dot{e}_{x_j} = 0$, et nous obtenons :

$$f_{C_j}(x, z_1) = \lambda_{2,j} \text{sign}(\tilde{x}_j - \hat{x}_j) \quad (7.7)$$

Par analogie avec la première partie et en référence avec l'équation (7.4), nous avons :

$$\tilde{x}_j = x_j$$

et $E_{x_{j+1}} = 1$.

Dernière partie :

Nous avons la dynamique d'erreur d'observation de z_2 qui est de la forme suivante :

$$\dot{e}_{z_{2,j}} = \begin{bmatrix} f_{D_{2,j}}(z, x) + \sum_{i=1}^{N_m} g_{i_{2,j}}(z, x) m_i \\ -E_{D_{2,j}} \lambda_{3,j} \text{sign}(\tilde{z}_{2,j} - \hat{z}_{2,j}) \end{bmatrix}, \quad j \in [1, N_{D2}]$$

De la même façon, si $\lambda_{3,j} > \left| f_{D_{2,j}}(z, x) + \sum_{i=1}^{N_m} g_{i_{2,j}}(z, x) m_i \right|_{\max}$, il existe $t_{3,j}$, tel que si $t > t_{3,j} > t_{3,j-1}$, $e_{z_{2,j}} = \dot{e}_{z_{2,j}} = 0$, et nous obtenons :

$$f_{D_{2,j}}(z, x) + \sum_{i=1}^{N_m} g_{i_{2,j}}(z, x) m_i = \lambda_{3,j} \text{sign}(\tilde{z}_{2,j} - \hat{z}_{2,j}) \quad (7.8)$$

Avec l'équation (7.5) et les mêmes arguments que précédemment, nous trouvons :

$$\tilde{z}_{2,j} = z_{2,j}$$

et

$$E_{D_{2,j+1}} = 1$$

Ensuite, à partir des équations (7.7) et (7.8), nous pouvons reconstruire tous les messages inconnus, car nous avons récupéré tous les états du système (7.1). ■

7.5 Exemple

Nous utilisons le système du Chua et un système dynamique arbitraire pour mettre en application le schéma proposé, ceci afin de coder deux messages avec des entrées de grands amplitudes tout en garantissant que le système global reste chaotique.

Le circuit de Chua est donné par [34] :

$$\Sigma_C : \dot{x} = \begin{bmatrix} -\alpha (x_1 - x_2 - \bar{f}(x_1)) \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ -\beta x_2 - \gamma x_3 + \rho z_3 \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

où α , β , et γ sont trois constantes et $\bar{f}(x_1)$ est la caractéristique linéaire par morceaux de la diode de Chua, qui est donnée comme suit

$$\bar{f}(x_1) = bx_1 + \frac{1}{2} (a - b) (|x_1 + 1| - |x_1 - 1|)$$

où $a < b < 0$ sont deux constantes. Et ρ est une petite constante qui ne doit pas casser le comportement chaotique du système (7.9), z_3 est un des états du sous système suivant :

$$\Sigma_D : \dot{z} = \begin{bmatrix} -ez_1 + kx_1 \\ -\omega z_3 \\ -gz_3 + \omega z_2 + qx_1 \\ -lz_4 + z_3 + nx_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 m_1 \\ 0 \\ x_2 m_1 \\ x_3 m_2 \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

où e , k , ω , g , q , l et n sont des constantes, et x_1 , x_2 et x_3 sont les états

définis dans le système (7.9). Et m_1 , m_2 sont deux messages confidentiels.

A partir du système (7.9), il est évident que nous avons besoin seulement d'une sortie pour observer tous ses états, ainsi nous n'avons besoin que de trois sorties du système dynamique pour réaliser les deux tâches de la synchronisation et du chiffrement. En conséquence, nous choisissons $y = (z_1 \ z_2 \ z_4)^T$.

L'observateur à mode glissant est conçu ici afin de reconstruire tous les états et tous les messages confidentiels

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_C : & \begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = E_2 \kappa_1 \text{sign}(\tilde{x}_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = E_3 \kappa_2 \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2) \end{cases} \\ \hat{\Sigma}_D : & \begin{cases} \dot{\hat{z}}_1 = \lambda_2 \text{sign}(z_1 - \hat{z}_1) \\ \dot{\hat{z}}_2 = \lambda_1 \text{sign}(z_2 - \hat{z}_2) \\ \dot{\hat{z}}_3 = E_1 \lambda_3 \text{sign}(\tilde{z}_3 - \hat{z}_3) \\ \dot{\hat{z}}_4 = E_4 \lambda_4 \text{sign}(z_4 - \hat{z}_4) \end{cases} \end{aligned} \quad (7.11)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{z}_3 &= \frac{E_1 \lambda_1 \text{sign}(z_1 - \hat{z}_1)}{\omega} \\ \tilde{x}_1 &= \frac{\begin{bmatrix} \lambda_2 \text{sign}(z_1 - \hat{z}_1) + ez_1 - g\tilde{z}_3 + wz_2 \\ -E_1 \lambda_3 \text{sign}(\tilde{z}_3 - \hat{z}_3) \end{bmatrix}}{k - q} \\ \tilde{x}_2 &= \frac{E_2 \kappa_1 \text{sign}(e_1 \tilde{x}_1 - \hat{x}_1)}{\alpha} + \tilde{x}_1 - \bar{f}(\tilde{x}_1) \\ \tilde{x}_3 &= \hat{x}_3 + E_3 \kappa_1 \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2) - \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \end{aligned}$$

