Master MES - Modélisation et simulation
Thème : Modèles de trafic routier

Emmanuel Maitre

Page web de l'UE
http://www-ljk.imag.fr/membres/Emmanuel.Maitre/doku.php?id=mes

1 Le problème à étudier

1.1 Introduction

Nous allons nous intéresser à la circulation sur une route : comment, si cela est possible, peut-on rendre compte de ce qui se passe sur une route. Bien sûr, nous imaginerons une situation très simplifiée, en commençant par considérer le cas d'une route circulaire a voie unique, autrement dit un circuit automobile où les voitures n'auraient pas le droit de se doubler. Il y deux manières de modéliser ce type de problèmes : considérer les voitures présentes sur la route de manière individuelles, et aboutir à un système d'équations différentielles couplées. Ou bien considérer une vue plus macroscopique de la route où on définit une densité de voitures. Cette dernière approche introduit une classe de modèles un peu plus complexe que ceux étudiés dans les autres thèmes en ce sens qu'ils considèrent des fonctions (et des équations) faisant intervenir à la fois des variables d'espaces et du temps. Cependant, ces modèles sont très utiles dans des domaines aussi variés que celui présenté ici ou celui du transport et de la diffusion de polluants dans une rivière, de la convection-diffusion de la chaleur ou d'espèces chimiques, ou encore le transport de matière et même certains modèles financiers. Ces modèles sont dits "aux dérivées partielles". Les principes de constitution du modèle restent les mêmes que dans d'autres contextes : recherche d'une loi de conservation puis loi de comportement.

1.2 Objectifs

Nous considérons un circuit de longueur L km, sans entrée ni sortie, homogène (nombre de voies invariant sur la section). Ces hypothèses restrictives seront relaxées par la suite. On désignera par $x \in [0, L]$ l'abscisse d'un point de la section et on supposera que les véhicules se déplacent dans le sens positif des abscisses, et que le bout $x = L$ coincide avec $x = 0$. L'objectif final est de rendre compte de l'état de ce circuit relativement au trafic pendant un intervalle de temps $[0, T]$, par exemple :

- y-a-t-il beaucoup de véhicules sur tout ou partie de la section ?
- les véhicules roulent-ils vite ou non ?
- y-a-t-il des risques de bouchons ou d'"accordéon" ?

Comme souvent, il doit être envisagé de pouvoir présenter les résultats de façon synthétique : quelles seront les fonctions et variables qui sont les plus représentatives et peut-on réaliser des représentations graphiques de ces résultats ?

1.3 Les éléments pour établir un modèle

- déterminer les variables qui sont significatives ;
- appliquer un principe de conservation ;
- faire des hypothèses sur le lien pouvant exister entre des variables : lois ou équations de comportement ;
- rassembler le tout.

2 Modèles microscopiques

Pour modéliser la circulation, on peut penser tout d'abord à décrire le comportement de chaque membre de la population et assembler le tout : c'est ce qu'on appelle un modèle microscopique. Considérons donc N voitures sur un circuit repérées par leurs distances parcourues $x_i(t)$ par rapport à un point du circuit (la ligne de départ). La voiture $i+1$ est derrière la voiture i. Pour obtenir le comportement de ces voitures, une variable importante est la vitesse de chaque voiture, soit $v_i(t) = x_i'(t)$. Trouver une relation entre les variables v_i et les variables x_i correspond à se donner un comportement de l'automobiliste i par rapport à sa propre vitesse et au comportement des autres voitures. Comme l'action de l'automobiliste sur la voiture se cantonne à des variations d'accélération (accélérateur, frein) on cherche donc une loi reliant l'accélération $x_i''(t)$ avec les autres variables. Enormément de modèles ont été introduits et étudiés des années 50 à nos jours.

