2. Mouvement par courbure moyenne

Un prototype de système pour les problèmes de croissance cristalline et de suivi d'interfaces.

Introduction (rapide) aux outils mathématiques pour l'analyse du MMC et des méthodes d'approximation numérique

- Un peu de géométrie
- Solutions de viscosité
- Propriétés qualitatives

Forme paramétrique : en 2D

$$\Gamma_t \quad = \quad \{ \;\; x(t,s), \quad 0 \leq t \leq T, \quad s \in [0, 2\pi] \;\; \}$$

$$\begin{cases} \tau \quad = \quad \dfrac{x_s}{|x_s|} & \qquad \nu \quad = \quad \dfrac{x_s^{\perp}}{|x_s|} \\ \tau_s \quad = \quad -\kappa \, |x_s| \, \nu & \qquad \kappa \quad = \quad \text{courbure} \end{cases}$$

Orientation de Γ_t : ν point vers l'exterieur
Avec cette convention, $K \geq 0$ si Γ_t est un cercle.

Vitesse de la courbe :

$$x_t = V\nu \;+\; V_\tau \tau \qquad\qquad V = -\kappa$$

Le Mvt par courbure moyenne vérifie l'EDP parabolique non linéaire

$$x_t \quad = \quad \frac{1}{|x_s|} \left(\frac{x_s}{|x_s|} \right)_s$$

Cas plus général :

$\Gamma \subset \mathbf{R}^n$ variété régulière de co–dimension 1
(peut s'étendre à des variétés de co–dimension $1 \leq k \leq n-1$)

$$x \in \Gamma, \qquad B_x \ : \ \begin{array}{ccc} T_x\Gamma \times T_x\Gamma & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (\xi, \eta) & \longrightarrow & - < \xi, \nabla \nu(x) \eta > \end{array}$$

Les courbures principales de Γ sont les valeurs propres $\kappa_1, \cdots, \kappa_{n-1}$ de la forme bilinéaire $B_x =$ 2ème forme fondamentale (intrinsèque)

Γ orientée selon la normale extérieure $\longrightarrow$ le bord d'un ensemble convexe a des courbures principales ≥ 0

Courbure moyenne : $\kappa(x) = \Sigma_{i=1}^{n-1} \kappa_i(x)$

Si Γ est décrite localement comme une ligne de niveau $\{u(x) = 0\} = \partial\{u(x) < 0\}$ avec u de classe $\mathcal{C}^2$

$$\nu = \frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|} \qquad B_x = \frac{P_\nu D^2 u(x) P_\nu}{|\nabla u(x)|} \qquad P_\nu = I - \nu \otimes \nu$$

$$\kappa(x) = \mathrm{trace}\left(\frac{P_\nu D^2 u(x) P_\nu}{|\nabla u(x)|}\right) = \Delta u - \frac{< D^2 u \nabla u, \nabla u >}{|\nabla u(x)|^2}$$

Fonction distance : $\Omega \in \mathbf{R}^n$

$$\begin{aligned} d(x,\Omega) &= \inf_{y\in\Omega} |x-y| \\ \bar{d}(x,\Omega) &= d(x,\Omega) - d(x,\mathbf{R}^n \setminus \Omega) \qquad \text{distance signée} \end{aligned}$$

Prop. 1 : Si Ω est un ouvert régulier, alors :

– $\bar{d}(x,\Omega)$ est régulière dans un voisinage tubulaire U de Ω

– Pour tout $x \in \partial\Omega$, $\quad \nu(x) = \nabla \bar{d}(x)$

Prop. 2 : Valeurs propres de $D^2\bar{d}$

– $\quad B_x = D^2\bar{d} \quad \longrightarrow \quad \kappa(x) = \Delta \bar{d}(x)$

– $\quad |\nabla \bar{d}| = 1$ dans U, $\quad \longrightarrow \quad D^2\bar{d}\nabla\bar{d} = 0$ dans U

Pour $y \in U$, $\quad x = y - \bar{d}(y)\nabla\bar{d}(y) \in \partial\Omega$
les valeurs propres de $D^2\bar{d}(y)$ sont associés à des vecteurs propres $\perp$ à ν

$$\mu_i(y) = \frac{\kappa_i(x)}{1+\bar{d}(y)\kappa_i(x)}, \qquad 1 \le i \le n-1$$

Mouvement par courbure moyenne régulier :

$t \in [0,T] \longrightarrow \Gamma_t$ est une déformation régulière d'une variété initiale Γ s'il existe une paramétrisation $\phi : [0,T] \times \Gamma \longrightarrow \mathbf{R}^n$ telle que

1. $\phi(t,.) : \Gamma \longrightarrow \Gamma_t$ est une bijection pour tout $0 \le t \le T$