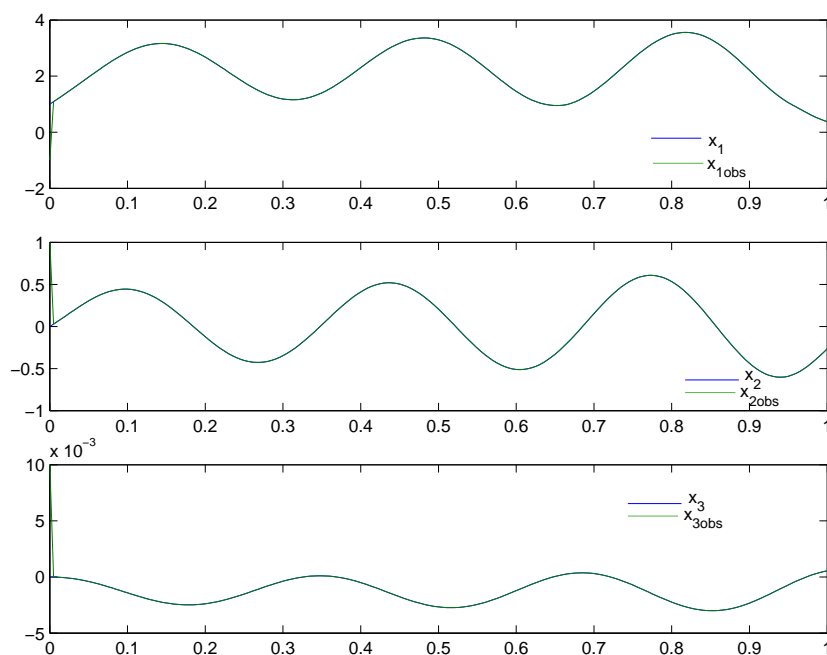


FIG. 7.3 – Résultat des états du système chaotique

avec

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \begin{cases} 1 & \text{si } z_2 = \hat{z}_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
 E_2 &= \begin{cases} 1 & \text{si } E_1 = 1 \text{ et } \tilde{x}_1 = \hat{x}_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
 E_3 &= \begin{cases} 1 & \text{si } E_2 = 1 \text{ et } \tilde{x}_2 = \hat{x}_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
 E_4 &= \begin{cases} 1 & \text{si } E_3 = 1 \text{ et } z_4 = \hat{z}_4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Alors nous pouvons obtenir

$$\begin{aligned}
 \tilde{m}_1 &= \frac{\lambda_2 \text{sign}(z_1 - \hat{z}_1) - k\tilde{x}_1 + ez_1}{\tilde{x}_2} \\
 \tilde{m}_2 &= \frac{E_4 \lambda_4 \text{sign}(z_4 - \hat{z}_4) + lz_4 - \tilde{z}_3 - n\tilde{x}_2}{\tilde{x}_3}
 \end{aligned}$$

La Fig. 7.3 donne les états du sous système (7.9) et ceux de l'observateur, la Fig. 7.4 montre les états du sous système (7.10) et ceux de l'observateur et la Fig. 7.5 illustre les messages originaux et les messages récupérés. Nous pouvons voir que les états du sous système (7.9) et sous système (7.10) convergent ceux de l'observateur en temps fini. Après les convergences des états, les messages confidentiels peuvent être reconstruits en temps fini.

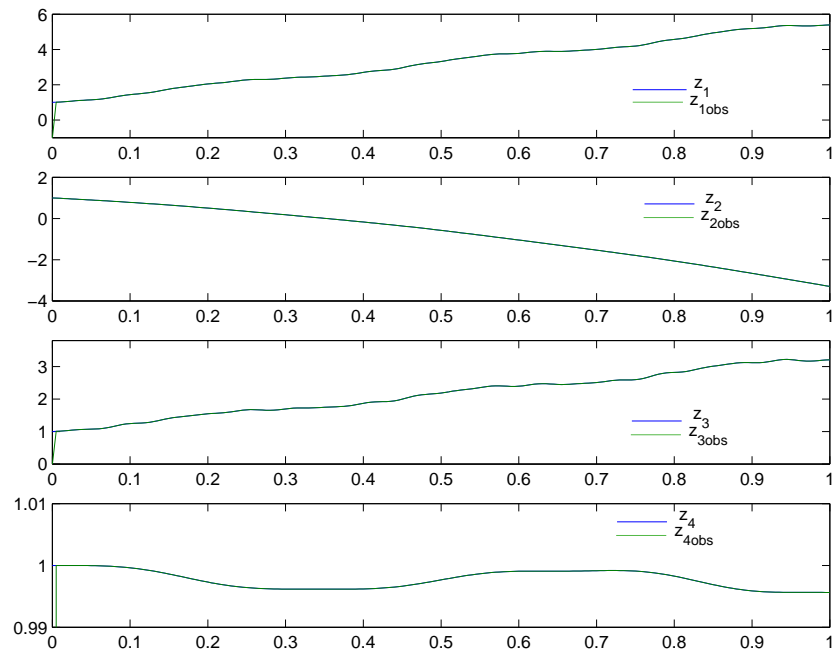


FIG. 7.4 – Résultat des états du système dynamique

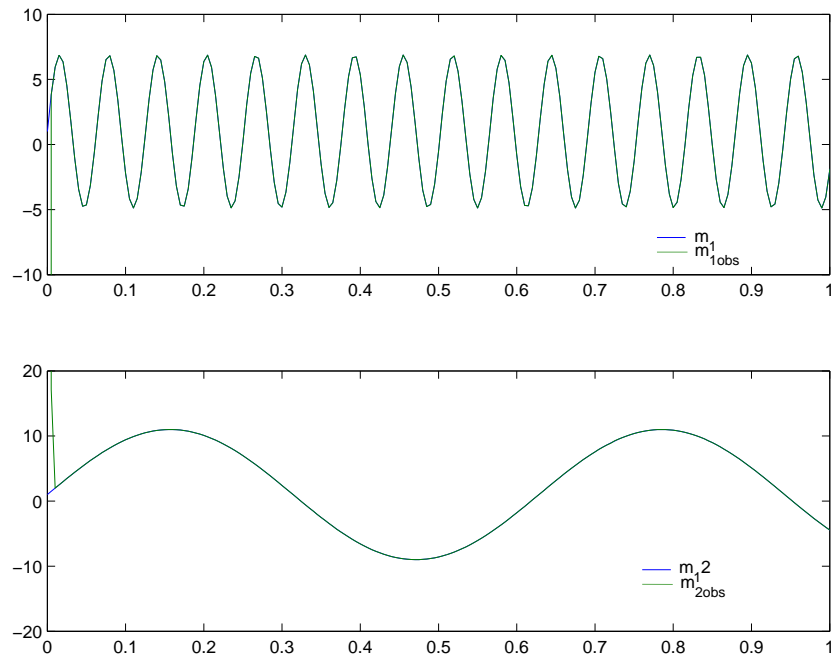


FIG. 7.5 – Résultat des messages confidentiels

7.6 Conclusion

Dans les schémas traditionnels, l'amplitude du message ne peut pas être très grande par rapport à celle du signal chaotique. Pour contourner cet inconvénient, nous avons exposé dans ce chapitre un nouveau schéma qui utilise un système chaotique avec des entrées multiples et des sorties multiples. La transmission de données a été simulée avec la méthode proposée, ceci illustre parfaitement la faisabilité de cette méthode.

