

Introduction aux méthodes multigrilles

13 décembre 2007

Plan

- 1 Problème modèle
- 2 Principe de l'approche multigrille
 - Idée générale
 - Opérateurs de transferts inter-grilles
 - Récursivité
- 3 Analyse des méthodes multigrilles
 - Coûts des méthodes
 - Convergence

Références bibliographiques

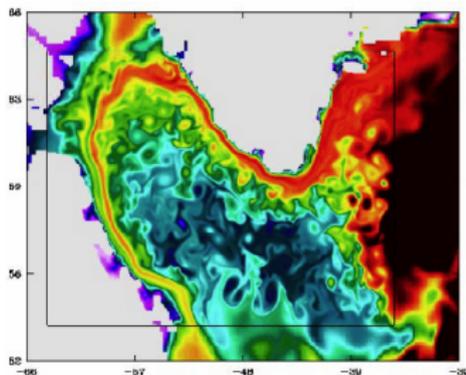
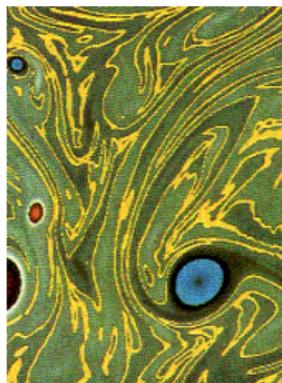
- **Multigrid methods and applications** W. Hackbusch, *Springer-Verlag*, 1985.
- **Multigrid** Trottenberg, Oosterlee and Schüller, *Academic Press*, 2001.
- **An introduction to multigrid methods** Wesseling, *Wiley & sons*, 1992.

Phénomènes multi-échelles

La plupart des phénomènes physiques mettent en jeu une large gamme d'échelles.

Exemple : advection $u \frac{\partial u}{\partial x}$

$$u = \sin x \Rightarrow u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \sin 2x$$



Plan

- 1 Problème modèle
- 2 Principe de l'approche multigrille
 - Idée générale
 - Opérateurs de transferts inter-grilles
 - Récursivité
- 3 Analyse des méthodes multigrilles
 - Coûts des méthodes
 - Convergence

Problème modèle

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Discrétisation par diff. finies : $x_j = jh$, $j = 0, \dots, N$, avec $h = \frac{1}{N}$

On note u_j l'approximation de $u(x_j)$ ($u_j =$ solution discrète exacte).

$$\begin{cases} -u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1} = h^2 f(x_i) & i = 1, \dots, N-1 \\ u_0 = u_N = 0 \end{cases}$$

Résolution par méthode de Jacobi

$$\begin{cases} u_i^{(n+1)} = \frac{1}{2} \left(h^2 f_i + u_{i-1}^{(n)} + u_{i+1}^{(n)} \right) & i = 1, \dots, N-1 \\ u_0^{(n+1)} = u_N^{(n+1)} = 0 \end{cases}$$

On pose : $e_i^{(n+1)} = u_i^{(n+1)} - u_i$

$$\begin{cases} e_i^{(n+1)} = \frac{1}{2} \left(e_{i-1}^{(n)} + e_{i+1}^{(n)} \right) & i = 1, \dots, N-1 \\ e_0^{(n+1)} = e_N^{(n+1)} = 0 \end{cases}$$

ou encore : $e_i^{(n+1)} = e_i^{(n)} - \frac{1}{2} \left(-e_{i-1}^{(n)} + 2e_i^{(n)} - e_{i+1}^{(n)} \right)$

Comportement de l'erreur pour différents modes de Fourier

$$e^{(0)}(x) = \sin k\pi x \quad (k \in \mathbf{N})$$

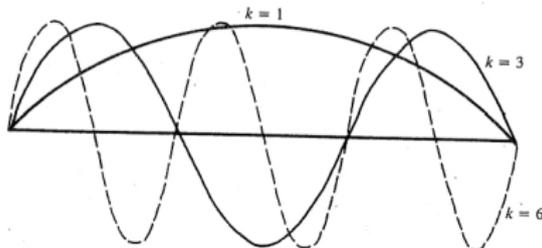


FIG. 4. The modes $v_j = \sin\left(\frac{jk\pi}{N}\right)$, $0 \leq j \leq N$, with wavenumbers $k = 1, 3, 6$. The k th mode consists of $k/2$ full sine waves on the interval.

