Méthode de séparation des variables

Exercice 1
Une plaque rectangulaire de longueur L et de largeur e est maintenue sur un de ses cotés à la température $f(y)$, et sur le coté opposé à la température nulle. Les deux autres cotés sont isolés. Déterminer par la méthode de séparation des variables la répartition de température $T(x,y)$ dans la plaque en régime stationnaire, c'est à dire résoudre :

$$\begin{cases} \Delta T = 0 & \textit{pour } (x,y) \in]0,L[\times]0,e[\\ T = f & \textit{pour } (x,y) \in \{0\}\times]0,e[\\ T = 0 & \textit{pour } (x,y) \in \{L\}\times]0,e[\\ \frac{\partial T}{\partial y} = 0 & \textit{pour } (x,y) \in]0,L[\times(\{0\}\cup\{e\}) \end{cases}$$

Exercice 2
Une barre de longueur L, initialement à la température $T_0(x)$, est isolée à ses deux extrêmités. Déterminer l'évolution de température dans la barre, solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 & \textit{pour } (x,t) \in]0,L[\times]0,T[\\ T = T_0 & \textit{pour } (x,y) \in]0,L[\times\{0\} \\ \frac{\partial T}{\partial x} = 0 & \textit{pour } (x,t) \in \{0\}\times]0,T[\end{cases}$$

où κ est une constante thermique donnée, et $x \to T_0(x)$ est la répartition initiale de température.

Exercice 3
Un plaque $\Omega =]0,L[\times]0,K[$ est chauffée par une source interne et maintenue à une température nulle au bord. On cherche à déterminer la répartition de température u dans la plaque, solution de

$$-\Delta u = \frac{P_0}{\lambda} \quad \textit{sur } \Omega, \qquad u = 0 \quad \textit{sur } \partial\Omega$$

1. *Montrer que $v(x,y) = \frac{P_0}{2\lambda}x(L-x)$ est solution de $-\Delta v = \frac{P_0}{\lambda}$.*
2. *En déduire que $w = u - v$ est solution d'un problème sans sources de chaleur, avec deux conditions non homogènes sur les bords horizontaux.*
3. *Justifier par un argument de symétrie que $u_y = 0$ en $y = K/2$.*
4. *En remplaçant la condition aux limites en $y = K$ par cette condition homogène, résoudre le problème par séparation de variables sur $]0,L[\times]0,K/2[$.*
5. *En déduire la solution du problème de départ.*

Exercice 4
A $t = 0$, on plonge l'extrémité $x = 0$ d'une barre de longueur L initialement à température nulle dans un milieu à température T_0, l'autre extrémité demeurant à température nulle. On veut déterminer l'évolution de la température au cours du temps.

1. *Déterminer la répartition de température $u_s(x)$ dans barre à l'état stationnaire.*
2. *On pose $v(x,t) = u(x,t) - u_s(x)$. Déterminer de quelle EDP avec conditions aux limites est solution w.*
3. *Par séparation des variables calculer w, puis u.*

Exercice 5
Reprendre le problème ci-dessus lorsque les deux extrémités de la barre sont maintenues à température nulle, et qu'il existe un terme source constant $\frac{P_0}{\lambda}$.

Exercice 6 (Séparation de variables et ailette en dimension deux)
On étudie la répartition de chaleur dans une ailette parallélépipédique rectangle d'épaisseur e suivant l'axe des z, de hauteur H suivant l'axe des y et de longueur L suivant l'axe des x (cf figure). On note λ sa conductivité thermique, h le coefficient d'échange thermique des parois $z = 0$ et $z = e$ et h_1 le coefficient d'échange thermique en $x = L$.

On suppose que l'épaisseur est suffisamment faible pour qu'on puisse supposer que T ne dépend que de (x, y), mais on ne fait pas l'hypothèse usuelle sur les ailettes (où T ne dépend que de x). L'équation vérifiée par $T(x, y)$ est alors

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - m^2 T = 0 \quad \text{où} \quad m^2 = \frac{2h}{\lambda e}.$$

On considère les conditions aux limites

$$T(0, y) = f(y), \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(L, y) = h_1 T(L, y), \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x, H) = 0$$

1. *Par la méthode de séparation des variables, déterminer en introduisant un paramètre fixant la valeur de $-\frac{h''}{h}$, quelles équations différentielles doivent vérifier des fonctions g et h telles que $T(x, y) = g(x)h(y)$ soit solution de l'équation aux dérivées partielles ci-dessus.*

2. *En fonction du signe de ce paramètre, donner les formes possibles des solutions de l'équation différentielle en h, et déterminer toutes celles qui sont compatibles avec les conditions aux limites en $y = 0$ et $y = H$, en fonction d'un paramètre $k \in \mathbb{N}$.*

3. *En déduire les solutions de l'équation en g, et montrer que la condition en $x = L$ sur g conduit à une expression de cette fonction grâce à $\mathrm{sh}(\omega_k(x - L))$ et $\mathrm{ch}(\omega_k(x - L))$, avec $\omega_k = \sqrt{m^2 + (\frac{k\pi}{H})^2}$ pour chaque k de la question précédente.*

4. *Réaliser la dernière condition aux limites en $x = 0$ grâce à une combinaison des fonctions solutions trouvées précédemment, et calculer les coefficients de cette combinaison.*

5. *Expliciter le résultat si on suppose que $y \to f(y)$ est une fonction constante égale à T_0.*

