Fonctions de Bessel et équations différentielles

Exercice 1
On considère pour $m > 0$ l'équation différentielle

$$(E_1) \qquad y'' + \frac{1}{x}y' + (m^2 - \frac{\nu^2}{x^2})y = 0 \quad \textit{sur }]0, +\infty[$$

En effectuant le changement de variable $t = mx$, et en posant $z(t) = y(x)$, montrer que z vérifie une équation de Bessel. En déduire l'expression de la solution générale de (E_2). Même question pour l'équation

$$(E_2) \qquad y'' + \frac{1}{x}y' - (m^2 + \frac{\nu^2}{x^2})y = 0 \quad \textit{sur }]0, +\infty[$$

Exercice 2 (Ailette de révolution d'épaisseur uniforme)
On considère un corps cylindrique de conductivité thermique λ, de rayon R_1, sur lequel est disposé perpendiculairement une ailette de la forme d'une couronne circulaire de rayon extérieur R_2 et d'épaisseur e. On note h le coefficient d'échange thermique des faces supérieures et inférieures de l'ailette. On suppose négligeable le flux de chaleur à travers le morceau de cylindre de rayon R_2 et d'épaisseur e formant le bout de l'ailette. On suppose enfin le corps cylindrique à une température T_0.

1. *En supposant que la température dans l'ailette est stationnaire et ne dépend que de la distance r d'un point à l'axe de révolution du corps cylindrique, déterminer l'équation vérifiée par T.*
2. *En déduire en fonction de données du problème l'expression du champ de température dans l'ailette, ainsi que le flux de chaleur qu'elle dégage.*

Exercice 3
On considère l'équation différentielle, pour a, b réels,

$$(E_3) \qquad y'' + \frac{a}{x}y' \pm b^2 y = 0 \quad \textit{sur }]0, +\infty[$$

En effectuant le changement de fonction inconnue $y(x) = x^\nu z(x)$, et en choisissant ν de manière ad hoc, exprimer la solution de (E_3) grâce aux fonctions de Bessel, selon le signe devant le coefficient b^2.

Exercice 4
On considère l'équation différentielle, pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$:

$$(E_4) \qquad y'' + \frac{\alpha}{x}y' \pm \gamma^2 x^\beta y = 0 \quad \textit{sur }]0, +\infty[$$

1. *Effectuer le changement de variable $t = x^{\frac{1}{\mu}}$, et en posant $z(t) = y(x)$, déterminer l'équation différentielle que z vérifie.*
2. *On se place dans le cas $\beta \neq -2$. Ramener l'équation précédente à une équation du type de l'exercice 3 en choisissant μ convenablement. En déduire la solution générale de (E_3).*
3. *On suppose maintenant que $\beta = -2$ (Equation d'Euler). Montrer que x^r est solution de cette équation si r est racine d'un trinôme du second degré.*
   (a) *Donner l'expression réelle de la solution de (E_3) dans le cas où ce trinôme admet deux racines réelles distinctes.*
   (b) *Même question lorsqu'il y a deux racines complexes conjuguées.*
   (c) *On se place dans le cas d'une racine double. Exprimer l'équation en fonction du seul paramètre γ. Effectuer le changement de fonction inconnue $y = x^{-\gamma}z$ pour trouver toutes les solutions de l'équation (E_3) dans ce cas.*

Exercice 5
Donner la solution générale de l'équation différentielle

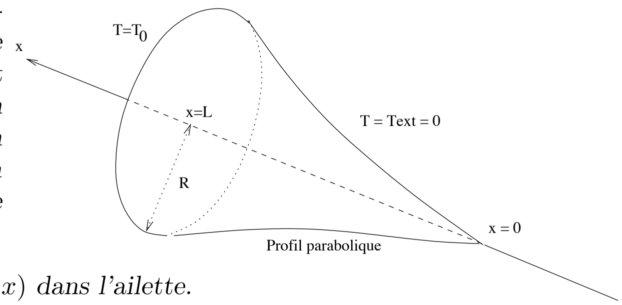
$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{25}{4x^2}y = 0$$

puis déterminer la solution qui vérifie $y(1) = 1$ et $y(e^{\frac{\pi}{3}}) = 0$.

Exercice 6

On considère une ailette de révolution de profil parabolique, de longueur L. Le rayon de la section d'abscisse x est nul pour $x = 0$, vaut R en $x = L$ et a donc un profil parabolique.