Ci-dessous, nous faisons une comparaison entre des méthodes rencontrées dans la littérature et des méthodes proposées dans ce mémoire :

Méthods\Aspects	Simplicité	Robustess	Amplitude
Approche par addition	+ +	- -	- -
Approche par commutation	+ +	- -	- -
Approche par modulation	+	-	- -
Approche à mono entrée avec des singularités	-	+	- -
<i>Approche à des entrées multiples avec des singularités</i>	- -	+ +	-
<i>Approche à des entrées multiples avec la dynamique des zéros et des singularités</i>	- - -	+ + +	-
<i>Approche à des entrées multiples pour l'augmentation de l'amplitude</i>	- - -	+ + +	+

et nous pouvons voir les intérêts des approches que nous avons proposées.

Conclusion et Perspectives

Conclusion

Les objectifs de ce travail étaient de faire, d'une part, une analyse d'une famille de formes normales d'observabilité dépendantes de la sorties, et d'autre part, de trouver un domaine d'application à ce type de systèmes.

La première partie de ce travail a concerné l'extension des "bonnes propriétés" d'observabilité des systèmes dits sous formes d'injection de sortie à une classe de systèmes plus large. Dans un premier temps, nous avons étudié la forme normale d'OLDS, dont la matrice "linéaire" était en fonction de sa sortie. Nous avons donné des conditions nécessaires et suffisantes qui nous permettent de déterminer tous les $\alpha_i(y)$, les éléments de la matrice "linéaire". Dans un deuxième temps, une généralisation de la forme normale d'OLDS aux systèmes possédant des sorties multiples a été étudiée. Nous avons utilisé la même méthode que celle employée pour la forme d'OLDS. Puisque généralement nous imposons que les sorties de la forme normale soient linéaires, mais pour le cas où les sorties étaient non linéaires, nous avons proposé une nouvelle forme normale pour les systèmes possédant des sorties multiples. Par la suite, pour le cas où des systèmes non linéaires qui ne peuvent pas être transformés en la forme normale d'OLDS, nous avons cherché la forme normale approximée quadratique, et ceci a entraîné l'étude de la forme d'OQDS. Tout d'abord, nous avons introduit les équations homologiques de l'équivalence quadratique modulo une injection de sortie pour les systèmes linéairement observables. Puis nous avons donné la classification des formes normales d'observabilité quadratiques. Ensuite, une réécriture des équations homologiques à l'aide d'une formulation matricielle nous a permis une caractérisation des formes normales d'observabilité sans avoir à résoudre les équations homologiques.

La deuxième partie de ce travail de thèse était d'appliquer le chaos à la transmission de données. Premièrement, nous avons expliqué les relations entre le chaos, les systèmes de transmission et la forme normale. Ensuite, des schémas de cryptage basés sur le chaos ont été rappelés. Par la suite, un nouveau schéma de la transmission chaotique à l'aide de système à des entrées multiples a été présentée afin de surmonter l'inconvénient que nous avons rencontré lorsque nous allons généraliser les systèmes chaotiques possédant mono-entrée au cas à des entrées multiples. Après cela, nous avons discuté la synchronisation chaotique basée sur la stabilité d'une dynamique des zéros. Et finalement, une dernière approche avec des sorties multiples de la transmission de données basée sur la synchronisation de système chaotique a été proposée, celle-ci nous a permis d'augmenter l'amplitude des messages confidentiels par rapport au signal transmis.

Il est à noter que les formes normales d'observabilité, l'analyse d'observabilité, le problème d'inversion à gauche et la synthèse d'observateur qui sont traités dans ce mémoire s'appliquent aussi dans bien d'autres domaines que la cryptographie. Nous faisons référence dans ce mémoire à la cryptographie,

car c'est ce qui nous a motivé durant ces deux années et demie de thèse, mais il faut avoir conscience de la généralité des méthodes proposées.

Perspectives

Parmi les perspectives immédiates de ce travail, nous pouvons citer :

- Pour la forme normale d'OLDS, l'étude de forme plus générale avec des sorties non linéaires. Ces formes ressembleront à la forme traitée en [90], mais ici avec une matrice qui est en fonction de la sortie.
- La résolution du problème ouvert présenté dans le Chapitre 4. C'est à dire : trouver les conditions nécessaires et suffisantes qui garantissent la transformation de (4.1) en (4.2). De même la généralisation de la forme normale d'OQDS aux systèmes possédant des sorties multiples.
- Pour la forme normale d'OLDSM, il est nécessaire d'étudier s'il existe une forme plus générale dont les éléments dans la matrice linéaire ne sont plus de la forme triangulaire, mais en fonction de toutes les sorties.
- Il est aussi très intéressant d'étudier les formes normales présentées dans ce mémoire pour les système en temps discret et sous échantillonnage.
- Dans le domaine de la transmission sécurisée de données, il est très important de considérer les bruits et les distorsions du canal, et d'étudier leurs effets sur la synchronisation
- Ensuite, l'étude et la gestion de l'influence des utilisateurs multiples et des chemins multiples d'un système de cryptage doivent être faites. Nous pensons faire cette extension grâce à des résultats récents en communication.
- L'analyse des effets de l'échantillonnage des formes normales doit aussi être faite, ceci pour développer des observateurs échantillonné pour des systèmes en temps continue, mais aussi pour synthetiser des observateurs pour des classes de système hybride.