Exercice 7 (Séparation de variables et équations de Navier-Stokes)
Lors de l'étude de l'écoulement en rotation d'un fluide obéissant aux équations de Navier-Stokes, un ingénieur obtient l'équation suivante :

$$\begin{cases} (1) & \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{3\nu}{r}\frac{\partial \alpha}{\partial r} - \nu \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} = 0 & \text{pour } t \in]0, T[, r \in [0, R[, \\ (2) & \alpha(t, R) = 0 & \text{pour } t \in]0, T[, \\ (3) & \alpha(0, r) = \alpha_0(r) & \text{pour } r \in [0, R[\end{cases}$$

où $(t, r) \to \alpha(t, r)$ est la fonction inconnue. Pour des raisons physiques, l'ingénieur s'attend au comportement suivant de la fonction α :

$$(4) \qquad \lim_{t \to +\infty} \alpha(t, r) = 0 \qquad \lim_{r \to 0} |\alpha(t, r)| < +\infty.$$

N'ayant malheureusement pas suivi de cours sur les fonctions de Bessel, il vous demande conseil. Répondez aux questions suivantes pour résoudre son problème :

1. *On cherche $\alpha(r, t)$ sous forme à variables séparées $a(t)b(r)$. Déterminer, en fonction d'un paramètre k, deux équations différentielles que doivent vérifier a et b pour que α vérifie (1).*

2. *Résoudre l'équation en a. Déterminer de quel signe doit être k pour que la solution soit en accord avec les considérations physiques de l'ingénieur.*

3. *Donner la solution générale de l'équation en b, en fonction de deux paramètres a_0 et a_1.*

4. *En faisant appel à l'autre considération physique, montrer que l'une de ces constantes doit être nulle.*

5. *En déduire les solutions de l'équation (1) satisfaisant (4).*

6. *Que doit vérifier k pour que la condition (2) soit satisfaite ?*

7. *(Bonus) En raisonnant par analogie avec les séries de Fourier, que resterait-il à faire pour déterminer une solution vérifiant (3) pour une condition initiale $\alpha_0(r)$ générale.*

Exercice 8 (Séparation de variables)
On considère une pièce métallique occupant une couronne circulaire de rayons intérieur et extérieur R_1 et R_2 avec $0 < R_1 < R_2$. Pour étudier la thermique de cette pièce, on recherche une solution de l'équation de la chaleur bi-dimensionnelle écrite en coordonnées polaires ($x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$) :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0 \qquad (*)$$

Par application de la méthode de séparation des variables, on cherche T sous la forme $T(r,\theta) = g(r)h(\theta)$ où g et h sont les nouvelles inconnues du problème.

1. *Sachant que la symétrie circulaire nous conduit à supposer h 2π-périodique, déterminer en fonction d'un paramètre $\nu^2 \geq 0$, deux équations différentielles que doivent vérifier g et h pour que T soit solution de $(*)$.*
2. *Dans le cas $\nu = 0$, résoudre ces deux équations. Que devient h compte-tenu de la périodicité ?*
3. *Dans le cas $\nu \neq 0$, résoudre ces deux équations. Quelles valeurs de ν sont compatibles avec la périodicité de la solution ?*
4. *On considère la condition aux limites $g(R_1) = 0$. Montrer que cela conduit à rechercher une solution du problème sous la forme :*
$$T(r,\theta) = A_0 \ln\frac{r}{R_1} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{r}{R_1}\right)^k - \left(\frac{r}{R_1}\right)^{-k}\right](A_k\cos k\theta + B_k \sin k\theta)$$
où les coefficients A_k, B_k sont encore inconnus.
5. *Etant donnée une température connue $f(\theta)$, on considère la condition $T(R_2) = f(\theta)$. Exprimer les coefficients A_k, B_k ci-dessus en fonction de f.*

Exercice 9 (Champ de température à symétrie de révolution)

1. *Soit un champ de température $\hat{T}(x,y,z)$ présentant une symétrie de révolution, c'est à dire que*
$$\hat{T}(x,y,z) = T(r,z)$$
où $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Montrer que $\Delta\hat{T} = 0$ si et seulement si T vérifie
$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$
2. *On considère un conducteur de chaleur cylindrique de rayon R situé entre les plans $z = 0$ et $z = L$, dont la température vérifie l'équation précédente munie des conditions aux limites suivantes :*
$$\frac{\partial T}{\partial z}(r,0) = 0 \quad T(r,L) = 0 \quad T(R,z) = f(z)$$
On cherche la solution sous la forme $T(r,z) = g(r)h(z)$. Déterminer les équations différentielles que doivent vérifier g et h. Préciser de quel type d'équation peut vérifier h compte tenu des conditions aux limites. Intégrer cette équation en h.
3. *Donner la solution générale de l'équation en g. Eliminer un paramètre en supposant que la température est finie en $r = 0$.*
4. *Donner une expression intégrale de la solution.*
5. *Adapter le raisonnement précédent dans le cas des conditions aux limites suivantes*
$$\frac{\partial T}{\partial z}(r,0) = 0 \quad T(r,L) = f(r) \quad T(R,z) = 0$$

Exercice 10 (Champ de temérature en dimension trois)
Adapter la méthode de séparation des variables en dimension 3 pour le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta T = 0 & \text{sur } [0,a]\times[0,b]\times[0,c] \\ T(0,y,z) = f(y,z) & \text{sur } [0,b]\times[0,c] \\ T(a,y,z) = 0 & \text{sur } [0,b]\times[0,c] \\ T(x,0,z) = T(x,b,z) = 0 & \text{sur } [0,a]\times[0,c] \\ T(x,y,0) = T(x,y,c) = 0 & \text{sur } [0,a]\times[0,b] \end{cases}$$