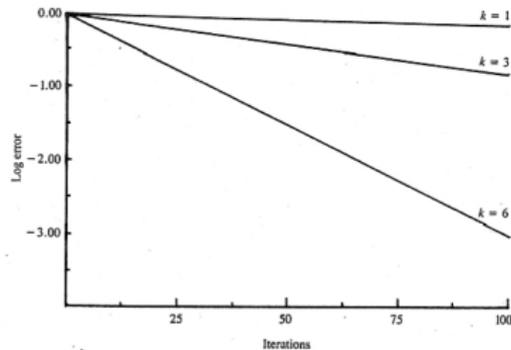
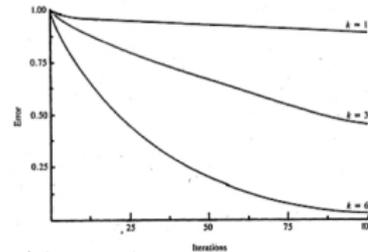


FIG. 6. The weighted Jacobi method with $\omega = 2/3$ applied to the one-dimensional model problem with $N = 64$ and with initial guesses consisting of v_1, v_3 and v_6 . The log of $\|e\|_\infty$ is plotted against the iteration number for 100 iterations.

Interprétation

La matrice d'itération $\mathbf{e}^{(n+1)} = \mathbf{J}\mathbf{e}^{(n)}$ est $\mathbf{J} = \mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{A}$, avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Les éléments propres de \mathbf{A} sont :

$$\mu_k = 4 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2N} \right) \quad \text{et} \quad \mathbf{w}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin k\pi/N \\ \sin 2k\pi/N \\ \vdots \\ \sin Nk\pi/N \end{pmatrix} \quad k = 1, \dots, N-1$$

Les valeurs propres de \mathbf{J} sont donc les $\lambda_k = 1 - \frac{1}{2}\mu_k = \cos \frac{k\pi}{N}$, associées aux mêmes vecteurs propres \mathbf{w}_k .

Les \mathbf{w}_k ($k = 1, \dots, N-1$) forment une base de $\mathcal{F}(\Omega_h)$: fonctions de grille sur Ω_h . Donc $\mathbf{e}^{(0)}$ peut être décomposée sur cette base :

$$\mathbf{e}^{(0)} = \sum_{k=1}^{N-1} c_k \mathbf{w}_k \quad \text{D'où :} \quad \mathbf{e}^{(n)} = \sum_{k=1}^{N-1} c_k \lambda_k^n \mathbf{w}_k$$

Or $\lambda_k = \cos \frac{k\pi}{N} = \cos k\pi h \simeq 1 - \frac{k^2 \pi^2 h^2}{2}$ pour k petit.

Par ex $k = 1$: $\lambda_1 \simeq 1 - \frac{\pi^2 h^2}{2} \longrightarrow \lambda_1^n$ va décroître lentement vers 0.

Et faire tendre h vers 0 (i.e. raffiner le maillage) ne fera qu'empirer les choses.

Ce comportement est représentatif de la résolution des systèmes linéaires par méthodes itératives. **On converge en général rapidement sur les modes élevés, mais lentement sur les basses fréquences.**

Remarque : avec Jacobi, les très basses et très hautes fréquences sont atténuées toutes deux très lentement. On peut résoudre le problème sur les hautes fréquences en utilisant une méthode de Jacobi relaxée : $\mathbf{J}_\omega = \mathbf{I} - \frac{\omega}{2}\mathbf{A}$ avec $\omega = 2/3$ par exemple.

Mais le problème demeure sur les basses fréquences.

