TP 8 : Détermination d'une racine et d'un minimum local d'une fonction

Recherche d'une racine Soit un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, et une fonction f continue sur $[a, b]$, avec $f(a)f(b) < 0$. On cherche une valeur approchée d'une racine de $f = 0$. Pour cela on considère l'algorithme de dichotomie suivant : Coder l'algorithme ci-dessus en Scilab en déterminant la bonne condition sur $f(m)$ à

Algorithme 1 : Méthode de dichotomie

`fonction` res=`dichotomie(`f, a, b`)`

tant que $|a - b| > \varepsilon$ **faire**
- $m = \frac{a+b}{2}$
- **si** *condition sur* $f(m)$ **alors**
  - $a = m$
- **sinon**
  - $b = m$

res=$\frac{a+b}{2}$
`finfonction`

utiliser. Tester avec la fonction$f(x) = \cos x - x^2$ sur $[0, 1]$ et en déduire une approximation de la racine à 10^{-8} près. Tester avec la fonction $g(x) = x^2$ sur l'intervalle $[-2, 1]$. L'algorithme fonctionne-t-il ? Pourquoi ?

Recherche d'un minimum On veut écrire un algorithme qui à partir des valeurs $a, b \in \mathbb{R}$ et d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ trouve une valeur approchée, à 10^{-8} près du $x \in]a, b[$ tel que $f(x)$ soit minimum i.e. que $f'(x) = 0$ (mais sans calculer la dérivée de f !). On suppose que dans l'intervalle $[a, b]$ le graphe de f est convexe c'est à dire que $f'(x)$ est une fonction croissante. On va choisir 2 points c et d dans l'intervalle $[a, b]$ pour chercher à réduire l'intervalle en étudiant la valeur de la pente k de la corde tracée entre c et d.

1. Soit $g(t) = f(t) - tf'(c)$ montrer que g est croissante. Comparer $g(c)$ et $g(d)$ et en déduire que
$$f'(c) \leq \frac{f(c) - f(d)}{c - d} = k.$$
2. De même montrer que $f'(d) \geq \frac{f(c) - f(d)}{c - d} = k$.
3. En remarquant que $\forall t \in [a, c[$, $f'(t) < f'(c)$ et $\forall t \in]d, b]$, $f'(d) < f'(t)$, déduire comment réduire la taille de l'intervalle $[a, b]$ suivant le signe de k.
4. Choisir les points c et d en fonction de a et b (par exemple équidistants).
5. En déduire un procédure Scilab donnant le minimum d'une foncion f sur un intervalle $[a, b]$ à 10^{-8} près.
6. Tester l'algorithme sur x^2, $|x|$ sur $[-1, 1]$ et $\cos x$ sur $[0, 2\pi]$.