TP 3 : convergence des suites et séries de fonctions (1)

On illustre dans ce TP les problèmes qui peuvent se poser lorsqu'on veut approcher une fonction par une suite ou une série de fonctions. On commence par essayer d'appréhender numériquement ce que sont les notions de convergence simples et uniformes.

Exercice 1 (Convergences simple et uniforme)
On considère la suite de fonctions dont le terme général est défini par $f_n(x) = nx^n(1-x)$ *sur l'intervalle* $[0,1]$.

1. *Ecrire une fonction Scilab donnant* $f_n(x)$. *Cette fonction aura comme paramètres* n *et* x.
2. *Tracer* f_n *pour quelques valeurs de* n.
3. *Etudier numériquement la convergence simple de la suite* (f_n) *sur* $[0,1]$ *en identifiant sa limite. On choisira un* x*, puis un* $\varepsilon > 0$ *et on on calculera* $f(x,n)$ *pour* n *de plus en plus grand jusqu'à ce qu'il satisfasse au critère.*
4. *Cette suite converge-t-elle uniformément ? Illustrer graphiquement le problème en calculant le maximum de* f_n *et en le traçant en fonction de* n.
5. *Autres exemples :* $g_n(x) = n^{\frac{1}{4}}x^n(1-x)$ *sur* $[0,1]$, $h_n(x) = \sin^n x$ *sur* $[0,\pi]$.

Exercice 2 (Développement en série de la fonction sinus)
Ecrire une fonction Scilab comportant deux arguments, x *et* n*, et calculant la valeur au point* x *du dévelopement en série entière de la fonction sinus tronqué au* n*-ième terme. On évitera l'emploi des fonctions puissance et factorielle. Illustrer sur un graphique comportant la fonction sinus sur* $[0,2\pi]$ *et son développement à certains ordres la convergence de la série vers la fonction. Quelle approximation polynomiale de* $\sin$ *est raisonnable sur cet intervalle ?*