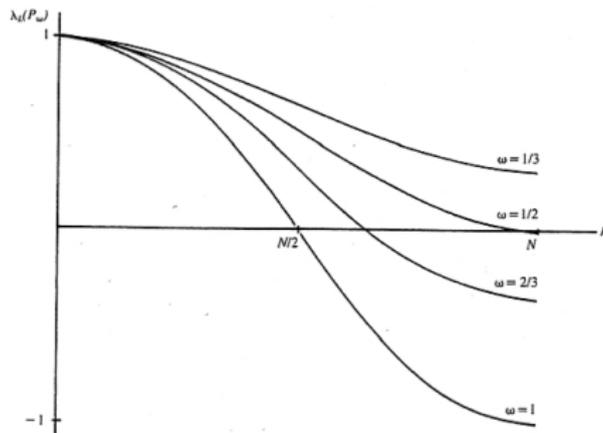
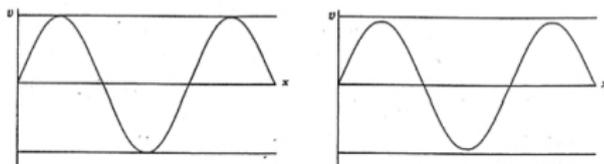
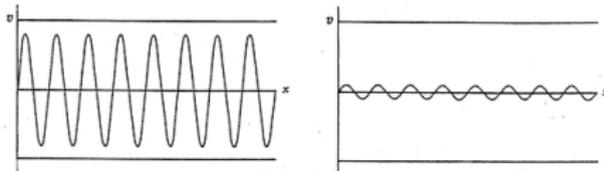


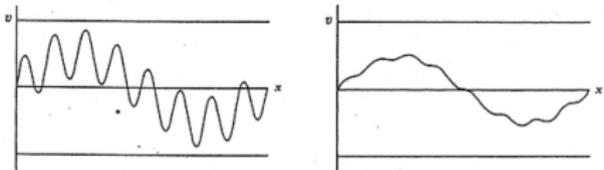
FIG. 9. The eigenvalues of the iteration matrix P_ω for $\omega = 1/3, 1/2, 2/3, 1$. The eigenvalues $\lambda_k = 1 - 2\omega \sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)$ are plotted as if k were a continuous variable on the interval $0 \leq k \leq N$. In fact, k takes only integer values on the interval $1 \leq k \leq N - 1$.



(a)



(b)



(c)

FIG. 11. The weighted Jacobi method with $\omega = 2/3$ applied to the one-dimensional model problem with $N = 64$ and with an initial guess consisting of (a) w_3 , (b) w_{16} and (c) a combination of w_2 and w_{16} . The figures show the approximation after one iteration (on the left) and after ten iterations (on the right).

Plan

- 1 Problème modèle
- 2 Principe de l'approche multigrille**
 - Idée générale
 - Opérateurs de transferts inter-grilles
 - Récursivité
- 3 Analyse des méthodes multigrilles
 - Coûts des méthodes
 - Convergence

Plan

- 1 Problème modèle
- 2 Principe de l'approche multigrille
 - Idée générale
 - Opérateurs de transferts inter-grilles
 - Récursivité
- 3 Analyse des méthodes multigrilles
 - Coûts des méthodes
 - Convergence

A résoudre $Au = f$ sur une grille.

On dispose d'un algorithme de résolution itératif, qui tue rapidement les petites échelles, mais lentement les grandes échelles.

Remarque fondamentale

Un mode lisse sur une grille fine l'est moins sur une grille plus grossière.

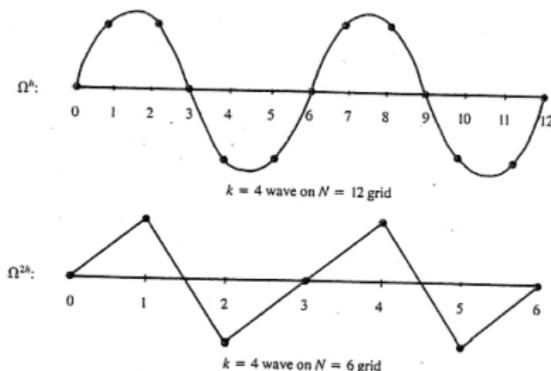


FIG. 14. A wave with wavenumber $k = 4$ on Ω^h ($N = 12$) is projected onto Ω^{2h} ($N = 6$). The coarse grid "sees" a wave with $k = 4$ which is more oscillatory on the coarse grid than on the fine grid.