2.1 Modèle linéaire

Le plus simple consiste à faire dépendre l'accélération de la voiture i de l'écart de vitesse avec la voiture qui la précède, d'où une loi de la forme :

$$x_i''(t) = \lambda[x_{i-1}'(t) - x_i'(t)]$$

avec un cas particulier pour $i = 1$, qui est précédée géographiquement (avec presque un tour de retard) par la voiture $x_n(t)$, et pour laquelle la loi s'écrit

$$x_1''(t) = \lambda[x_n'(t) - x_1'(t)].$$

Dans cette loi le paramètre λ représente l'intensité de la réponse du conducteur i à une différence de vitesse avec le véhicule qui le précède. Il pourrait dépendre de i. Ce modèle porte le nom de modèle linéaire de voiture suiveuse. C'est un modèle très naïf, et qui mène à des résultats incompatibles avec l'observation. En effet notre expérience de conducteurs nous indique que nous ne réagissons pas uniquement à la différence de vitesse avec le véhicule qui nous précède, mais aussi à la distance qui nous sépare de ce véhicule.

2.2 Modèle de Greenberg

Pour rendre compte de ce fait, Greenberg dans les années 60 propose de faire dépendre le coefficient λ de la voiture i de cette distance, avec pour idée que plus la distance entre les voitures est faible, plus forte va être le freinage si le conducteur de la voiture i constate que la voiture $i-1$ roule à une vitesse inférieure à la sienne. D'où la loi :

$$x_i''(t) = \frac{\lambda}{x_{i-1}(t) - x_i(t)}[x_{i-1}'(t) - x_i'(t)]$$

De la même manière, on doit écrire une loi particulière pour $i = 1$ à cause de notre circuit fermé : il faut de plus faire attention à enlever un tour de circuit à x_1 (ou rajouter un tour à x_n) pour calculer la distance entre le conducteur 1 et le conducteur n en queue de peloton. D'où :

$$x_1''(t) = \frac{\lambda}{L + x_n(t) - x_1(t)}[x_n'(t) - x_1'(t)]$$

2.3 Modèle de Edie

Peu après Edie a proposé une amélioration de ce modèle en supposant que la réponse du conducteur est plus violente si sa vitesse est élevée, indépendamment de celle du véhicule qui le précède d'où une loi de la forme :

$$x_i''(t) = \frac{\lambda x_i'(t)}{(x_{i-1}(t) - x_i(t))^2}[x_{i-1}'(t) - x_i'(t)]$$

qui est connue pour être plus fiable pour des trafics légers. La modification pour le premier véhicule est laissée au soin du lecteur).

2.4 Modèle de GMG

Bien entendu les centre de recherche des industries automobiles se sont intéressés au problème, et ont étendu ces modèles. Ainsi le modèle utilisé par les ingénieurs de General Motors Group est une simple généralisation du modèle d'Edie :

$$x_i''(t) = \frac{\lambda (x_i'(t))^m}{(x_{i-1}(t) - x_i(t))^p}[x_{i-1}'(t) - x_i'(t)]$$

avec des coefficients $m = 0.8$ et $p = 2.8$ déterminées à partir de mesures expérimentales.

Tous ces modèles ont connus différentes généralisation, introduisant par exemple un retard de réaction du conducteur, ... Plus récemment, un modèle a été introduit et étudié depuis les années 2000 par Treiber et ses co-auteurs : le modèle IDM. Nous allons nous y arrêter car les auteurs ont développé un simulateur en ligne très intéressant avec beaucoup d'options, qui va nous permettre d'aller plus loin dans cette étude du transport routier sans passer des heures à développer des logiciels.