Bibliographie

- [1] K. T. Alligood, T. D. Sauer et A. J. Yorke, “Chaos : An introduction to dynamical systems”, Springer-verlag, New York, 1996.
- [2] A. D. Angeli, R. Genesio et A. Tesi, “Dead-beat chaos synchronization in discrete-time systems”, IEEE Trans. Circ. Syst. I, 42(1), pp. 54-56, 1995.
- [3] S. P. Banks, “A note on nonlinear observers”, Int. J. of Control, V. 34, pp. 185-190, 1981.
- [4] J. P. Barbot, D. Boutat et T. Floquet, “A new observation algorithm for nonlinear system with unknown inputs”, CDC-ECC05, serville, Dec 2005.
- [5] J-P. Barbot, S. Monaco et D. Normand-Cyrot, “Quadratic forms and approximate feedback linearization in discrete time”, I.J.Control,(67), No 4, pp 567-586, 1997.
- [6] J. P. Barbot, M. Djemai et T. Boukhobza, “Sliding mode observers”, in Sliding mode control in engineering, W. Perruquetti and J-P Barbot (Eds), Control Engineering Series, M. Dekker, pp 103-130, 2002.
- [7] J. P. Barbot, “Application of linearizing laws to helicopter flight”, 12th IMACS World Congress on Scientific Computation, pp. 650-652, 1988.
- [8] J.P. Barbot, T. Boukhobza et M. Djemaï, “Sliding mode observer for triangular input form”, Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control, Kobe, Japan, December 1996.
- [9] G. Bartolini, A. Pisano et E. Usai, “First and second derivative estimation by sliding mode technique”, Int. J. of Signal processing, 4, pp 167-176, 2000.
- [10] F. Beritelli, E. D. Cola, L. Fortuna, etc, “Multilayer chaotic encryption for secure communications in packet switching networks”, IEEE Trans on communication, vol 30, no4, 1575-1582, 2000.
- [11] G. Besançon, “A viewpoint on observability and observer design for nonlinear system”, New directions in Nonlinear Observer Design, Eds H. Nijmeijer and T.I. Fossen, Lecture Notes in Control and Information Sciences 244, Springer,pp 1-22 1999.
- [12] G. Besançon, “Remarks on adaptive observers for nonlinear systems”, Systems & Control Letters, 2000.

- [13] G. Besançon and H. Hammouri, "On Uniform Observation of Non-Uniformly Observable Systems", *Systems and Control Letters*, vol. 29, No9, pp.9-19, 1996.
- [14] G. Besançon, G. Bornard et H. Hammouri, "Observer Synthesis for a Class of Nonlinear Control Systems", *European Journal of Control*, vol. 2, No3, pp.176-192, 1996.
- [15] G. Besançon, "High gain observation with disturbance attenuation and application to robust fault detection", *Automatica*, vol. 39, pp.1095-1102, 2003.
- [16] G. Besançon and Q. Zhang, "Further developments on nonlinear adaptive observers with application in fault detection", *IFAC World Congress, Barcelona, 2002*.
- [17] G. Besançon et al, "On adaptive observers for state affine systems", *Int J. Control*, vol.79, No6, pp581-91, 2006
- [18] D. Bestle et M. Zeitz, "Canonical form observer design for nonlinear time variable systems", *International J. Control*, Vo 38, pp 419-431 1983.
- [19] J. Birk et M. Zeitz, "Extended Luenberger observers for nonlinear multivariable systems", *Int. J. of Control*, V. 47, pp. 1823-1836, 1988.
- [20] G. Bornard, et H. Hammouri, "A high gain observer for a class of uniformly observable systems", *CDC, Brighton, The 30th*, 1991
- [21] T. Boukhobza, M. Djemai et J. P. Barbot, "Nonlinear sliding observer for systems in output and output derivative injection form", *Proceedings of IFAC World Congress, Vol. E*, pp. 299-305, 1996.
- [22] L. Boutat-Baddas, "Analyses des singularités d'observabilité et de détectabilité : applications à la synchronisation des circuits électroniques chaotiques", *Thèse de l'Université de Cergy-Pontoise* 19 Décembre 2002.
- [23] D. Boutat et J.P. Barbot, "Poincaré normal form for a class of driftless systems in a one dimensional submanifold neighborhood", *Mathematic of Control, Signals and Systems, Vol. 15*, pp. 256-274, 2002.
- [24] D. Boutat et J. P. Barbot, "Characteristic numbers and normal form for a class of driftless systems in a one-dimension submanifold neighborhood", *Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control*, Phoenix, USA, December 1999.
- [25] D. Boutat, G. Zheng, J.P. Barbot et H. Hammouri, "Normal form with output combinations". *Automatica* (soumis).
- [26] D. Boutat, G. Zheng, J.P. Barbot et H. Hammouri, "Observer error linearization multi-output depending". *IEEE CDC 2006, USA*.
- [27] L. Boutat-Baddas, J.P. Barbot et D. Boutat, "Observability bifurcation versus observing bifurcations", *Proc. of the 15 th IFAC*, 2002.
- [28] L. Boutat-Baddas, D. Boutat, J. P. Barbot et R. Tauleigne, "Quadratic Observability normal form", in *Proc. of IEEE CDC* (2001).