D'où deux idées de méthodes de résolution :

- Itérations emboîtées
- Correction par la grille grossière

Approche "Itérations emboîtées"

Algorithme

Itérer $Au = f$ sur la grille $\Omega_{2^p h}$ pour avoir un first guess sur $\Omega_{2^{p-1} h}$

Itérer $Au = f$ sur la grille $\Omega_{2^{p-1} h}$ pour avoir un first guess sur $\Omega_{2^{p-2} h}$

\vdots \vdots \vdots

Itérer $Au = f$ sur la grille Ω_{2h} pour avoir un first guess sur Ω_h

Itérer $Au = f$ sur la grille Ω_h

Questions en suspens :

- Que veut dire $Au = f$ sur une grille grossière ?
- Comment transférer d'une grille à l'autre ?
- Que faire si jamais il reste des basses fréquences une fois sur Ω_h ?

Approche "Correction par la grille grossière"

Algorithme

Itérer $Au = f$ sur la grille Ω_h pour avoir une approximation u^h

Calculer le **résidu** $r^h = f^h - Au^h$

Résoudre $Ae = r$ sur la grille Ω_{2h} pour avoir e^{2h}

Corriger u^h : $u^h = u^h + e^{2h}$

Questions en suspens :

- Comment transférer r de Ω_h à Ω_{2h} ?
- Comment transférer e^{2h} de Ω_{2h} sur Ω_h ?
- Que veut dire $Ae = r$ sur Ω_{2h} ?

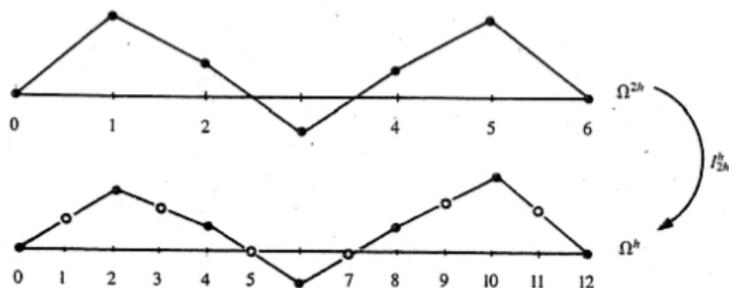
Plan

- 1 Problème modèle
- 2 Principe de l'approche multigrille
 - Idée générale
 - Opérateurs de transferts inter-grilles
 - Récursivité
- 3 Analyse des méthodes multigrilles
 - Coûts des méthodes
 - Convergence

De Ω_{2h} à Ω_h : interpolation I_{2h}^h

Le plus simple : interpolation linéaire

$$I_{2h}^h \mathbf{v}^{2h} = \mathbf{v}^h \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{v}_{2j}^h = \mathbf{v}_j^{2h} \\ \mathbf{v}_{2j+1}^h = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_j^{2h} + \mathbf{v}_{j+1}^{2h}) \end{cases} \quad 0 \leq j \leq \frac{N}{2} - 1$$

FIG. 15. Interpolation of a vector on the coarse grid Ω^{2h} to the fine grid Ω^h .

De Ω_h à Ω_{2h} : restriction I_h^{2h}

Le plus simple : **injection canonique (copie)**

$$\mathbf{v}_j^{2h} = \mathbf{v}_{2j}^h \quad 1 \leq j \leq \frac{N}{2} - 1$$

Très utilisé : **full weighting**

$$\mathbf{v}_j^{2h} = \frac{1}{4}\mathbf{v}_{2j-1}^h + \frac{1}{2}\mathbf{v}_{2j}^h + \frac{1}{4}\mathbf{v}_{2j+1}^h \quad 1 \leq j \leq \frac{N}{2} - 1$$

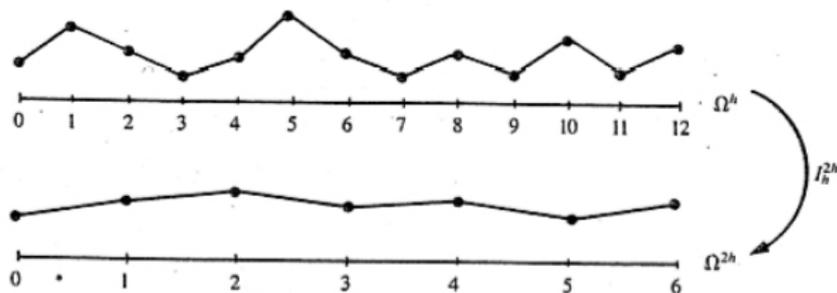
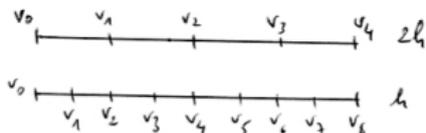


FIG. 17. Restriction by full weighting of a fine grid vector to the coarse grid.