2. Le jacobien $J\Phi(t,.) \neq 0$ sur Γ pour tout $0 \le t \le T$

$t \longrightarrow \Gamma_t$ est un mouvement par courbure moyenne régulier si et seulement si

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\bar{d}(t,\phi(t,y)) \right) = \partial_t \bar{d}(t,\phi) + < \nabla \bar{d}(t,\phi), \partial_t \phi > = \partial_t \bar{d} + V$$

$$\longrightarrow \quad 0 = \partial_t \bar{d} - \Delta \bar{d}$$

Caractérisation par une EDP $autour$ de Γ_t

$$\partial_t \bar{d} = \sum_i \frac{\mu_i}{1 - \bar{d}(t,y)\mu_i}$$

dans un voisinage tubulaire $\{|\bar{d}| < s\}$ de $\cup_{0 \le t \le T} \{t\} \times \Gamma_t$.

Solutions de viscosité   Crandall–Evans–Lions 82–84

On cherche des solutions de l'équation

$$\partial_t u \quad = \quad \Delta u - \frac{< D^2 u \nabla u, \nabla u >}{|\nabla u|^2} \qquad \text{dans } \mathbf{R}^n \times (0, \infty)$$

Difficultés :
- le caractère dégénéré de l'opérateur

$$\partial_t u \quad = \quad \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (a_{ij}) = I - \nu \times \nu$$

- la singularité forte si $\nabla u = 0$

Les solutions de viscosités ont été inventées pour étudier l'équation de Hamilton Jacobi

$$H(x, u(x), \nabla u(x)) \quad = \quad 0$$

en passant à la limite $\varepsilon \to 0$ dans une équation régularisée par la méthode de viscosité évanescente

$$\varepsilon \Delta u_\varepsilon \; + \; H(x, u_\varepsilon(x), \nabla u_\varepsilon(x)) \quad = \quad 0$$

Propriété fondamentale :

EDP de la forme $E(x, u(x), \nabla u(x), D^2 u(x)) = 0$ u champ scalaire

E vérifie la condition d'ellipticité (dégénérée)

$$E(x, u, p, M_1) \leq E(x, u, p, M_2) \quad \text{si } M_1 \geq M_2$$

pour tout $x \in \Omega$, $u \in \mathbf{R}$, $p \in \mathbf{R}^n$, $M_i \in \mathbf{M}_s^{n\times n}$

Cas des opérateurs uniformément elliptiques :

$$E(D^2 u) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = -A : D^2 u \qquad \text{avec } a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2, \quad \forall\, \xi \in \mathbf{R}^n$$

Si $M_1 \geq M_2$, $\qquad M_1 - M_2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k \otimes \xi_k$, $\qquad \xi_k \in \mathbf{R}^n, \lambda_k \geq 0$

et $E(M_1) \leq E(M_2)$

Principe du maximum : pour les opérateurs uniformément elliptiques

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_{ij}^2 u + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i u$$

On suppose que $u \in \mathcal{C}^2(U) \cap \mathcal{C}(\overline{U})$.

- Si $Lu \leq 0$ dans U (u sous–solution), alors $\max_{\overline{U}} = \max_{\partial U}$

- Si $Lu \geq 0$ dans U (u sur–solution), alors $\min_{\overline{U}} = \min_{\partial U}$

Méthode de Perron :
Sous des hypothèses de régularité des coefficients de L : si elle est bornée, la fonction

$$u(x) = \sup_{v \text{ sous–solution}} v(x)$$

est une solution de $Lu = 0$

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ouvert, $u \; : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ et l'équation

$$E(x, u(x), \nabla u(x), D^2 u(x)) \;=\; 0 \qquad \text{dans } \Omega \tag{1}$$

Thm : $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ est une solution classique de (1) si et seulement si

1. $\forall\ \phi \in \mathcal{C}^{\in}(\Omega,$ si x_0 est un point de maximum local de $u - \phi$, alors

$$E(x_0, u(x_0), \nabla \phi(x_0), D^2 \phi(x_0)) \quad \leq \quad 0$$

2. $\forall\ \phi \in \mathcal{C}^{\in}(\Omega,$ si x_0 est un point de minimum local de $u - \phi$, alors

$$E(x_0, u(x_0), \nabla \phi(x_0), D^2 \phi(x_0)) \quad \geq \quad 0$$

En effet, si $(u - \phi)(x_0) \;\geq\; (u - \phi)(y)$, alors

$$\nabla u(x_0) \;=\; \nabla \phi(x_0) \qquad \text{et} \qquad D^2(u - \phi)(x_0) \;\leq\; 0$$

et on utilise la propriété d'ellipticité dégénérée.