- [29] P. Brunovsky, "A classification of linear controllable systems", *Kybernetika* Vo 6, pp 173-188 1970.
- [30] K. Busawon, M. Farza et H. Hammouri, "Observer design for a special class of nonlinear systems", *Int. J. Control*, Vol 71, pp 405-418, 1998.
- [31] P. Celka, "Synchronization of chaotic systems through parameter adaptation", *IEEE int. Symp. of Circ. Syst.* pp. 692-695, 1995.
- [32] G. Chen et X. Dong, "From chaos to order : methodologies, perspectives and applications", World Scientific, Singapore, 1998.
- [33] G. Chen et T. Ueta, "Chaos in Circuits and systems", World Scientific, Singapore, 2002.
- [34] L. O. Chua, "Global unfolding of Chua's circuit", *IEICE Trans. Fundamentals*, 704-734, 1993.
- [35] S. Chabraoui, D. Boutat, L. Boutat-Baddas et J.P. Barbot, "Observability quadratic characteristic numbers", in *Proc. of IEEE CDC* (2001).
- [36] L. O. Chua, T. Yang et al, "Adaptive synchronization of chua's oscillators" A, *Int'l J. bifur. Chaos*, vol 6. pp. 189-201, 1996.
- [37] M. Darouach, "On the Novel Approach to the Design of Unknown Input Observers", *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. 39, pp. 698-699, 1994.
- [38] M. Darouach, M. Zasadzinski et S.J. Xu, "Full-order Observers for linear systems with unknown inputs". *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 39, N. 3, pp 606-609, 1994.
- [39] H. Dedieu, M. P. Kennedy et M. Hasler, "Chaos shift keying : modulation and demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing Chua's circuits", *IEEE Trans. Circ. Syst. II*, 40(10), pp. 634-643, 1993.
- [40] H. Dedieu et M. J. Ogorzalek, "Identifiability and identification of chaotic systems based on adaptive synchronization", *IEEE Trans. Circ. Syst. I*, vol 44, No 10, 1997.
- [41] R. L. Devaney, "A first course in chaotic dynamical systems", Addison-Wesley, New York, 1992.
- [42] S. Diop, J.W. Grizzle, P.E. Morral and S. Ibrir, "On numerical observers : Application to a simple academic adaptive control example", in *Proc. of European Control Conference*, 1997.
- [43] S. Diop, J.W. Grizzle, P.E. Moraal et A. Stefanopoulou, "Interpolation and numerical differentiation for observer design", In *Proc. ACC'94*, pp. 1329-1333, 1994.
- [44] M. Djemaï, J. Hernandez et J-P. Barbot, "Nonlinear control with flux observer for a singularly perturbed induction motor", *Proceedings of the 32th IEEE Conference on Decision and Control*, San Antonio, USA, pp. 3391-3396, 1993.
- [45] E. C. Douglas, "Internetworking with TCP/IP : principles, protocols, architecture", Prentice Hall Int., New Jersey, USA, 1992.

- [46] R. F. Douglas, "Chaotic digital encoding : an approach to secure communication", IEEE Trans on circuits and systems, part II, vol 40, No. 10, 660-666, 1993.
- [47] S. Drakunov et V. Utkin, "Sliding mode observer : Tutorial", in Proc. of the 3th IEEE CDC, 1995.
- [48] F. Esfandiari et H. K. Khalil, "Observed-based control of fully linearizable nonlinear systems", IEEE Conference on Decision and Control, pp. 84-89, Florida, USA, December, 1989.
- [49] U. Feldmanne, M. Hasler et W. Schwarz, "Communication by chaotic signals : The inverse system approach", Int. J. Circuit Theory and Applications 24. 551-576, 1996.
- [50] A. F. Fillipov, "Differential equations with discontinuous right-hand side", Ed. Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [51] M. Fliess, "Generalized Controller Canonical Forms for Linear and Nonlinear Dynamics", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 35, No 9, pp. 994-1000, 1990.
- [52] M. Fliess et J. Rudolph, "Corps de Hardy et observateur asymptotiques locaux pour systèmes différentiellements plats", Traitement du Signal/Signal Processing, pp. 1-7, C. R. Acad. Sci. 1996.
- [53] M. Fliess, J. Levine, P. Martin et P. Rouchon, "Flatness and defect of non-linear systems : Introductory theory and examples", International Journal on Control, Vol. 61, No 6, pp. 1327-1361, 1995.
- [54] T. Floquet et J.P. Barbot, "A sliding mode approach of unknown input observers for linear systems", 43rd IEEE CDC, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, December 14-17, 2004.
- [55] T. Floquet, J.P. Barbot, "A canonical form for the design of unknown input sliding mode observers", dans Advances in Variable Structure and Sliding Mode Control, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 334, C. Edwards, E. Fossas Colet, L. Fridman, (Eds.), Springer Edition, 2006.
- [56] T. Floquet, W. Perruquetti et J.P. Barbot, "Sliding mode stabilization of the angular velocity of a rigid body", Proceedings of the MTNS, Perpignan, France, 2000.
- [57] T. Floquet, J.P. Barbot, W. Perruquetti, "Tests expérimentaux d'une commande par modes glissants d'ordre deux", APII-JESA, Vol. 36, No 5, 2002.
- [58] T. Floquet, J.P. Barbot et W. Perruquetti, "Second order sliding mode control for induction motor", Proceedings of the 39th Conference on Decision and Control, Sydney, Australia, 2000.
- [59] T. Floquet, W. Perruquetti et J.P. Barbot, "Angular velocity stabilization of a rigid body via VSS control", Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 122, December 2000.

- [60] L. Fridman et A. Levant, "Sliding modes of higher order as a natural phenomenon in control theory. In Robust control via variable structure and Lyapunov techniques", Lecture Notes in control and Information Science 217. F. Garofalo, L. Glielmo Ed. Springer Verlag London, pp. 107-133, 1996.
- [61] J-P. Gauthier and G. Bornard, "Observability for any $u(t)$ of a class of bilinear systems", IEEE TAC Vo 26, pp 922-926 1981.
- [62] J. P. Gauthier, H. Hammouri et I. Kupka, "Observers for nonlinear systems", CDC, Brighton, England, The 30th, pp. 1483-1489, 1991
- [63] J. P. Gauthier, H. Hammouri and S. Othman, "A simple observer for nonlinear systems : Application to biocreators", TAC, Vol. 37, No. 6, pp. 875-880, June, 1992.
- [64] J. P. Gauthier et I. Kupka, "Deterministic Observation Theory and Applications", Cambridge University Press, 2001.
- [65] A. Glumineau, C.H. Moog, et F. Plestan, "New algebra-geometric conditions for the linearization by input-output injection", IEEE Transactions on Automatic Control, AC-41(84) :598-603, Avril 1996.
- [66] G. Gu, A. Sparks et W. Kang, "Bifurcation analysis and control for model via the projection method", In Proc of 1998, ACC, pp 3617-3621, 1998.
- [67] Y. Guan et M. Saif, "A novel approach to the design of unknown input observers", IEEE T. A. C, vol 36, pp 632-635, 1991.
- [68] M. Guay, "Observer linearization by output diffeomorphism and output-dependent time-scale transformations", NOLCOS'01 Saint Petersburg, Russia , pp 1443-1446 2001.
- [69] H. Hammouri and J. P. Gautier, "Bilinearization up to output injection", SCL, Vol. 11, pp. 139-150, 1988.
- [70] H. Hammouri et J. De Leon Morales, "Observer synthesis for state-affine systems", In Proc. of IEEE CDC 90, 1990
- [71] H. Hammouri et J.P. Gautier, "Bilinearization up to the output injection ", System and Control Letters, 11 , pp 139-149 1988.
- [72] B. Hamzi, J-P. Barbot, S. Monaco et D. Normand-Cyrot, "Normal Forms versus Naimark-Sacker Bifurcation Control", In Proc of the 5th IFAC Symposium, NOLCOS01, Saint-Petersburg, Russia, pp 144-149, 2001.
- [73] W. Hahn, "Stability of Motion", Springer-Verlog, New York, 1967.
- [74] J. Hauser et Z. Xu, "An approximate Frobenius theorem", in Proc of IFAC World Congress (Sydney), Vol 8, pp 43-46, 1993.
- [75] Z. He, E. Li et L. Yang, "A robust digital secure communication scheme based on sporadic coupling chaos synchronization", IEEE Trans. Circ. Syst. I, 47(3), pp. 397-403, 2000.

