Feuille d'exercices 2

Tous les schémas étudiés ci-dessous le sont sur l'équation de transport à vitesse constante positive

$$(E) \qquad \begin{cases} u_t + cu_x = 0 & \text{pour } (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où $c > 0$ et $T > 0$. On considère un pas d'espace Δx et un pas de temps Δt, et on note u_j^n, pour $j \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, une approximation de $u(j\Delta x, n\Delta t)$. On pose $\lambda = c\frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Exercice 1
Montrer que le schéma de Lax

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} + c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

est stable sous condition $\lambda \leq 1$.

Exercice 2
Montrer que le schéma de Lax-Wendroff

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\lambda^2}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

est stable sous la condition $\lambda \leq 1$ (on a vu en cours qu'il est d'ordre deux en temps et espace).

Exercice 3 (Schémas de Runge Kutta pour l'équation d'advection)
On sait que le schéma centré en espace est instable avec une discrétisation de la dérivée temporelle de type Euler. Montrer qu'il en est de même si l'on utilise la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\lambda^2}{8}(u_{j+2}^n - 2u_j^n + u_{j-2}^n)$$

mais que le schéma devient stable (sous CFL $\sqrt{3}$) lorqu'on utilise RK3 :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\lambda^2}{8}(u_{j+2}^n - 2u_j^n + u_{j-2}^n) - \frac{\lambda^3}{48}(u_{j+3}^n - 3u_{j+1}^n + 3u_{j-1}^n - u_{j-3}^n)$$

Exercice 4
Montrer que l'équation équivalente du schéma de Crank-Nicolson donné par

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{a}{2}\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{a}{2}\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

est

$$u_t + au_x - \frac{a}{12}(2(\Delta x)^2 - a^2(\Delta t)^2)u_{xxx} = 0$$

Exercice 5
Soit l'équation

$$u_t + au_x - \nu u_{xx} - \mu u_{xxx} = 0.$$

Montrer que $u(x,t) = e^{-\nu\omega^2 t} sin(\omega(x - (a + \mu\omega^2)t) + \varphi)$ en est solution. On admet que c'est la seurle. En déduire que la diffusivité d'un schéma atténue sa condition initiale alors que la dispersivité joue sur la vitesse de propagation.

Exercice 6
On considère le θ-schéma pour l'équation de la chaleur,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \theta\nu\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} - (1-\theta)\nu\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0.$$

étudier son ordre et sa stabilité L^2 en fonction de θ (indépendant de Δx et Δt). Soit le schéma à six points, pour l'équation de la chaleur,

$$\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{12\Delta t} + \frac{5(u_j^{n+1} - u_j^n)}{6\Delta t} + \frac{u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n}{12\Delta t} - \nu \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{2(\Delta x)^2} - \nu \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{2(\Delta x)^2} = 0$$

Montrer que ce schéma correspond à choisir $\theta = \frac{1}{2} - \frac{(\Delta x)^2}{12\nu\Delta t}$ dans le θ-schéma. Montrer qu'il est inconditionnellement stable au sens de la norme L^2, et consistant d'ordre deux en temps et quatre en espace.

Exercice 7

Montrer que si $\nu\Delta t \leq (\Delta x)^2$, le schéma de Crank-Nicolson pour l'équation de la chaleur (ou θ-schéma pour $\theta = \frac{1}{2}$) est stable pour la norme L^∞. Pour cela on montrera qu'il vérifie le principe du maximum discret : on considera un indice k tel que $u_k^{n+1} = M = \max_j u_j^{n+1}$ et on montrera que $M \leq \max_j u_j^n$. Puis on opérera de même avec le min.

Exercice 8

Soit $a > 0$. On note u_j^n une approximation de la solution de l'équation de transport $u_t + au_x = 0$ au point $(j\Delta x, n\Delta t)$, avec $\Delta x, \Delta t > 0$ les pas d'espace et de temps. On pose $\lambda = a\frac{\Delta t}{\Delta x}$ et on considère le schéma beam-warming :

$$u_j^{n+1} = \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} u_{j-2}^n + \lambda(2-\lambda) u_{j-1}^n + \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{2} u_j^n$$

1. *Montrer que le carré du module du coefficient d'amplification de ce schéma vaut*

$$|g(m,\lambda)|^2 = \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)(\cos mx - 1)^2 + 1$$

2. *En déduire la condition de stabilité de ce schéma et son intérêt par rapport aux autres schémas étudiés en cours et TD.*

Exercice 9

Soit $a > 0$. On note u_j^n une approximation de la solution de l'équation de transport $u_t + au_x = 0$ au point $(j\Delta x, n\Delta t)$, avec $\Delta x, \Delta t > 0$ les pas d'espace et de temps. On pose $\lambda = a\frac{\Delta t}{\Delta x}$ et on considère le θ-schéma :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \theta a \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} + (1-\theta) a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

Mener l'analyse de stabilité L^2 de ce schéma en déterminant, en fonction de θ, s'il est inconditionnellement ou conditionnellement stable, ou bien instable.