Définition des solutions de viscosité :

1. u est une sous–solution de viscosité de $E(x, u(x), \nabla u(x) D^2 u(x)) = 0$ si

$$u^* < \infty \quad \text{dans } \Omega \qquad \text{et} \qquad E_*(x_0, u^*(x_0), \nabla \phi(x_0) D^2 \phi(x_0)) \leq 0$$

   pour tous $x_0 \in \Omega$ et $\phi \in \mathcal{C}^\infty(U(x_0))$ tels que $u^* - \phi$ a un maximum local en x_0

2. u est une sur–solution de viscosité si

$$u_* > -\infty \quad \text{dans } \Omega \qquad \text{et} \qquad E^*(x_0, u_*(x_0), \nabla \phi(x_0) D^2 \phi(x_0)) \geq 0$$

   pour tous $x_0 \in \Omega$ et $\phi \in \mathcal{C}^\infty(U(x_0))$ tels que $u_* - \phi$ a un minimum local en x_0

3. u est une solution de viscosité si elle est à la fois sur et sous–solution

Remarques :

1. u solution de viscosité de $E = 0$, n'est pas en général sol. de viscosité de $-E = 0$

2. On peut se restreindre dans la définition à des fonctions test $\mathcal{C}^{\in}$ et quitte à remplacer ϕ par
$$\phi(x) \pm |x - x_0|^4$$
on peut supposer que le maximum (ou min) est global et strict.

Exemple : $E(x, u, u', u'') = |u'| - 1 \qquad \Omega = (-1, 1)$

$$u(t) \quad = \quad \min(1 - t, 1 + t)$$

est solution de viscosité, mais n'est pas sol. de viscosité de $1 - |u|' = 0$.

Lien entre solution classique et sol. de viscosité :

1. Si u est une solution de viscosité et si $u \in \mathcal{C}^2$, alors u est solution classique de $E = 0$

2. Si E est elliptique dégénérée et si u est une sous–solution (sur–solution) classique, alors u est une sous–solution (sur–solution) de viscosité de $E = 0$

Exemple : $u(t) = t^2$ est une solution classique de $u'' - 2 = 0$, mais pas solution de viscosité

Stabilité :

Prop. 3 : Soit F une famille de sous–solutions de viscosité dans $\Omega \in \mathbf{R}^n$. Soit

$$u(x) \quad = \quad \sup_{v \in F} v(x)$$

Alors u est une sous–solution de viscosité dans $\Omega \cap \{u^* < \infty\}$

Thm : Méthode de Perron

Soit f, g une sous et sur–solution de $E(x, u, \nabla u, D^2 u) \quad = \quad 0$ dans un ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, avec E elliptique dégénérée
On suppose que

$$\forall\ x \in \Omega, \qquad f(x) \leq g(x) \qquad\qquad -\infty < f_*(x) \qquad g^*(x) < +\infty$$

Alors, il existe une solution de viscosité u de $E(x, u, \nabla u, D^2 u) \ = \ 0,$ dans Ω, qui vérifie

$$\forall\ x \in \Omega, \qquad f(x) \leq u(x) \leq g(x)$$

Solutions de viscosité d'équations de type parabolique :

u est une sous–solution de viscosité de

$$\partial_t u + F(\nabla u, D^2 u) \quad = \quad 0 \tag{2}$$

si, pour tous $(t_0, x_0) \in \Omega \subset (0, \infty) \times \mathbf{R}^n$, et pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty(U_{t_0,x_0})$

$$\partial_t \Phi + F_*(\nabla \phi, D^2 \phi) \quad \leq \quad 0 \qquad \text{en } (t_0, x_0)$$

(idem sur–solution)

On suppose que F est elliptique dégénérée,
continue et bornée sur $\mathbf{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbf{M}_s^{n\times n}$, continue en $(0, 0)$

Thm de comparaison :

Soit $0 < T\infty$ et u une sous–solution continue, v une sous–solution continue de (2) dans $(0,T) \times \mathbf{R}^n$. On suppose que

1. $|u(t,x)| + |v(t,x)| \ \leq K(1 + |x|)$ dans $(0,T) \times \mathbf{R}^n$

2. $u(0,x) \ \leq \ v(0,x), \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^n$

3. pour un certain R, $u(t,x) \sim u_0$ et $v(t,x) \sim v_0$ pour $|x| = t \ \geq \ R$

$$\text{Alors,} \quad \forall\, (t,x) \in (0,T) \times \mathbf{R}^n, \qquad u(t,x) \quad \leq \quad v(t,x)$$

Méthode de Perron parabolique :

