TP 7 : approximation des fonctions par moindres carrés

Soit un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, et une fonction F continue sur $[a, b]$. On se pose la question d'approcher au mieux cette fonction par un polynôme de degré inférieur ou égal à n donné. On a déjà vu une manière d'approcher une fonction en utilisant sa série entière. Ici, on va poser le problème comme un problème de minimisation : on va chercher le polynôme le plus proche de la fonction en un certain sens. Pour cela, on introduit pour $N \geq n$ une subdivision $(x_k)_{0\leq k\leq N}$ de l'intervalle $[a, b]$ et on définit l'écart entre deux fonctions f, g continues sur $[a, b]$ en posant

$$E(f-g) = \left(\sum_{k=0}^{N}(f(x_k) - g(x_k))^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de dégré inférieur ou égal à n, c'est à dire

$$\mathcal{P}_n = \left\{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\right\}.$$

La forme E est une norme $\mathcal{P}_N$ (et donc sur $\mathcal{P}_n$) car le seul polynôme de degré inférieur ou égal à N qui s'annule en au moins $N+1$ points est le polynôme nul. Cette norme dérive du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=0}^{N} f(x_k)g(x_k).$$

On cherche donc le polynôme de $\mathcal{P}_n$ le plus proche de F, c'est à dire à résoudre le problème

$$\min_{P\in\mathcal{P}_n} E(P-F)$$

Ce problème de minimisation s'écrit aussi en fonction des coefficients du polynôme cherché

$$\min_{(a_0,a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}} \sum_{k=0}^{N} |a_0 + a_1 x_k + \cdots + a_n x_k^n - f(x_k)|^2$$

Soit la matrice de Vandermonde, $N+1$ lignes et $n+1$ colonnes $A = (x_k^j)$, et le vecteur de R^{N+1} défini par $d = (F(x_k))$, il s'agit donc de

$$\min_{a=(a_0,a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}} \|Aa - d\|^2$$

On peut montrer facilement en différentiant que le minimum est atteint pour a solution de

$$A^T Aa = A^T b$$

On demande de créer une procédure calculant ce polynôme de meilleure approximation au sens des moindres carrés et letraçant ainsi que la fonction. La procédure prendra comme arguments la fonction considérée, n, (x_k) et une subdivision (y) pour le tracé. On testera celle-ci sur la fonction sin sur $[-2\pi, 2\pi]$ et $\ln(1+x)$ sur $[0, 2]$, et sur d'autres exemples. A noter que Scilab résout le système au moindres carrés ci-dessous simplement avec l'instruction

$$a = A\backslash b.$$

On pourra par curiosité voir ce que cela donne si on résout le système avec $A^T A$. Comparer le polynôme au moindres carrés et le polynôme interpolateur dans le cas $n = N$. Considérer la fonction $x \rightarrow \frac{1}{1+8x^2}$ sur $[-1, 1]$ dans le cas $n = N$ et dans le cas $n < N$, et faire augmenter n. Qu'observe -t-on ?