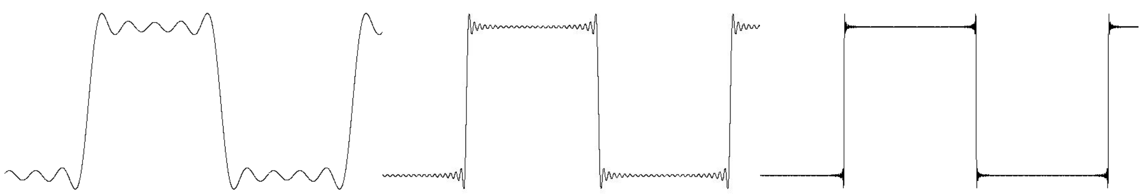
TP 12 : Phénomène de Gibbs et théorème de Fejér

Lors de l'étude des séries de Fourier et des transformées de Fourier, il apparaît parfois une déformation du signal, connue sous le nom de phénomène de Gibbs. Ce phénomène est un effet de bord qui se produit à proximité d'une discontinuité, lors de l'analyse d'une fonction dérivable par morceaux.

Un peu d'histoire (d'après Wikipédia) Le phénomène fut mis pour la première fois en évidence en 1848 par Wilbraham, mais cette découverte ne connut guère d'écho.

En 1898, Albert Michelson développa un système mécanique capable de calculer et sommer la série de Fourier d'un signal donné en entrée. Il observa alors un effet d'amplification des discontinuités, qui persistait malgré l'augmentation du nombre de coefficients calculés.

Alors que Michelson soupçonnait un défaut dans la fabrication de son engin, Gibbs montra que le phénomène était d'origine mathématique et se produisait dans des conditions très générales. En 1906, Maxime Bôcher donna la première interprétation satisfaisante du phénomène auquel il donna le nom de phénomène de Gibbs.



Dans les figures ci-dessus on voit le résultat de l'approximation de la fonction créneau par une série de Fourier tronquée à l'ordre 10, 50, et 250. Si l'approximation en dehors des points de discontinuité est très bonne, des oscillations demeurent néanmoins au voisinage de celles-ci. L'amplitude des oscillations est de l'ordre de 20% du saut de discontinuité de la fonction.

1. Observer ce phénomène en utilisant la fonction ci-dessous ou celle créée lors du TP11.

```
function [x,res]=fourier(f,n,T)
  x=linspace(0,T,200);
  res=an(f,0,T)/2*ones(x);
  for i=1:n
  res = res + an(f,i,T)*cos(i*x) + bn(f,i,T)*sin(i*x);
 end
endfunction
```

```
function res=an(f,n,T)
  xx=linspace(0,T,50*n*T);
  yy=f(xx).*cos(2*\%pi/T*n*xx);
  res=2/T*inttrap(xx,yy);
endfunction
```

```
function res=bn(f,n,T)
  xx=linspace(0,T,50*n*T);
  yy=f(xx).*sin(2*\%pi/T*n*xx);
  res=2/T*inttrap(xx,yy);
endfunction
```

2. Un moyen de s'affranchir de ces oscillations est d'utiliser la somme de Fejér[1] définie par

$$\varphi_n = \frac{1}{n+1}(S_0 + \cdots + S_n)$$

où S_k est la série partielle de Fourier à l'ordre k. Le théorème de Fejér stipule que φ_n converge vers f, à un certain sens (que vous aborderez en L3). On demande dans ce TP de programmer une fonction `fejer(f,n,T)` la plus efficace possible, calculant φ_n, et d'observer le bon comportement, et la lenteur de convergence, de cette approximation. On pourra utiliser la fonction `fourier(f,n,T)` ci-dessus ou celle créée lors du TP 11.

[1] Lipót Fejér est un mathématicien hongrois (9 février 1880, Pécs, Hongrie - 15 octobre 1959 Budapest, Hongrie). Né sous le nom de Léopold Weiss, il décide de changer son nom vers 1900.