Exemple : pour le cas $N = 8$, cet opérateur est de la forme :

$$\mathbf{I}_h^{2h} \mathbf{v}^h = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & & & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & & & \\ & & 1 & 2 & 1 & & & \\ & & & 1 & 2 & 1 & & \\ & & & & 1 & 2 & 1 & \\ & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix}_h = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_{2h} = \mathbf{v}^{2h}$$



On voit que $\mathbf{I}_{2h}^h = 2(\mathbf{I}_h^{2h})^T$. Ce sera important pour la suite.

Rq : pour l'injection canonique

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & & & & \\ & 0 & 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & 1 & 0 & & & \\ & & & 0 & 1 & 0 & & \\ & & & & 0 & 1 & 0 & \\ & & & & & & & \end{bmatrix}$$

Comment définir A sur Ω_{2h}

Ce qui paraît a priori cohérent avec les opérateurs précédents :

$$\mathbf{A}^{2h} = \mathbf{I}_h^{2h} \mathbf{A}^{h_1} \mathbf{I}_{2h}^h$$

On verra plus loin l'importance de ce choix.

Exemple : pour le cas $N = 8$ précédent, on obtient :

$$\mathbf{A}^{2h} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 2 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 2 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 2 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & & \\ & & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ 2 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 2 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 2 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 2 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{soit } \mathbf{A}^{2h} = \frac{1}{(2h)^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Même schéma, mais sur la grille Ω_{2h} (ce qui n'est a priori pas un résultat général)

Avec ces notations :

Algorithme "Correction par la grille grossière"

Itérer $A^h u^h = f^h$ sur Ω_h

Calculer le **résidu** et le transférer sur Ω_{2h} : $r^{2h} = \mathbf{I}_h^{2h}(f^h - A^h u^h)$

Résoudre $A^{2h} e^{2h} = r^{2h}$ sur Ω_{2h}

Corriger la solution fine : $u^h = u^h + \mathbf{I}_{2h}^h e^{2h}$

Itérer $A^h u^h = f^h$ sur Ω_h

Opérateur de correction par la grille grossière :

$$\mathbf{CG} = \mathbf{I} - \mathbf{I}_{2h}^h (A^{2h})^{-1} \mathbf{I}_h^{2h} A^h$$

important car $(e^h)^{n+1} = \mathbf{CG}((e^h)^n)$

Remarque : le transfert $e^h = \mathbf{I}_{2h}^h e^{2h}$ correspond à l'interpolation de e^{2h} vers e^h . Or, a priori e^h est un champ lisse (basse fréquence). Donc ce transfert devrait bien se passer, sans introduction d'erreur nouvelle importante.

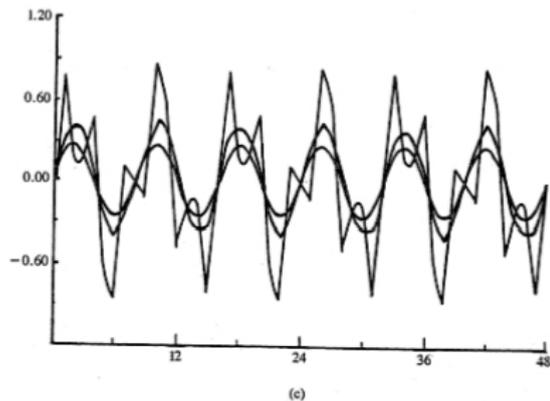


FIG. 18(c). The error after three fine grid relaxation sweeps superimposed upon the previous iterates. $\|e\|_{\infty} = .261$.