2.5 Modèle IDM

Modèle IDM pour Intelligent Driver Model : on suppose que le conducteur est raisonnable et essaie à tout prix d'éviter l'accident. Ce modèle un peu plus compliqué que les précédents prend la forme :

$$x_i''(t) = a\left[1 - \left(\frac{x_i'(t)}{v_0}\right)^\delta - \left(\frac{s_i^*}{x_{i-1}(t) - x_i(t)}\right)^2\right]$$

avec $s_i^* = s_0 + x_i'(t)T - \frac{x_i'(t)[x_{i-1}'(t) - x_i'(t)]}{2\sqrt{ab}}$. Remarquons que dans l'expression ci-dessus, l'accélération est décomposée en une accélération souhaitée qui s'annule lorsqu'on atteint la vitesse à laquelle on roulerait si la route était libre, et une décélération due à la présence de la voiture précédente. La signification des paramètres introduits est la suivante :

– v_0 est la vitesse à laquelle on voudrait rouler si on était seul. Exemple : 90 ou 130 km/h.

- T est le temps de parcours à la voiture devant soi : c'est une sorte de distance de sécurité, mais qui tient compte de la vitesse. Un conducteur prudent aurait $T = 2s$. Un chauffard qui colle au voitures qu'il suit correspond à $T = 0.2$ voire moins.
- a est l'accélération qu'on aurait en moyenne en trafic libre. a entre 1 et 2 est raisonnable. On prend ici $a = 0.3$ pour que les effets d'accordéons soient plus visibles.
- b est la décélération moyenne aux alentours de 1 ou 2. On peut prendre $b = 3$ (on freine plus fort qu'on accélère) pour que les effets d'accordéon soient plus visibles.
- δ entre 1 et 2, est l'exposant d'accélération.
- s_0 est la distance minimale entre deux voitures, par exemple $s_0 = 2m$.

Comme on le constate, tous les modèles ci-dessus s'écrivent finalement sous la forme

$$x_i''(t) = b(x_i'(t), x_{i-1}'(t) - x_i'(t), x_{i-1}(t) - x_i(t))$$

pour une certaine fonction $(v, \delta v, d\delta x) \to b(v, \delta v, d\delta x)$, donc si on écrit un programme résolvant ces équations dans ce cadre général, on pourra tester tous ces modèles.

2.6 Travaux pratiques

On téléchargera tout d'abord les programmes fournis par le Gentil Enseignant (GE) et qui utilisent le formalisme de la fonction b ci-dessus avec comme application le modèle de Greenberg et le modèle IDM. Puis on le modifiera pour implémenter les autres modèles et jouer sur les paramètres. Les modèles de type Greenberg sont sensibles à une différence de vitesse entre voitures, pas une différence de position seule. Du coup le programme `cars.sce` est implémenté sur une route infinie, avec une voiture de tête qui freine brusquement avant de recouvrer sa vitesse de croisière, et on regarde l'influence de cette perturbation en vitesse sur les autres voitures. Comme on connaît la vitesse du premier véhicule, on représente graphiquement le trajet relatif des véhicules en retranchant à leur vitesse cette vitesse. Sur la figure 1 ci-dessous sont représentées deux sorties graphiques, avec et sans collision. L'autre

