TP 9 : Influence des erreurs d'arrondi sur la résolution d'un système linéaire

On cherche à résoudre le système $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

1. Calculer grâce à Scilab la solution exacte x du système. On utilisera la commande \ (également appelée backslash). Quelle est la différence entre la commande $A\backslash b$ et la commande $inv(A) * b$?
2. Calculer la solution y du système perturbé $(A + \Delta A)y = b$ avec

$$\Delta A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.08 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & -0.02 & -0.11 & 0 \\ -0.01 & -0.01 & 0 & -0.02 \end{pmatrix}$$

   On note $\Delta x = y - x$. En déduire le coefficient d'amplification d'erreur

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x + \Delta x\|_2} \times \frac{\|A\|_2}{\|\Delta A\|_2}$$

   Dans cette expression la norme 2 d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ est définie par $\|u\|_2^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2$ et celle d'une matrice A correspond à celle de l'application linéaire associée. Elles se calculent grâce à la commande `norm(·,2)`. Que remarquez-vous ?
3. Calculer la solution z du système perturbé $Az = b + \delta b$ avec

$$\delta b = \begin{pmatrix} 0.01 \\ -0.01 \\ 0.01 \\ -0.01 \end{pmatrix}$$

   On note $\delta x = z - x$. En déduire le coefficient d'amplification d'erreur

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \times \frac{\|b\|_2}{\|\Delta b\|_2}$$

   Que remarquez-vous ?
4. Calculer le conditionnement de la matrice A en norme 2, $cond_2(A) = ||A||_2||A^{-1}||_2$. Retrouver ce résultat grâce à la commande `cond` en Scilab. On remarque que le conditionnement est du même ordre que le coefficient d'amplification, il est aussi très grand. En fait on a les deux relations suivantes :

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x + \Delta x\|_2} \times \frac{\|A\|_2}{\|\Delta A\|_2} \leq cond_2(A) \text{ soit } \frac{\|\Delta x\|_2}{\|x + \Delta x\|_2} \leq cond_2(A)\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}$$

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \times \frac{\|b\|_2}{\|\Delta b\|_2} \leq cond_2(A) \text{ soit } \frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq cond_2(A)\frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2}$$

   En conclusion, si la matrice A a un petit conditionnement, l'amplification d'erreur sera petite. Si la matrice A a un grand conditionnement, l'erreur d'amplification peut être grande ou petite et il existe des cas comme celui de cet exercice où l'erreur d'amplification est aussi grande que le grand conditionnement.
5. Calculer les valeurs propres de la matrice A et comparer le ratio $\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{max}}$ avec le conditionnement. On pourra utiliser la commande `spec`. On remarque que le conditionnement de A en norme 2 est égal au quotient de la plus grande valeur propre de A par la plus petite valeur propre de A. Cette égalité n'est valable que pour les matrices normales, c'est-à-dire les matrices qui vérifient l'égalité $AA^T = A^TA$. C'est le cas en particulier pour les matrices symétriques et les matrices orthogonales.
6. refaire les calculs ci-dessus dans le cas de la norme infinie `norm(·,'inf')`.