- [76] G. Heidari-Bateni et C. C. McGillem, "A chaotic direct-sequence spread-spectrum communication system, IEEE Trans on communications", vol 42, 1524-1527, 1994.
- [77] G. Heidari-Bateni, C. C. McGillem et M. F. Tenorio, "A novel multiple address digital communication system using chaotic signals", ICC'92, 1232-1236, 1992.
- [78] R. C. Hilborn, "Chaos and nonlinear dynamics : An introduction for scientists and engineers", Oxford University Press, New York, 2000.
- [79] M. Hou, K. Busawon et M. Saif, "Observer design based on triangular form generated by injective map", IEEE Trans. Automat. Control, 45, pp 1350-1355, 2000.
- [80] A. Isidori, "Nonlinear control systems", 2nd edition, Berlin : Springer-Verlag,(1989).
- [81] M. Itoh, T. Yang et L. O. Chua, "Expermental study of impulsive synchronization of chaotic and hyperchaotic circuits", Int. J. Bifu. Chaos, 9(1), pp. 1393-1429, 1999.
- [82] J. K. John et R. E. Amritkor, "Synchronization of feedback and adaptive control", Int'l J. Bif. Chaos, vol 4, pp. 1687-1695, 1994.
- [83] R.E. Kalman et R. Bucy, "New results in linear filtering and prediction theory", Trans. ASME, J. Basic Engineering, vol.83, pp. 95-108, 1961
- [84] R.E. Kalman, "A new approche to linear filtering and prediction problems", Trans. ASME, J.Basic Engineering, vol.82, pp. 34-45, 1960
- [85] H. Kalile, "Nonlinear system", 2nd edition, New Jersey :Prentice Hall,1996.
- [86] W. Kang et A.J. Krener, "Extended quadratic controller normal form and dynamic state feedback linearization of non linear systems", SIAM J. Control and Optimization, Vol 30, No 6, pp 1319-1337, 1992.
- [87] W. Kang, "Moving Horizon Numerical Observers of Nonlinear Control Systems", IEEE Trans. on Automat. Contr., Vol. 51, No. 2, pp. 344-350, 2006.
- [88] W. Kang, "Bifurcation and normal form of nonlinear control system : Part I and II", SIAM J. Control and Optimization, Vol 36, pp 193-232, 1998.
- [89] W. Kang, "Bifurcation control via state feedbak for systems with a singl uncontrollable mode", SIAM J. Control and Optimization, Vol 38, pp 1428-1452, 2000.
- [90] N. Kazantzis et C. Kravaris, "Nonlinear observer design using Lyapunov's auxiliary theorem", in Systems & Control Letters, Vo 34, (1998) pp. 241-247 1998.
- [91] H. Keller, "Nonlinear Observer design by transformation into a generalized observer canonical form", Int. J. of Control, Vol 46, pp 1915-1930, 1987.

- [92] M. P. Kennedy, R. Rovati et G. Setti, "Chaotic electronics in telecommunications", CRC Press, 2000.
- [93] A. Khadra, X. Liu et X. Shen, "Application of impulsive synchronization to communication", IEEE Trans. Circ. Syst. I, vol 50, no 3, 2003.
- [94] H.K Khalil, "High-gain observers in nonlinear feedback control", In H. Nijmeijer and T.I. Fossen editors, New directions in nonlinear observer design, Lecture Notes in Control and Information Sciences 244, Springer, pp 249-268, 1999.
- [95] G. Kolumbán, M. P. Kennedy et L. O. Chua, "The role of synchronization in digital communications using chaos-Part I : fundamentals of digital communications", IEEE Trans on circuits and systems, part I, vol 44, No, 10, 927-936, 1997.
- [96] G. Kolumbán, M. P. Kennedy et L. O. Chua, "The role of synchronization in digital communications using chaos-Part II : Chaotic modulation and chaotic synchronization", IEEE Trans on circuits and systems, part I, vol 45, No, 11, 1129-1140, 1998.
- [97] G. Kolumban, G. Kis et al, "M-DCSK : A robust modulation scheme for chaotic communications" F, IEICE, E81-A(9), pp. 1798-1802, 1998.
- [98] L. Kosarev et U. Parlitz, "Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems", Phys. Rev. Lett. 76(aa), pp. 1816-1819, 1996.
- [99] L. Kovarev, K. S. Eckert, L. O. Chua et U. Parlitz, "Experimental demonstration of secure communications via chaotic synchronizaton", Int. J. Bifurcation and Chaos 2, 709-713, 1992.
- [100] A. K. Kozlov, V. D. Shalfeev et L. O. Chua, "Exact synchronization of mismatched chaotic systems", Int'l J. Bifu. Chaos, vol 6, pp. 569-580, 1996.
- [101] A. Krener et A. Isidori, "Linearization by output injection and nonlinear observer", Systems & Control Letters, Vo 3, (1983) pp. 47-52.
- [102] A. Krener et W. Respondek, "Nonlinear observer with linearizable error dynamics", SIAM J. Control and Optimization, Vol 30, No 6, (1985) pp. 197-216.
- [103] A.J. Krener, "Feedback Linearization Mathematical Control Theory", In J-Bailleul and J-C. Willems Eds, pp. 66-98, Math. Control Theory, Springer, 1998.
- [104] A.J. Krener et L. Li, "Normal forms and bifurcations of discrete time nonlinear control systems", SIAM J. Cont. and Opt. Vol 40, pp 1697-1723, 2002.
- [105] A.J. Krener et M.Q. Xiao, "Observers for linearly unobservable nonlinear systems", Systems & Control letters, Vol. 46, pp. 281-288, 2002.
- [106] A.J. Krener, M. Hubbard, S. Karahan, A. Phelps and B. Maag, "Poincaré linearization method applied to the design of nonlinear compensators", in Algebraic Computing in control, G. Jacob and F. Lamnabhi-lagarrigue (Eds), Springer-Verlag, 1991.