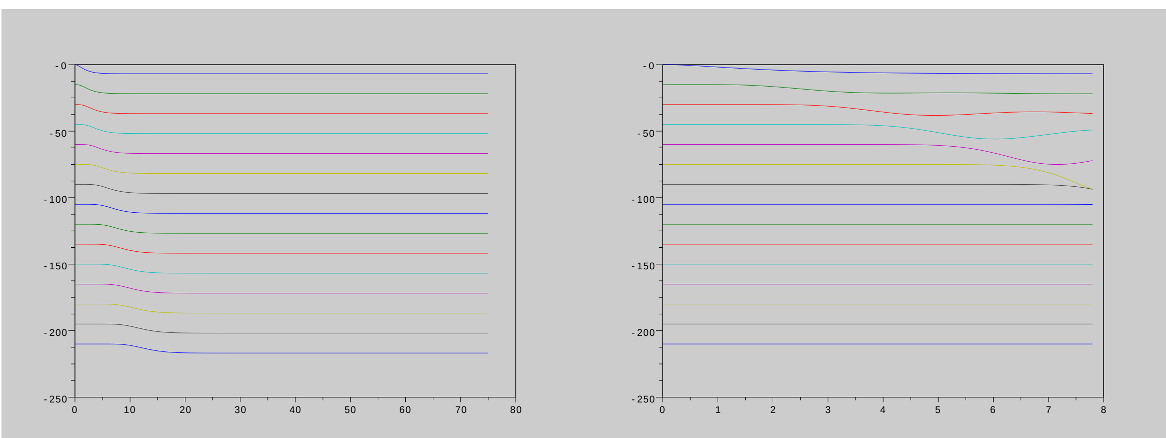

FIG. 1 – Modèle de Greenberg. A gauche : sans collision. A droite : avec collision.

programme carsidm.sce implémente le modèle IDM. Au contraire ce modèle comme on l'a vu comporte la notion de vitesse préférée, vers laquelle les véhicules essaient de tendre, en tenant compte du mouvement des autres. Du coup dans ce programme les véhicules sont initialement à l'arrêt, et la perturbation se fait sur la distance inter-véhicules : on en rapproche deux par exemple. On peut observer des effets d'accordéons mais théoriquement pas de collision (figure 2).

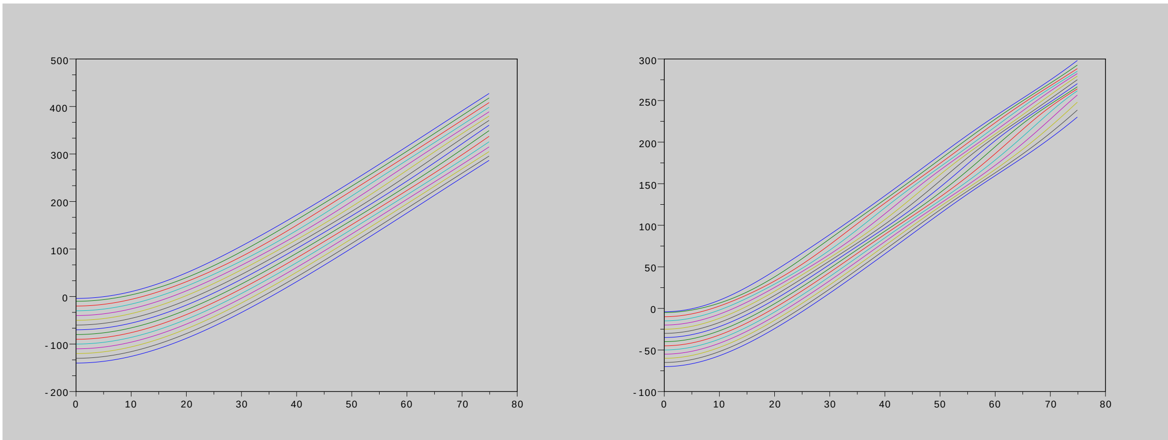

FIG. 2 – Modèle IDM. A gauche : trafic fluide. A droite : trafic chargé avec effet accordéon.

Ces deux programmes affichent la position sur la route du peloton de voiture au cours du temps, dans un repère espace-temps, avec le temps en ordonnée et l'espace en abscisse. Par conséquent les différentes positions d'une voiture au cours du temps sont données par une courbe dans ce plan. Si les courbes sont parallèles, c'est que les voitures roulent à une vitesse relative constante. Si deux de ces lignes se coupent, c'est qu'une voiture a percuté une autre. Les effets d'accordéon sont visibles lorsque des oscillations apparaissent dans ces courbes. Travail à effectuer pour les différents modèles :

1. Implémenter le modèle en modifiant le code fourni.
2. Tester le modèle : apprécier son comportement par rapport à la variation de ses paramètres, et le situer par rapport à ce qu'on attend en réalité. Essayer de montrer les limites du modèle : des cas pour lesquels le résultat de la simulation n'est visiblement pas cohérent avec ce qu'on attendrait.
3. Essayer de reproduire, si le modèle le permet, des effets de bouchons ou d'accordéon. Jouer sur les différences de vitesse et de position des voitures à l'instant initial.