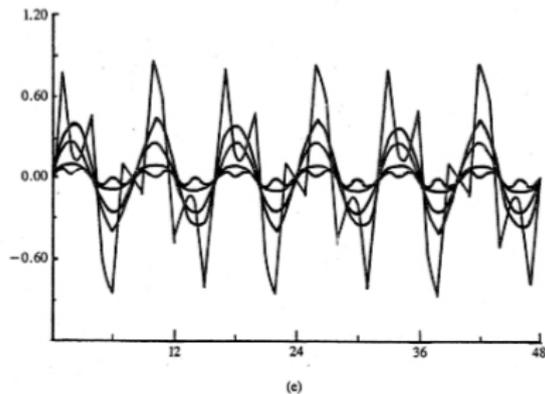


FIG. 18(e). The error after three relaxation sweeps on the coarse grid residual equation superimposed upon previous approximations. $\|e\|_{\infty} = .591 \times 10^{-1}$.

Plan

- 1 Problème modèle
- 2 Principe de l'approche multigrille**
 - Idée générale
 - Opérateurs de transferts inter-grilles
 - Récursivité**
- 3 Analyse des méthodes multigrilles
 - Coûts des méthodes
 - Convergence

Question restante : comment résoudre $A^{2h}e^{2h} = r^{2h}$ sur Ω_{2h} ?

→ approche récursive, jusqu'à une grille grossière sur laquelle une résolution directe est possible.

Algorithme "Correction par la grille grossière"

Itérer n_1 fois $A^h u^h = f^h$ avec un first guess u_0^h

Calculer $f^{2h} = \mathbf{I}_h^{2h}(f^h - A^h u^h)$

Itérer n_1 fois $A^{2h} u^{2h} = f^{2h}$ avec un first guess nul

Calculer $f^{4h} = \mathbf{I}_{2h}^{4h}(f^{2h} - A^{2h} u^{2h})$

Itérer ...

Résoudre directement $A^{ph} u^{ph} = f^{ph}$

⋮

Corriger $u^{2h} = u^{2h} + \mathbf{I}_{4h}^{2h} u^{4h}$

Itérer n_2 fois $A^{2h} u^{2h} = f^{2h}$ à partir de u^{2h}

Corriger $u^h = u^h + \mathbf{I}_{2h}^h u^{2h}$

Itérer n_2 fois $A^h u^h = f^h$ à partir de u^h

C'est un **V-cycle**.

On peut aussi redoubler chaque retour à la grille grossière : **W-cycle**

Enfin, si on reprend l'idée des "itérations emboîtées", on obtient l'algorithme suivant :

Algorithme "Itérations emboîtées"

Résoudre directement $A^{ph} u^{ph} = f^{ph}$

⋮

$u^{2h} = u^{2h} + I_{4h}^{2h} u^{4h}$
 résoudre $A^{2h} u^{2h} = f^{2h}$ à partir de u^{2h} par un V-cycle

$u^h = u^h + I_{2h}^h u^{2h}$
 résoudre $A^h u^h = f^h$ à partir de u^h par un V-cycle

C'est le **Full Multigrid V-cycle**

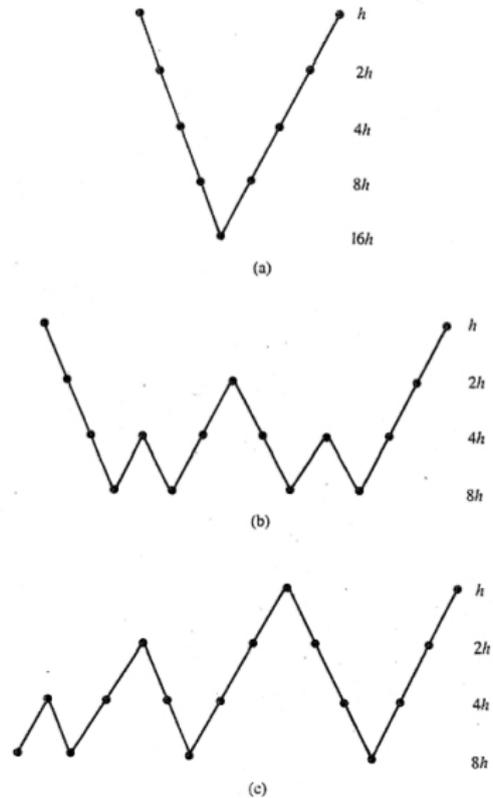


FIG. 19. Schedule of grids for (a) V-cycle, (b) W-cycle and (c) FMV scheme, all on four levels.