- [107] A. Krener et M. Q. Xiao, "Nonlinear observer design in the Siegel domain through coordinate changes", in Proc of the 5th IFAC Symposium, NOLCOS01, Saint-Petersburg, Russia, (2001) pp. 557-562.
- [108] A. J. Krener, "Approximate linearization by state feedback and coordinate change", Systems & Control Letters, VI. 5, pp. 181-185, 1984.
- [109] F. C. M. Lau et C. K. Tse, "Chaos-based digital communication systems : Operating principles, analysis methods and performance evaluation", Springer, 2003.
- [110] A. Levant, "Robust exact differentiation via sliding mode technique", Automatica, vol 34, no. 3, pp. 379-384, 1998.
- [111] W. Liu et G. Chen, "A new chaotic system and its generation", Int'l J. Bifur. Chaos, vol 13, no. 1 pp. 261-267, 2003.
- [112] D. Luenberger, "An introduction to observers", in IEEE Transactions on Automatic Control 16 (6), (1971) pp. 596-602.
- [113] J. Moreno, "Unknown Input Observers for SISO nonlinear systems", Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control Sydney, Australia December, 2000
- [114] O. Morgul, E. Solak et M. Akgul, "Observer based chaotic message transmission", Int'l J. bifu. Chaos, vol 13, No 4, p. 1003-1007, 2003.
- [115] T. Mullin, "The nature of chaos", Oxford University Press, New York, 1993.
- [116] H. Nijmeijer et I. M. Y. Mareels, "An observer looks at synchronization", IEEE Trans. on Circuits and Systems-1 : Fundamental theory and Applications, Vol 44, No 10, pp 882-891, 1997.
- [117] H. Nijmeijer et A.J. Van Der Schaft, "Nonlinear Dynamical Control Systems", Springer (1996).
- [118] A. I. Panas, T Yang et L. O. Chua, "Experimental results of impulsive synchronization between two Chua's circuits", Int'l. J. Bifur. Chaos, vol 8, no 3, pp. 639-644, 1998.
- [119] U. Parlitz, L. O. Cua, L. Kocarev etc, "Transmission of digital signals by chaotic synchronization, International Journal of Bifurcation and Chaos", 2, 973-977, 1992.
- [120] W. Pasillas-Lepine et W. Respondek, "On geometry of control systems equivalent to canonical contact systems : regular points, singular points, and flatness", Decision and Control, Proceedings of the 39th IEEE Conference on , Vol.5 , pp. 5151 -5156, 2000.
- [121] L. M. Pecora et T. L. Carroll, "Driving systems with chaotic signals", Phys, Rev. A vol 44, pp. 2374-2383, 1991.
- [122] L. M. Pecora et T.L. Carroll, "Synchronisation in chaotic system", Phys. Rev. Lett., 64(11), pp. 1196-1199, 1990.
- [123] J. H. Peng, E. J. Ding, "Synchronization hyperchaos with a scalar transmitted signal", Phys. Rev. Lett., 76(6), pp. 904-907, 1996.

- [124] G. Pérez et H. A. Cerdeira, "Extracting messages masked by chaos", *Physical Review Letters* 74, 1970-1973, 1995.
- [125] W. Perruquetti et J.P. Barbot, "Sliding Mode Control in Engineering", M. Dekker, 2002.
- [126] W. Perruquetti, T. Floquet et P. Borne, "A note on sliding observer and controller for generalized canonical forms", *IEEE CDC98*, 1998.
- [127] R. L. Peterson, R. E. Ziemer et D. F. Borth, "Introduction to spread spectrum communications", Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- [128] A. Pikovsky, M. Rosenblum et J. Kurths, "Phase synchronization in regular and chaotic systems : A tutorial", *Int'l J. Bif. Chaos*, 10(10), pp. 2291-2306, 2000.
- [129] F. Plestan et A. Glumineau, "Linearization by generalized input output injection," *Syst. Contr. Letters*, 31, pp 115-128, 1997
- [130] H. Poincaré, "Solutions périodiques dans le voisinage d'un point d'équilibre-lunes sans quadrature", dans *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Gauthier-Villars : Paris, Vol. 1, p. 156-161, 1892.
- [131] H. Poincaré, "Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation", *Acta Mathematica*, Vol. 7, p. 259-280, 1885.
- [132] H. Poincaré, "Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste", Gauthier Villard, 1899 Réédition 1987, B.bibliothèque scientifique A. Blanchard.
- [133] G. Qi, S. Du, G. Chen et al, "On a four-dimensional chaotic system", *Chaos, Solitons and Fractals*, 23(2005).
- [134] L. P. Raymond, L. S. Donald et B. M. Laurence, "Theory of spread-spectrum communications- A Tutorial", *IEEE Trans on communications*, vol 30, no. 5, 855-884, 1982.
- [135] W. Respondek, "Right and left invertibility of nonlinear control systems", in *Nonlinear controllability and optimal control*, Dekker, New York, pp 133-176, 1990.
- [136] W. Respondek, A. Pogromsky et H. Nijmeijer, "Time scaling for observer design with linearization error dynamics", *Automatica*, 40, pp. 277-285, 2004.
- [137] W. Respondek, "Transforming nonholonomic control systems into the canonical contact form", *Decision and Control, Proceedings of the 40th IEEE Conference on* , Vol. 2, pp. 1781 -1786, 2001.
- [138] W. Respondek et I. Amadou Tall, "How many symmetries does admit a nonlinear single-input control system around an equilibrium?", *Decision and Control, Proceedings of the 40th IEEE Conference* , Vol. 2, pp 1795 -1800, 2001.
- [139] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky et J. Kurths, "Phase synchronization of chaotic oscillators", *Phys, Rev, Lett.* 76(11), pp. 1804-1807, 1996.