L'ailette est positionnée en $x = L$ sur un corps à température $T_0 > 0$ qu'il s'agit de refroidir. La température extérieure est supposée nulle $T_{\text{ext}} = 0$. Le coefficient de conductivité thermique de l'ailette est noté λ et son coefficient d'échange thermique h. La température en $x = 0$ doit être finie. On se place dans l'approximation des ailettes vue en cours : on suppose que la température T ne dépend que de x.

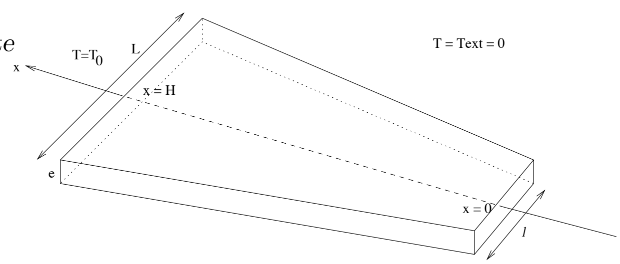


1. *Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$ dans l'ailette.*
2. *En utilisant le formulaire, donner la solution générale de cette équation.*
3. *Déterminer la solution du problème grâce aux conditions aux limites.*
4. *Calculer le flux de chaleur dégagé par l'ailette en fonction des données thermiques et géométriques du problème.*

Exercice 7

On considère une ailette d'épaisseur e, de forme prismatique. On note L la largeur de la grande base, ℓ celle de la petite (en $x = 0$) et H sa hauteur (suivant l'axe des x).

Le coefficient de conductivité thermique de l'ailette est noté λ et son coefficient d'échange thermique h. L'ailette est positionnée en $x = H$ sur un corps à température $T_0 > 0$ qu'il s'agit de refroidir. La température extérieure est supposée nulle $T_{\text{ext}} = 0$. On se place dans l'approximation des ailettes vue en cours : on suppose que la température T ne dépend que de x. On suppose enfin que e est négligeable devant ℓ, et que le bout de l'ailette ne dégage pas de chaleur : $\frac{\partial T}{\partial x}(0) = 0$.

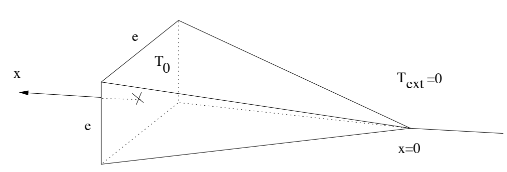


1. *Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$ dans l'ailette.*
2. *Effectuer un changement de variable de la forme $y = x + x_0$ pour se ramener à une équation de Bessel en y. On notera $U(y) = T(x)$ l'inconnue de cette nouvelle équation.*
3. *Donner la forme générale des solutions de cette équation.*
4. *Grâce aux conditions aux limites en $x = 0$ et $x = H$, donner l'expression de la solution du problème.*
5. *Calculer le flux de chaleur dégagé par l'ailette en fonction des données thermiques et géométriques du problème.*

Exercice 8 (Ailette pyramidale)

On considère une ailette de forme pyramidale : son sommet est en $x = 0$, sa base, un carré de coté e, est en $x = L$ (cf figure). Le matériau utilisé correspond à un coefficient thermique λ, et l'ailette est posée sur un corps à la température $T(L) = T_0$.

On suppose que la température est finie en $x = 0$, et que la température extérieure T_{ext} est nulle. On se place dans l'hypothèse géométrique des ailettes vue en cours : les dimensions sont telles qu'on peut supposer que la température ne dépend que de x.



1. *Déterminer l'équation vérifiée par la température $T(x)$.*
2. *Donner la solution générale de cette équation.*

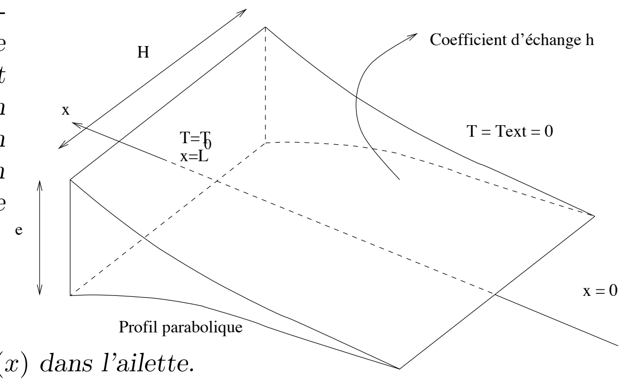
3. *Utiliser les conditions aux limites pour fixer les coefficients apparaissant dans cette forme générale.*

4. *En déduire le flux de chaleur dégagé par l'ailette en fonction des paramètres géométriques et thermiques.*

Exercice 9

On considère une ailette à base rectangulaire, de profil parabolique, de longueur L (cf figure). L'épaisseur de la section d'abscisse x est nulle en $x = 0$, à dérivée par rapport à x nulle pour $x = 0$, vaut e en $x = L$ et a donc un profil parabolique. La profondeur de l'ailette est H.