Soit $f, g\ : (0,T) \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une sous et sur–solution de viscosité de l'équation

$$\partial_t u + F(\nabla u, D^2 u) \quad = \quad 0$$

telles que

$$\begin{array}{c} g^*(0,.) \ = \ u_0 \ = \ f_*(0,.) \\ -K(1+|x|) \ \leq \ f(t,x) \ \leq \ g(t,x) \ \leq K(1+|x|) \end{array}$$

Alors l'equation a une solution de viscosité continue u telle que $f \leq u \leq g$

La construction de solutions de viscosité revient donc à exhiber des sous et sur–solutions qui vérifient la condition initiale et les conditions de croissance

Cas du mouvement par courbure moyenne :

On considère $F(p, M) \;=\; -\mathrm{trace}(M) + \dfrac{< Mp, p >}{|p|^2}$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \partial_t u & = & \Delta u - \dfrac{< D^2 u \nabla u, \nabla u >}{|\nabla u|^2} \\ u(0, x) & = & u_0(x) \end{array}\right. \tag{3}$$

$$F(p, M) \;=\; -\mathrm{trace}((I - p \otimes p)M) \;=\; -\mathrm{trace}(P_p M P_p) \;=\; -\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i$$

et $M_1 \leq M_2 \;\Rightarrow\; \lambda_i(P_p M_1 P_p) \leq \lambda_i(P_p M_2 P_p) \quad \Rightarrow \quad F$ elliptique dégénéré

On construit des sous et sur–solutions de l'équation en utilisant les solutions classiques

$$u(t, x) \;=\; |x - x_0|^2 + 2(n-1)t$$

dont les lignes de niveau sont des sphères

On pose

$$\left\{\begin{array}{rcl} b^-(t,x,x_0) & = & u(x_0) - m(\sqrt{|x-x_0|^2 + 2(n-1)t}) \\ b^+(t,x,x_0) & = & u(x_0) + m(\sqrt{|x-x_0|^2 + 2(n-1)t}) \end{array}\right.$$

où m est un module de continuité pour la donnée initiale

$$f(t,x) = \sup_{x_0 \in \mathbf{R}^n} b^-(t,x,x_0) \qquad g(t,x) = \sup_{x_0 \in \mathbf{R}^n} b^+(t,x,x_0)$$

On vérifie que f et g sont continues, que ce sont des sous et sur–solutions comme sup et inf de sous et sur–solutions et que

$$\begin{array}{rcl} f(0,x) & = & g(0,x) = u_0(x) \\ f & \leq & g \end{array}$$

Le problème de Cauchy (3) a une solution unique telle que $|u(x,t)| \leq K(1 + |x| + \sqrt{t})$

Equation d'évolution géométriques :

$\Gamma_0 \subset \mathbf{R}^n$ un ensemble fermé, borné de codimension 1,
u_0 une fonction continue telle que $\Gamma_0 \;=\; \{u_0(x) = 0\}$.

Soit $u(t,.)$ la solution du problème de Cauchy précédent et

$$\Gamma_t \quad = \quad \{x \in \mathbf{R}^n, \quad u(t,x) = 0\}$$

Γ_t est le flot de level set issu de Γ_0.

La définition dépend-elle du choix de u_0 ?

On dit que l'équation $\partial_t u + F(\nabla u, D^2 u)$ est géométrique si

$$\begin{aligned} F(\lambda p, \lambda M) &= \lambda F(p, M), \quad \forall\ \lambda > 0 \\ F(p, M + sp \times p) &= F(p, M), \quad \forall s \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

La fonction F du mouvement par courbure moyenne est géométrique

$$\begin{aligned} F(p, M) &= -\mathrm{trace}(M) + \frac{< Mp, p >}{|p|^2} = \mathrm{trace}(P_p M P_p) \\ &= \mathrm{trace}(P_p (M + sp \otimes p) P_p) \end{aligned}$$

Thm : Soit m une fonction continue, croissante et u une sous–solution (sur–solution) de

$$\partial_t u + F(\nabla u, D^2 u) = 0$$

Alors $m(u)$ est aussi une sous–solution (sur–solution)

Propriétés :

- l'évolution ne dépend que de la géométrie des lignes de niveau
- On peut ensuite montrer que le flot de level set ne dépend que de la géométrie de $\{u_0 = 0\}$, pas de u_0
- Le flot de level set définit semi-groupe $\Gamma_{t+s}(\Gamma_0) \; = \; \Gamma_s(\Gamma_t)$
- Monotonie : $\Gamma_0 \subset \Gamma_0' \quad \Rightarrow \quad \Gamma_t \subset \Gamma_t'$
- Si Γ_0 est compact, non vide, il existe un temps d'extinction $T \in [0, \infty)$
- Phénomènes étranges : temps d'extinction instantané, fattening