Lancer l'applet Java du site `http://www.traffic-simulation.de/` qui implémente aussi le modèle IDM (voir figure 3), mais avec des changements de files et la gestion de différentes topologie de route et la présence de véhicules plus lents (camions). Etudier les différents régimes de circulations modélisés.

3 Modèles macroscopiques

3.1 Quelques remarques préalables

La modélisation microscopique devient impraticable pour étudier le comportement d'un grand nombre de véhicules car il faudrait connaître le comportement de chaque voiture (et donc du conducteur). On préfère en général caractériser le trafic par des grandeurs globales

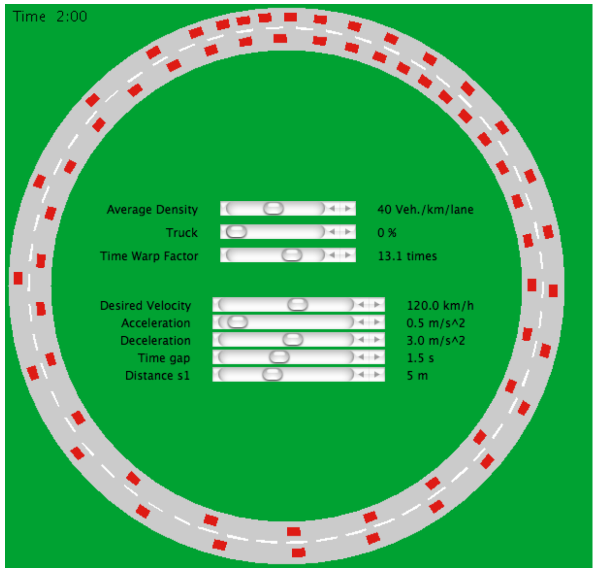

FIG. 3 – Sortie graphique de l'applet java du site mentionné ci-dessus.

indépendantes *a priori* de l'attitude des conducteurs et on cherchera éventuellement par la suite à sophistiquer le modèle pour envisager d'introduire des comportements individuels. C'est ce qu'on appelle un modèle macroscopique.

3.2 Les variables pertinentes

On se place à l'abscisse x de la section d'autoroute et on considère l'intervalle :

$$I_{x,\Delta x} = [x, x + \Delta x];$$

on suppose être à l'instant t (positif) et on considère l'intervalle de temps :

$$T_{t,\Delta t} = [t, t + \Delta t].$$

On peut alors introduire 4 grandeurs :

- le nombre de voitures $N_{\Delta x}(x,t)$ qui sont sur l'intervalle $I_{x,\Delta x}$ de l'autoroute à l'instant t ;
- le nombre de voitures $N_{\Delta t}(x,t)$ qui passent à l'abscisse x pendant l'intervalle de temps $T_{t,\Delta t}$;
- la densité du trafic en x à l'instant t :

$$\rho(x,t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{N_{\Delta x}(x,t)}{\Delta x} \qquad \text{nb. de voitures/unité de distance}$$

- le flux de voitures en x à l'instant t :

$$q(x,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{\Delta t}(x,t)}{\Delta t} \qquad \text{nb. de voitures/unité de temps}$$

Remarque 1 – *Une grandeur plus significative que le flux pour l'automobiliste est la vitesse v. Ce n'est pas une variable indépendante de q et ρ. En effet on a la relation*

$$q = \rho v.$$

– *Pour trouver une densité non nulle et finie lorsque $\Delta x \to 0$, on a supposé implicitement que les voitures ont une taille nulle. En effet si on considère des voitures normales, en dessous d'un certain Δx, il n'y a plus du tout ou plus qu'une voiture dans l'intervalle $I_{x,\Delta x}$. Donc on trouve soit une densité infinie, soit nulle. Il faut donc, dans le cas de voitures réelles, comprendre cette densité comme prise par rapport à une longueur caractéristique suffisamment grande par rapport à la taille de la voiture. Par exemple* 200 *mètres.*