- [140] J. Rudolph et M. Zeitz, "A Block triangular nonlinear observer normal form", *Sys. and Cont. Letters*, Vol 23, 1994. *Measurement Control*, Vol 109, pp 245-252, 1987.
- [141] N. F. Rulkov, M. M. sushchik et L. S. Tsimring, "Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems", *Phys. Rev. E*, 51 pp. 980-994, 1995.
- [142] M. Sampei et K. Furuta, "On time scaling for nonlinear systems : application to linearization.", *IEEE, Transactions on Automatic Control* 3, pp. 199-216 1989.
- [143] H. Sira-Ramirez et M. Fliess, "An algebraic state estimation approach for the recovery of chaotically encrypted messages", *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 16(2), pp. 295-309 2006.
- [144] K. M. Short, "Steps toward unmasking secure communications", *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 4, 959-977, 1994.
- [145] J-J. Slotine, J.K. Hedrick et E.A. Misawa, "On sliding observer for nonlinear systems", *ASME J. Dyn. System*
- [146] J.J.E. Slotine, J.K. Hedrick et E.A Misawa, "Nonlinear state estimation using sliding observers", *Proc. of 25th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 332-339, Greece, 1986.
- [147] S. H. Strogatz, "Nonlinear dynamics and chaos : with applications to physics, biology, chemistry and engineering", *Perseus books*, New York, 2001.
- [148] I.A. Tall et W. Respondek, "Normal forms and invariants of nonlinear single-input systems with noncontrollable linearization", In *IFAC NOLCOS*, 2001.
- [149] F.E. Thau, "Observingthe state of nonlinearir dynamic systems", *Int. J. of Control*, vol.17, pp.441-479, 1973.
- [150] J. M. T. Thompson et H. B. Stewart, "Nonlinear dynamics and chaos", *John wiley & Sons*, New York, 2002.
- [151] W. Trappe et L. C. Washington, "Introduction to cryptography with coding theory", *Prentice Hall/Pearsonm* 2002.
- [152] J. Tsiniias, "Observer design for nonlinear systems", *Systems & Control Letters*, V. 13, pp. 135-142, 1989.
- [153] V.I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 22, No 2, pp 212-222,1977.
- [154] V.I. Utkin, "Sliding Modes in Control Optimization", *Communication and Control Engineering Series*, Springer-Verlag, 1992.
- [155] C. W. Wu et L. O. Chua, "A simple way to synchronize chaotic systems with applications to secure communiation systems", *Int. J. bifur. Chaos*, 3, pp. 1619-1627, 1994.
- [156] A. Varone, G. Santoboni et F. Meloni, "The role of initial conditions in the synchronization problem", *proc of 1st Con on Cont of Oscill Chaos*, St Peterburg, pp 42-45, 1997.

- [157] C. W. Wu, T. Yang et L. O. Chua, "On adaptive synchronization and control of nonlinear dynamical systems", *Int'l J. bifur. Chaos*, vol 6, pp. 455-471, 1996.
- [158] X.H. Xia et W.B. Gao, "Nonlinear observer design by observer error linearization", *SIAM J. Control and Optimization*, Vol 27, pp 199-216, 1989.
- [159] X. Xiao et W. Gao, "Nonlinear observer by observer canonical forms", *International Journal of control*, vol. 47, No. 4, pp. 1081-1100, 1988.
- [160] Y. Xiong et M. Saif, "Sliding mode observer for nonlinear uncertain systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, vol 46, pp 2012-2017, 2001.
- [161] T. Yang et L. O. Chua, "Secure communication via chaotic parameter modulation", *IEEE Trans, Circ. Syst. I* 43, pp. 817-819, 1996.
- [162] T. Yang, C. W. Wu et L. O. Chua, "Cryptography based on chaotic systems", *IEEE Trans. circ. Syst. I* vol 44, no 5, pp. 469-472, 1997.
- [163] T. Yang, L. O. Chua, "Impulsive stabilization for control and synchronization of chaotic systems : Theory and application to secure communication", *IEEE Trans. Circuits and Systems-I* 44, 976-988, 1997.
- [164] T. Yang, L. B. Yang et al, "Breaking chaotic switching using generalized synchronization : Examples", *IEEE Trans. Circuits and Systems-I* 45, 1062-1067, 1998.
- [165] Q. Zhang, "New residual generation and evaluation method for detection and isolation of faults in nonlinear systems" A, *Int'l J. Adaptive Cont. Signal Processing*, 14, pp. 759-773, 2000.
- [166] Q. Zhang et B. Delyon, "A new approach to adaptive observer design for MIMO systems", *ACC'2001*, Arlington.
- [167] G. Zheng, L. Boutat-Baddas, D. Boutat et J.P. Barbot, "Some comments on observability normal form and step-by-step sliding mode observer". *SIAM conference*, July 2005, New Orleans, USA.
- [168] G. Zheng, "Discussion sur les formes normales d'observabilité et les observateurs modes glissants étape par étape". *JDMACS 2005*, Lyon, France.
- [169] G. Zheng, D. Boutat et J.P. Barbot, "Single Output Dependent Observability Normal Form". *SIAM Journal on Control and Optimization* (relecture).
- [170] G. Zheng, D. Boutat et J.P. Barbot, "Output dependent observability linear normal form. *IEEE CDC-ECC*, Dec 2005, Spain.
- [171] G. Zheng, D. Boutat et J.P. Barbot, "Approche multi-sorties de la transmission de données basée sur la synchronisation de système chaotique". *IEEE CIFA'06*, Bordeaux, France.
- [172] G. Zheng, D. Boutat, T. Floquet et J.P. Barbot, "New schemes on multiple secure communication based on chaos", *International Journal of Bifurcation and Chaos* (soumis).

- [173] G. Zheng, D. Boutat, T. Floquet et J.P. Barbot, "Multiple secure communication based on chaos". IFAC Chaos'06, Reims, France.
- [174] G. Zheng, L. Boutat-Baddas, D. Boutat, T. Floquet et J.P. Barbot, "Multiple chaotic synchronization based on zero dynamic stability". ECC'07 (soumis)
- [175] G. Zheng, D. Boutat et J.P. Barbot, "Outputs depending observability normal form". System & Control Letters (soumis).