TP 5 : Peut-on approcher une fonction par une série entière ?

Le but de ce TP est d'explorer l'approximation d'une fonction par une série entière sur deux exemples simples : la fonction $x \to \sin x$ et la fonction $x \to \ln(1+x)$. L'idée de base pour représenter une fonction $f(x)$ sous forme de série entière sur un intervalle $[-a, a]$ est de chercher des coefficients a_n tels que

$$\forall x \in [-a, a], \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

S'il est possible de trouver de tels coefficients, alors nécessairement $a_0 = f(0)$, $a_1 = f'(0)$, $2a_2 = f''(0)$, etc ... si bien que nous aurions dans ce cas la formule de Mac-Laurin

$$\forall x \in [-a, a], \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!}$$

Malheureusement, la formule de représentation ci-dessus n'est valable en général que pour a assez petit, faute de quoi la série entière diverge. Il existe des fonctions dont la série de MacLaurin converge sur tout intervalle $[-a, a]$, et d'autres pour lesquelles la série diverge pour tout x non nul. Dans ce TP on s'intéresse tout d'abord à la fonction sin.

1. Montrer que la série de MacLaurin associée à la fonction sin est donnée par

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

2. Créer une fonction Scilab `sersin(n,x)` renvoyant pour un vecteur d'abscisses x et un entier n la valeur

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

3. Tracer sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$ la fonction sin et `sersin(2,x)`, `sersin(5,x)`, `sersin(7,x)`. Que concluez-vous ?
4. Montrer que la série de MacLaurin associée à la fonction $\ln(1+x)$ est donnée par

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

5. Créer une fonction Scilab `serln(n,x)` renvoyant pour un vecteur d'abscisses x et un entier n la valeur

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

6. Tracer sur l'intervalle $[0, 1.1]$ la fonction sin et `serln(5,x)`, `serln(15,x)`, `serln(25,x)`. Que concluez-vous ?
7. Si le temps le permet, construire les fonctions ci-dessus pour qu'elles renvoient des objets de type polynôme : se référer aux fonctions `poly` et `horner` pour la définition et l'évaluation des polynômes.