3.3 Principe de conservation du nombre de voitures (ou de masse)

On va essayer d'exprimer le principe élémentaire que, sur l'intervalle d'autoroute $I_{x,\Delta x}$ et pendant l'intervalle de temps $T_{t,\Delta t}$ il n'y a pas de voiture qui se perd!!! On considère la variation du nombre de voitures sur l'intervalle $I_{x,\Delta x}$ pendant l'intervalle de temps $T_{t,\Delta t}$ soit :

$$N_{\Delta x}(x, t + \Delta t) - N_{\Delta x}(x, t)$$

et on exprime cette variation de deux façons :
– en utilisant la densité :

$$N_{\Delta x}(x, t + \Delta t) - N_{\Delta x}(x, t) = \int_x^{x+\Delta x} \rho(y, t + \Delta t)dy - \int_x^{x+\Delta x} \rho(y, t)dy$$

– en utilisant les flux d'entrée et de sortie de véhicules de l'intervalle $I_{x,\Delta x}$

$$N_{\Delta x}(x, t + \Delta t) - N_{\Delta x}(x, t) = \int_t^{t+\Delta t} q(x, s)ds - \int_t^{t+\Delta t} q(x + \Delta x, s)ds$$

En rapprochant ces deux égalités et en divisant par $\Delta x \Delta t$, on obtient :

$$\frac{1}{\Delta x \Delta t}\left\{\int_x^{x+\Delta x} \rho(y, t + \Delta t)dy - \int_x^{x+\Delta x} \rho(y, t)dy\right\} = \frac{1}{\Delta x \Delta t}\left\{\int_t^{t+\Delta t} q(x, s)ds - \int_t^{t+\Delta t} q(x + \Delta x, s)ds\right\}$$

ce qui peut s'écrire :

$$\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} \frac{1}{\Delta t}\left(\rho(y, t + \Delta t)dy - \rho(y, t)\right)dy = -\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{\Delta x}\left(q(x + \Delta x, s)ds - q(x, s)\right)ds$$

On fait alors tendre Δt et Δx vers 0, ce qui donne :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}$$

On dit que l'équation précédente caractérise le principe de conservation de population ou de masse.

Remarque 2 ***Dérivées partielles*** *On utilise ici la notion de dérivées partielles, ce qui veut simplement dire que l'on dérive la fonction par rapport à l'une des variables x ou t.*

Attention aux limites ... *Dans les limites précédentes, on a procédé de façons différentes pour les membres de droite et de gauche ; à droite, on a fait :* $\Delta x \to 0$ *puis* $\Delta t \to 0$ *; à gauche, on a fait* $\Delta t \to 0$ *puis* $\Delta x \to 0$*. Ceci n'est acceptable mathématiquement que si les fonctions* ρ *et* q *sont très "gentilles".*

Pollution *Le raisonnement précédent peut s'appliquer au cas où on considère une population de polluant dans une rivière. On peut alors avoir un ajout* $k(x,t)$ *de polluant tout au long de la rivière ; l'équation devient alors :*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + k(x,t)$$

3.4 Relations de comportement

L'équation de conservation de masse met en relation deux fonctions inconnues. Il nous faut une autre relation entre ρ et q pour pour pouvoir espérer trouver une solution. Cette relation supplémentaire traduit le comportement du flux en fonction de la densité. On peut par exemple faire l'hypothèse raisonnable que : $q(x,t) = q(\rho(x,t))$. ce qui conduit à (en appliquant le théorème de dérivation des fonctions composées) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

En précisant la forme de la fonction q, on est conduit à des équations différentes :
$q = c\rho$ - équation de transport avec la vitesse c constante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -c\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$q = c\rho$ - équation de transport avec la vitesse variable $c = c_M(1 - \frac{\rho}{\rho_M})$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -c_M(1 - 2\frac{\rho}{\rho_M})\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