Plan

- 1 Problème modèle
- 2 Principe de l'approche multigrille
 - Idée générale
 - Opérateurs de transferts inter-grilles
 - Récursivité
- 3 Analyse des méthodes multigrilles
 - Coûts des méthodes
 - Convergence

Plan

- 1 Problème modèle
- 2 Principe de l'approche multigrille
 - Idée générale
 - Opérateurs de transferts inter-grilles
 - Récursivité
- 3 Analyse des méthodes multigrilles**
 - Coûts des méthodes
 - Convergence

On note N le nombre de points sur Ω_h .

L'erreur sur la solution numérique se décompose en $E^h + e^h$, où :

- E^h est l'erreur $u - u^h$ due à la discrétisation
- e^h l'erreur supplémentaire sur u^h , du fait de la résolution du système linéaire. (e^h = erreur algébrique)

Pour avoir $\|E^h + e^h\| < \varepsilon$, on peut par exemple demander $\|E^h\| < \varepsilon/2$ et $\|e^h\| < \varepsilon/2$

L'erreur de discrétisation est en général liée à la taille de la maille :
 $\|E^h\| \leq K h^p$ (ex : $p = 2$ pour diff. finies d'ordre 2).

Donc $\|E^h\| \leq \varepsilon/2$ donne $h \leq \left(\frac{\varepsilon}{2K}\right)^{1/p}$: ça fixe la finesse du maillage.

Reste à demander que la résolution numérique mène à une erreur

$$\|e^h\| \leq \varepsilon/2, \text{ i.e. } \|e^h\| = \mathcal{O}(h^p) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^p}\right)$$

On admet (ça se démontre) qu'un V-cycle a un facteur de convergence ρ indépendant de h (il ne dépend que de n_1 et n_2).

Soit ν le nombre d'itérations nécessaires pour que ça converge à la précision demandée : $\rho^\nu = \mathcal{O}(N^{-p})$ (puisque e_h passe de $\mathcal{O}(1)$ à $\mathcal{O}(N^{-p})$). D'où $\nu = \mathcal{O}(\log N)$.

Le coût d'un V-cycle est $\mathcal{O}(N)$ (facile). D'où :

La résolution par algo V-cycle est en $\mathcal{O}(N \log N)$. C'est comparable aux meilleures méthodes directes.

Pour le FMV, l'erreur initiale vérifie déjà $\|e^{2h}\| \leq K(2h)^p$ puisqu'on l'a déjà estimée sur une grille plus grossière. Puisqu'on veut $\|e^h\| \leq Kh^p$, il suffit de $\|e^h\| \leq \frac{1}{2^p} \|e^{2h}\|$. Cela va demander ν V-cycles, avec $\rho^\nu = \frac{1}{2^p}$, i.e. $\nu = \mathcal{O}(1)$.

La résolution par algo FMV est en $\mathcal{O}(N)$. C'est d'ordre optimal.

Plan

- 1 Problème modèle
- 2 Principe de l'approche multigrille
 - Idée générale
 - Opérateurs de transferts inter-grilles
 - Récursivité
- 3 Analyse des méthodes multigrilles**
 - Coûts des méthodes
 - Convergence**

Définition : Conditions variationnelles

$$\begin{cases} \mathbf{A}^{2h} = \mathbf{I}_h^{2h} \mathbf{A}^h \mathbf{I}_{2h}^h \\ \mathbf{I}_{2h}^h = \mathbf{C} (\mathbf{I}_h^{2h})^T \end{cases}$$

Pour une application linéaire quelconque f , on a : $\ker f \perp \text{Im } f^*$.
Donc ici : $\ker \mathbf{I}_h^{2h} \perp \text{Im} (\mathbf{I}_h^{2h})^T$, c'est à dire $\ker \mathbf{I}_h^{2h} \perp \text{Im } \mathbf{I}_{2h}^h$.

Comme la somme de leurs dimensions vaut N (à vérifier - chaque dim vaut environ $N/2$), on a :

$$\mathcal{F}(\Omega_h) = \underbrace{\ker \mathbf{I}_h^{2h}}_{\text{petites échelles}} \oplus \underbrace{\text{Im } \mathbf{I}_{2h}^h}_{\text{grandes échelles}}$$

On peut modifier un peu cette décomposition :

- $\dim \ker(\mathbf{I}_h^{2h} \mathbf{A}^h) = \dim \ker \mathbf{I}_h^{2h}$ car \mathbf{A}^h est de rang N car inversible.

