Formule de Green

1 Opérateurs différentiels

Soit n un entier on note $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un point (ou vecteur) de $\mathbb{R}^n$. En pratique $n = 2$ ou 3.

Définition 1
On appelle **champ de vecteurs** une application $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, qui à $x = (x_1, \ldots, x_n)$ associe $v(x) = (v_1(x), \ldots, v_n(x))$.
Pour une fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, son **gradient** est le champ de vecteurs défini par $\nabla u(x) = (\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x))$.
Pour un champ de vecteurs $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on appelle **divergence** la fonction $\operatorname{div} v(x) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x) + \ldots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}(x)$. On appelle **Laplacien** d'une fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction $\Delta u(x) = \operatorname{div}(\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x)$.

Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), d'un seul tenant, borné, dont le bord est régulier sauf en un nombre fini de points (resp. segments de droite) où peuvent figurer des coins d'angle non nul. On appelle un tel ensemble un **domaine** de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2
On appelle **normale** au domaine Ω un champ de vecteurs $n(x)$ défini sur le bord $\partial\Omega$ de Ω et tel qu'en tout point $x \in \partial\Omega$ où le bord est régulier, $n(x)$ soit orthogonal au bord et unitaire ($\|n(x)\| = 1$). On appelle **normale extérieure** une normale qui pointe vers l'extérieur du domaine en tout point.
On appelle **dérivée normale** d'une fonction régulière u sur le bord d'un domaine Ω la fonction définie sur les points réguliers de $\partial\Omega$ par $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \nabla u(x) \cdot n(x)$ (produit scalaire du vecteur $\nabla u(x)$ avec le vecteur $n(x)$).

2 Signification des intégrales de surface ou de contour

2.1 En dimension deux

Soit Γ une courbe paramétrée régulière de $\mathbb{R}^2$, $\{x(t) = (x_1(t), x_2(t)), t \in [a, b]\}$. On appelle **intégrale** d'une fonction u sur Γ :

$$\int_\Gamma u d\sigma = \int_a^b u(x_1(t), x_2(t))\|x'(t)\|dt,$$

où $\|x'(t)\| = \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2}$. Si le bord d'un domaine comporte des coins, pour calculer une intégrale sur le bord on décompose ce bord en morceaux réguliers, que l'on paramètre puis on somme les résultats obtenus par la formule précédente.

2.2 En dimension trois

Soit Σ une surface régulière de $\mathbb{R}^3$ admettant un paramétrage $\{x(t, s) = (x_1(t, s), x_2(t, s), x_3(t, s)), (t, s) \in [a, b] \times [c, d]\}$. On appelle **intégrale** d'une fonction u sur Σ :

$$\int_\Sigma u d\sigma = \int_a^b \int_c^d u(x_1(t, s), x_2(t, s), x_3(t, s)) \left\| \frac{\partial x}{\partial t} \wedge \frac{\partial x}{\partial s} \right\| dsdt,$$

où

$$\left\| \frac{\partial x}{\partial t} \wedge \frac{\partial x}{\partial s} \right\| = \sqrt{(\frac{\partial x_1}{\partial t}\frac{\partial x_2}{\partial s} - \frac{\partial x_1}{\partial s}\frac{\partial x_2}{\partial t})^2 + (\frac{\partial x_1}{\partial t}\frac{\partial x_3}{\partial s} - \frac{\partial x_1}{\partial s}\frac{\partial x_3}{\partial t})^2 + (\frac{\partial x_2}{\partial t}\frac{\partial x_3}{\partial s} - \frac{\partial x_2}{\partial s}\frac{\partial x_3}{\partial t})^2}.$$

Si le bord d'un domaine comporte des coins, ou s'il n'est pas paramétrable, on décompose l'intégrale sur son bord sur chaque morceau régulier, que l'on paramètre puis on somme les résultats obtenus par la formule précédente.

3 Formule de la divergence et de Green

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, et $n(x)$ sa normale extérieure. Soit u et v deux fonctions régulières, w un champ de vecteurs définis sur Ω. Alors

$$\int_\Omega \operatorname{div} w \, dx = \int_{\partial\Omega} w \cdot n \, d\sigma \qquad \text{(formule de la divergence)}$$

$$\int_\Omega (\Delta u) v \, dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma \qquad \text{(formule de Green)}$$