On peut aussi faire une autre type d'hypothèse, en posant

$$q(x,t) = q(\rho, \frac{\partial \rho}{\partial x})$$

c'est à dire que le flux est aussi fonction de la variation de densité. On peut alors considérer les cas suivants :
$q(x,t) = -\alpha\frac{\partial \rho}{\partial x}$ - équation de diffusion :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

$q(x,t) = c\rho - \alpha\frac{\partial \rho}{\partial x}$ - équation de transport-diffusion :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -c\frac{\partial \rho}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

3.5 Conditions aux limites et conditions initiales

Pour pouvoir résoudre les équations ci-dessus qui sont posées dans le domaine $[0, L]$ d'étude, il faut connaître la densité à l'instant initial et ce qu'il se passe aux bords du domaine.

Cas périodique Un premier cas simple est quand il n'y a pas de bord ! En effet considérons que notre route soit en fait un circuit automobile circulaire de longueur L. On traduit mathématiquement ceci en écrivant que la solution ρ cherchée est une fonction périodique de période L, c'est à dire que notre condition aux limites est simplement

$$\rho(0,t) = \rho(L,t) \quad \text{pour } t \in [0,T]$$

(tout ce qui sort en L rentre en 0), et la condition initiale

$$\rho(x,0) = \rho_0(x) \quad \text{pour } x \in [0,L]$$

avec $\rho_0(0) = \rho_0(L)$.

Cas d'un tronçon de route On doit toujours se donner une condition à l'instant initial :

$$\rho(x,0) = \rho_0(x) \quad \text{pour } x \in [0,L]$$

qui n'est pas astreinte à être périodique, et des conditions aux extrémités de l'autoroute. Le type de condition nécessaire dépend du type d'équation dans ce cas.

Equation de transport On doit connaître la densité là où les voitures entrent dans le tronçon, pas là où elles sortent (cette densité sortante est un résultat du calcul). Si $c > 0$ on se donne une condition pour $x = 0$ et $t \in [0,T]$:

$$\rho(0,t) = \rho_0(t).$$

Equation de diffusion On doit se donner des conditions aux deux extrémités de l'intervalle $[0,L]$. On appelle *conditions de type Dirichlet* des conditions de la forme

$$\rho(0,t) = \rho_0(t) \qquad \rho(L,t) = \rho_L(t)$$

et *conditions de type Neumann* celles de la forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}(0,t) = p_0(t) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial x}(L,t) = p_L(t).$$

3.6 Résolution numérique

Pour résoudre ces équations, il n'est pas facile de trouver (en général) une solution qui s'exprime avec des fonctions classiques. La fonction $(x,t) \to \rho(x,t)$ vit dans un espace de dimension infinie ! Il faut arriver à décrire le phénomène grâce à un nombre fini (mais grand) de réels et ainsi le rendre accessible au calcul par ordinateur. Nous allons proposer ici une méthode que l'on appelle méthode de différences finies dont l'idée est la suivante. On divise les intervalles $[0,L]$ et $[0,T]$ en petits intervalles de pas δx et δt de telle sorte que : $L = N\delta x$ et $T = M\delta t$ et on pose, pour $i = 0,\dots,N$ et $j = 0,\dots,M$:

$$u(i,j) = \rho(i\delta x, j\delta t).$$

On se ramène à écrire les équations en les points de la grille $(i\delta x, j\delta t)$ en se rappelant de la définitions des dérivées partielles. Ceci conduit à :

Equation de transport $(c > 0)$ pour $i = 1, \ldots, N$ et $j = 1, \ldots, M$:

$$u(i,j) = u(i,j-1) - c\frac{\delta t}{\delta x}(u(i,j-1) - u(i-1,j-1)$$

On remarque que, pour $j = 0$, la valeur de $u(i,j)$ est connue (condition initiale) et que pour $i = 0$, soit $u(i,j)$ est connu (condition en entrée dans le cas d'un tronçon de route) ou bien on a $u(0,j) = u(N,j)$ (conditions périodiques pour un circuit automobile).

