TP 1 : réduction des formes quadratiques

On s'intéresse dans ce TP à la réduction des formes quadratiques sous la forme d'une somme ou différence de carrés de formes linéaires. On rappelle si besoin est qu'une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ est associée à une matrice symétrique S telle que

$$q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^t S X, \qquad X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t,$$

ce qui sous forme de coordonnées s'écrit

$$q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} s_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} s_{ij} x_i x_j$$

La réduction de cette forme quadratique a pour résultat une écriture sous la forme d'une combinaison (non unique) d'au plus n carrés de formes linéaires indépendantes $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_m$ avec $m \leq n$ telles que

$$q(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \ell_i(x)^2$$

Si S est inversible, la forme est alors non dégénérée et $m = n$. Nous nous placerons dans ce cas pour commencer. Une manière d'obtenir cette écriture est d'appliquer la méthode de Gauss : on procède en éliminant les variables successivement. La forme ℓ_1 comportera a priori toutes les variables, la forme ℓ_2 toutes sauf x_1, et ainsi de suite jusqu'à ℓ_n qui ne comportera que x_n. Parfois un changement d'ordre des inconnues est nécessaire, lorsque suite aux éliminations la variable x_i n'apparaît plus au carré dans le reste. Plaçons nous d'abord dans le cas où aucune permutation n'est nécessaire, puis nous enrichirons notre procédure avec les cas dégénérés.

1 Cas générique

Exemple : on considère la matrice symétrique et non singulière

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

qui correspond à la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 6x_2x_3 + 2x_3^2$$

On commence par isoler tous les termes comprenant x_1 (ce qui correspond à la première colonne ou ligne de S), soit $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$ qu'on factorise par le coefficient diagonal $2(x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3)$ puis on écrit le terme entre parenthèses comme un carré moins un reste : $2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_2x_3$ si bien que

$$q(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3)^2 - \frac{3}{2}x_2^2 + 4x_2x_3$$

il se trouve qu'ici les termes en x_3^2 s'annulent mais c'est sans importance car nous éliminons maintenant x_2 qui a bien un terme au carré. On écrit donc $-\frac{3}{2}x_2^2 + 4x_2x_3 = -\frac{3}{2}(x_2^2 - \frac{8}{3}x_3) = -\frac{3}{2}(x_2 - \frac{4}{3}x_3)^2 + \frac{8}{3}x_3^2$, et donc

$$q(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3)^2 - \frac{3}{2}(x_2 - \frac{4}{3}x_3)^2 + \frac{8}{3}x_3^2$$

Vous devez écrire une fonction Scilab qui prend en entrée S et qui renvoie en sortie deux matrices $[U, D]$. La matrice U est triangulaire supérieure et contient les coefficients des formes linéaires rangées en ligne. Le vecteur D contient les coefficients figurant devant les formes linéaires dans l'expression factorisée de q. Ainsi pour l'exemple ci-dessus la procédure devra renvoyer

```
 D  =

    2.
  - 1.5
    2.6666667
 U  =
```

```
1.    0.5    1.
0.    1.   - 1.3333333
0.    0.     1.
```

A noter que la matrice de passage de la base de départ à la base où la forme quadratique est une somme de monomes est l'inverse de U. Nous avons donc la relation $U^t \operatorname{diag}(D)U = S$.

2 Cas plus ennuyeux

Toujours dans le cas où S est inversible, c'est à dire la forme quadratique non dégénérée (ou définie, selon la terminologie employée dans votre cours), il faut étudier le cas où il n'y a pas le carré de l'inconnue courante lors de l'étape où on doit écrire le début d'un carré avec 1 devant cette inconnue. S'il y a une autre inconnue avec un carré, on peut échanger l'ordre de ces deux variables. Mais il peut aussi arriver qu'il n'y ait pas de carré du tout. Ainsi la forme quadratique

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$

est-elle non dégénérée, mais bien ennuyeuse pour notre algorithme ! La technique est d'éliminer deux variables en même temps, par exemple x_1 et x_2, en écrivant $q(x)$ sous la forme

$$q(x) = ax_1x_2 + bx_1 + cx_2$$

où a est une constante, et b et c sont des formes linéaires ne dépendant pas de x_1 et x_2. On utilise alors la formule

$$q(x) = a(x_1 + c/a)(x_2 + b/a) - bc/a$$

en remarquant que bc/a est une forme quadratique où x_1 et x_2 n'apparaissent pas. En utilisant enfin l'identité $uv = \frac{1}{4}((u+v)^2 - (u-v)^2)$ on obtient

$$q(x) = \frac{a}{4}(x_1 + x_2 + c/a + b/a)^2 - \frac{a}{4}(x_1 - x_2 + c/a - b/a)^2 - bc/a$$

et on peut réitéré le procédé ou utiliser le cas générique si un carré est apparu. Dans l'exemple ci-dessus cela donne

$$q(x) = (x_1 + x_3)(x_2 + x_3) - x_3^2 = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 - x_3^2$$

La forme quadratique q est donc non dégénérée.

Etudier, si le temps le permet, les modifications à apporter au programme pour implémenter ce cas. On pourra commencer par se limiter au cas de la dimension 3.