Feuille d'exercices 1

Exercice 1 *Dans $\mathbb{R}^2$ on considère le champs de vecteurs $v(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$. Calculer sa divergence. Calculer dans $\mathbb{R}^2$, $\Delta \log \|x\|$ (resp. dans $\mathbb{R}^3$ $\Delta\|x\|^{-1}$) pour $x \neq 0$. Montrer que pour une fonction u et un champ de vecteurs v on a $\operatorname{div}(uv) = u \operatorname{div} v + \nabla u \cdot v$.*

Exercice 2 *Soit Ω le domaine constitué du triangle rectangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$. Exprimer la dérivée normale d'une fonction u sur le bord de Ω en fonction de ses dérivées partielles. Exprimer l'intégrale d'une fonction u sur le bord $\partial\Omega$ en fonction d'intégrales simples. Application à la fonction $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.*

Exercice 3 *Démontrer les formules de la divergence et de Green sur le triangle de l'exercice précédent.*

Exercice 4 *Déterminer la solution, en fonction de u_0, du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (x+1)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sur } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Exercice 5 *Déterminer la solution, en fonction de u_0, du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial (xtu)}{\partial x} - tu = t & \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sur } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Exercice 6 *Résoudre l'équation* $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = u & \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = \cos x & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases}$

Exercice 7 *Déterminer, en fonction de φ la solution de l'équation*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + x\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3u & \text{sur } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y) & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

Exercice 8 *Dans un milieu fluide monodimensionnel, on s'intéresse au transport d'une grandeur $Q(x,t)$ par un champ de vitesse a (par exemple Q peut être la masse volumique, si l'on considère le transport du fluide lui-même). On suppose que cette grandeur est conservative, c'est à dire que la quantité totale de grandeur Q, contenue dans une portion du fluide se déplaçant, demeure constante.*

1. *On considère un ensemble donné de particules fluides, contenu à l'instant t dans l'intervalle $[\alpha(t), \beta(t)]$, et on s'intéresse au déplacement de cet ensemble. Montrer que :*

$$\frac{d}{dt}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} Q(x,t)dx = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left[\frac{\partial Q}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial Qa}{\partial x}(x,t)\right] dx$$

2. *En déduire que la quantité Q est conservative si et seulement si $\dfrac{\partial Q}{\partial t}(x,t) + \dfrac{\partial Qa}{\partial x}(x,t) = 0$.*
3. *A quelle condition sur a la longueur de l'ensemble occupé par les particules fluides demeure-t-elle constante ? On dit que l'écoulement est incompressible.*

Exercice 9 *Résoudre sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*

$$u_t - x^2 u_x + 2xyu_y = 2u$$

munie de la condition initiale $u(x,y,0) = xy$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10 *Résoudre pour $x > 0$ et $t \geq 0$ l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*

$$u_t + xtu_x = u \ln x$$

munie de la condition initiale $u(x,0) = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$.