- $\ker(\mathbf{I}_h^{2h} \mathbf{A}^h) \cap \text{Im } \mathbf{I}_{2h}^h = \emptyset$

Soit $x^h \in \ker(\mathbf{I}_h^{2h} \mathbf{A}^h) \cap \text{Im } \mathbf{I}_{2h}^h$. $\exists y^{2h} / x^h = \mathbf{I}_{2h}^h y^{2h}$ et $\mathbf{I}_h^{2h} \mathbf{A}^h x^h = 0$.

D'où $\underbrace{\mathbf{I}_h^{2h} \mathbf{A}^h \mathbf{I}_{2h}^h}_{\mathbf{A}^{2h}} y^{2h} = 0$ D'où $y^{2h} = 0$ car \mathbf{A}^{2h} inversible.

D'où $x^h = 0$.

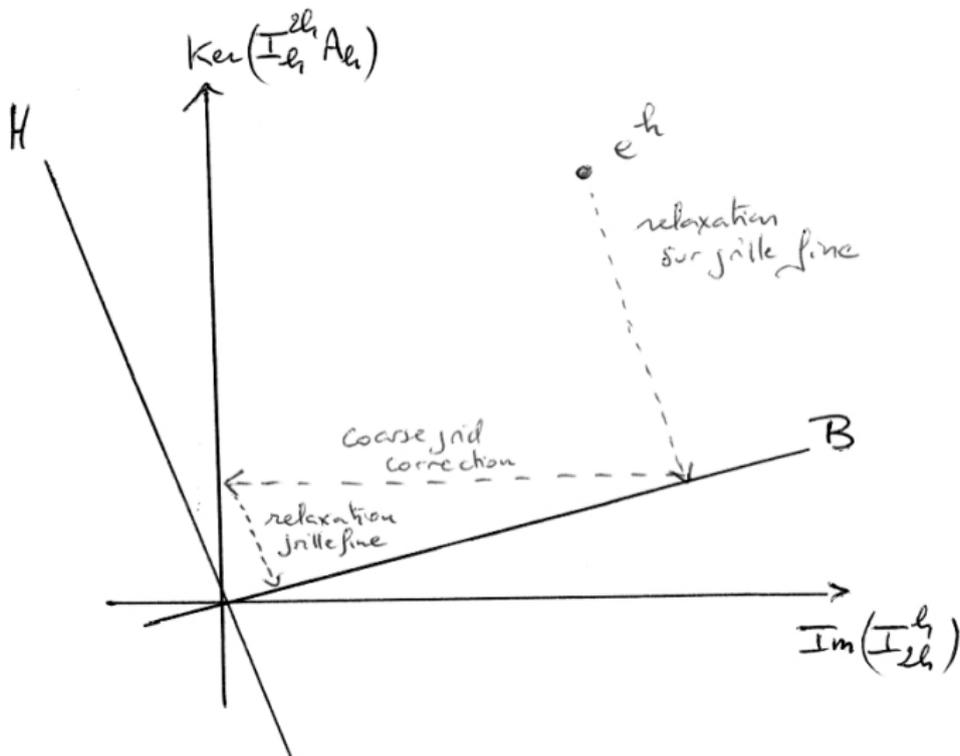
D'où finalement :

$$\mathcal{F}(\Omega_h) = \ker \mathbf{I}_h^{2h} \mathbf{A}^h \oplus \text{Im } \mathbf{I}_{2h}^h$$

Si on ajoute cette décomposition à la décomposition spectrale usuelle :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(\Omega_h) &= B \oplus H \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{modes basses fréquences} \\ 1 \leq k < N/2 \end{array} \right\} \\
 &\quad \oplus \left\{ \begin{array}{l} \text{modes hautes fréquences} \\ N/2 \leq k \leq N \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

cela permet d'interpréter les méthodes multigrilles.



rappel : $\mathbf{CG} = \mathbf{I} - \mathbf{I}_{2h}^h (\mathbf{A}^{2h})^{-1} \mathbf{I}_h^{2h} \mathbf{A}^h$