Equation de diffusion pour $i = 1, \ldots, N-1$ et $j = 1, \ldots, M$:

$$u(i,j) = u(i,j-1) + \alpha\frac{\delta t}{\delta x^2}(u(i+1,j-1) - 2u(i,j-1) + u(i-1,j-1))$$

avec, pour $j = 0$, $u(i,0)$ donné et pour $i = 0$ et $i = N$, soit $u(i,j)$ est connu par les conditions aux limites, soit on écrit l'équation en $i = 0$ et $i = N$ avec la convention que $u(-1,j) = u(N-1,j)$ et $u(N+1,j) = u(1,j)$.

On peut voir qu'il alors facile de connaître u en tout point de la grille, en faisant varier j de 1 à M (évolution dans le sens du temps).

Remarque 3 *Un schéma numérique a parfois une condition de stabilité que ses paramètres doivent respecter pour que la solution approchée soit effectivement valide. Dans le cas des deux schémas précédents, il faut choisir δt et δx respectivement tels que $c\delta t \leq \delta x$ pour le premier et $\alpha\delta t < \frac{1}{2}\delta x^2$ pour le second. Si vous ne respectez pas ces conditions, la solution du schéma numérique augmente inconsidérément (on dit qu'elle explose). On dit alors que le schéma est instable pour ces paramètres.*

3.7 Interprétation des graphes

Les résultats numériques obtenus au paragraphe précédent nous donne des valeurs numériques $u(i,j)$ pour $i = 0, \ldots, N$ et $j = 0, \ldots, M$ qui sont des valeurs approchées de $\rho(i\delta x, j\delta t)$. Les programmes proposés fournissent des quatre type de vues :

Vue 3D : on représente le graphe de la fonction ρ (c'est à dire u dans le programme), c'est la surface définie par :

$$\{(x, t, \rho(x,t)), \qquad x \in [0, L], \quad t \in [0, T]\}$$

Vue en courbes de niveau : on représente un ensemble de courbe de même "densité" ou "niveau" C et ceci pour plusieurs valeurs de C :

$$\{(x,t), \rho(x,t) = C\}$$

Vue à instant donné : on représente la fonction, pour $\bar{t}$ fixé, et $x \in [0, L]$:

$$x \to \rho(x, \bar{t})$$

Vue à abscisse donnée : on représente la fonction, pour $\bar{x}$ fixé et $t \in [0, T]$:

$$t \to \rho(\bar{x}, t)$$

Les trois dernière vues sont des "coupes" de la première : horizontale, verticale à temps constant et verticale à abscisse constante.

3.8 Travaux pratiques

La mise en pratique sur ordinateur a pour but de comprendre les différents concepts introduits ci-dessus sur des cas simples. On fera attention à distinguer les paramètres qui sont de nature différente :

- modèle étudié : transport, diffusion ou autre ;
- paramètres "physique" du modèle : vitesse, coefficient de diffusion, densité ou vitesse maximale ;
- paramètres conditions initiales et aux limites ;
- paramètres de type simulation numérique : δx et δt et surtout les rapports $\frac{\delta x}{\delta t}$ ou $\frac{\delta x^2}{\delta t}$.

Un essai doit mettre en valeur les différentes vues possibles. On pourra faire des essais avec plusieurs jeux de paramètres proches les uns des autres pour montrer ce qui se passe et commenter les résultats. Vous devez :

- introduire des conditions aux limites non nulles dans les programmes ;
- considérer des conditions initiales et aux limites de dépendant pas des valeurs numériques de δx et δt ;
- pouvoir juxtaposer les courbes de densité correspondant à plusieurs valeurs de t (ou de x) dans les vues à instant (ou abscisse) constant ;
- envisager de calculer le flux et de représenter des vues de ce flux ;
- envisager de modifier la formule de la vitesse variable ;
- toute contribution originale et intelligente est la bienvenue.