L'ailette est positionnée en $x = L$ sur un corps à température $T_0 > 0$ qu'il s'agit de refroidir. La température extérieure est supposée nulle $T_{\text{ext}} = 0$. Le coefficient de conductivité thermique de l'ailette est noté λ et son coefficient d'échange thermique h. La température en $x = 0$ doit être finie. On se place dans l'approximation des ailettes vue en cours : on suppose que la température T ne dépend que de x.



1. *Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$ dans l'ailette.*

2. *On suppose pour la suite du problème e très petit devant H. Montrer alors que le périmètre d'une section quelconque peut être pris égal à $2H$ et simplifier l'équation de la question précédente.*

3. *En utilisant le formulaire, donner la solution générale de cette dernière équation.*

4. *Déterminer la solution du problème grâce aux conditions aux limites.*

5. *Calculer le flux total de chaleur dégagé par l'ailette en fonction des données thermiques et géométriques du problème.*

   On s'intéresse à déterminer, à volume donné (donc à coût donné), comment choisir L et e pour que le flux de chaleur à travers $x = L$ soit le plus important possible. Pour cela, on pose $H = 1$ (on optimise alors le flux par unité de profondeur).

6. *Calculer tout d'abord le volume de l'ailette en fonction de L, e ($H = 1$).*

7. *On considère une ailette de volume V fixé. En déduire e en fonction de L et V. Exprimer alors le flux total dégagé par l'ailette en substituant e par son expression en fonction de L et V.*

8. *Déterminer une relation entre h, L, V et λ pour que la dérivée du flux total par rapport à L s'annule.*

9. *A quelle relation cela correspond-t-il pour les variables h, L, λ et e ?*

Exercice 10

On considère une ailette de longueur L, de section carrée variable. Le coté du carré est proportionnel à x^2 et vaut a en $x = L$.

L'ailette est positionnée en $x = L$ sur un corps à température $T_0 > 0$ qu'il s'agit de refroidir. La température extérieure est supposée nulle $T_{\text{ext}} = 0$. Le coefficient de conductivité thermique de l'ailette est noté λ et son coefficient d'échange thermique h_e. La température en $x = 0$ doit être finie. On se place dans l'approximation des ailettes vue en cours : on suppose que la température T ne dépend que de x.

1. *Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$ dans l'ailette.*

2. *En utilisant le formulaire, donner la solution générale de cette équation.*

3. *Déterminer la solution du problème grâce aux conditions aux limites.*

4. *Calculer le flux de chaleur dégagé par l'ailette en fonction des données thermiques et géométriques du problème.*

5. *Calculer le volume de l'ailette en fonction de a et de L.*

6. *A volume fixé, déterminer quelle relation doivent vérifier a et L de sorte le flux de chaleur dégagé par l'ailette soit maximal.*

Exercice 11

On considère une ailette de hauteur H, de section rectangulaire variable. Les cotés du rectangles sont proportionnels à x et valent e et L en $x = H$. L'origine du repère est donc prise au sommet de l'ailette.

Cette ailette est positionnée en $x = H$ sur un corps à température $T_0 > 0$ qu'il s'agit de refroidir. La température extérieure est supposée nulle $T_{\text{ext}} = 0$. Le coefficient de conductivité thermique de l'ailette est noté λ et son coefficient d'échange thermique h_e. La température en $x = 0$ doit être finie. On se place dans l'approximation des ailettes vue en cours : on suppose que la température T ne dépend que de x.

1. *Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$ dans l'ailette.*
2. *En utilisant le formulaire, donner la solution générale de cette équation.*
3. *Déterminer la solution du problème grâce aux conditions aux limites.*
4. *On suppose dorénavant que les côtés du rectangle à l'abscisse x ne sont plus proportionels à x mais à x^2.*
5. *Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$ dans l'ailette.*
6. *En utilisant le formulaire, donner la solution générale de cette équation.*
7. *Déterminer la solution du problème grâce aux conditions aux limites.*
8. *Calculer le flux de chaleur dégagé par l'ailette en fonction des données thermiques et géométriques du problème.*
9. *Calculer le volume de l'ailette en fonction de e, L et H.*
10. *A volume fixé, déterminer quelle relation doivent vérifier e, H et L de sorte le flux de chaleur dégagé par l'ailette soit maximal.*