# Intégration des équations hyperboliques linéaires du premier ordre

## 1 Rappels sur les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients non constants

Soit $t \to a(t)$ et $t \to b(t)$ deux fonctions continues sur un intervalle $I = [t_0, t_1]$ de $\mathbb{R}$, et $y_0 \in \mathbb{R}$. Pour résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) + a(t)y(t) = b(t) & \text{sur } I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

on introduit la primitive de $a$ s'annulant en $t_0$ soit $A(t) = \int_{t_0}^t a(s)ds$, et on multiplie l'équation différentielle par $e^{A(t)}$, ce qui donne

$$(e^{A(t)}y(t))' = b(t)e^{A(t)}$$

Soit $B(t)$ la primitive de $t \to b(t)e^{A(t)}$ s'annulant en $t_0$, alors la solution du problème de Cauchy est

$$y(t) = (y_0 + B(t))e^{-A(t)} = \left(y_0 + \int_{t_0}^t b(s)e^{\int_{t_0}^s a(\sigma)d\sigma}ds\right)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds} = y_0 e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds} + \int_{t_0}^t b(s)e^{-\int_s^t a(\sigma)d\sigma}ds.$$

## 2 Equations hyperboliques linéaires du premier ordre

Soit $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1] \to a(x,t) \in \mathbb{R}^n$, un champ de vecteur continu, lipschitzien en $x$ uniformément en $t$. Soit $a_0$ et $f$ des fonctions continues de $\mathbb{R}^n \times [t_0, t_1]$ dans $\mathbb{R}$ et $u_0$ continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Pour résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x,t)u = f(x,t) & \text{sur } \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1] \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sur } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

on résout d'abord le système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{d\tau} = a(X(\tau), \tau) \\ X(t) = x \end{cases}$$

dont on note $X(\tau; x, t)$ la solution. On a alors

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\tau}u(X(\tau;x,t),\tau) + a_0(X(\tau;x,t),\tau)u(X(\tau;x,t),\tau) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(X(\tau;x,t),\tau) + \sum_{i=1}^n a_i(X(\tau;x,t),\tau)\frac{\partial u}{\partial x_i}(X(\tau;x,t),\tau) + a_0(X(\tau;x,t),\tau)u(X(\tau;x,t),\tau) = f(X(\tau;x,t),\tau). \end{aligned}$$

C'est, à $x, t$ fixés, une équation différentielle du type vu ci-dessus, d'inconnue $y(\tau) = u(X(\tau;x,t),\tau)$, avec $a(\tau) = a_0(X(\tau;x,t),\tau)$ et $b(\tau) = f(X(\tau;x,t),\tau)$ dont la condition initiale est $y_0 = u(X(0;x,t),0) = u_0(X(0;x,t))$. Sa solution est donc

$$y(\tau) = u_0(X(0;x,t))e^{-\int_{t_0}^\tau a_0(X(s;x,t),s)ds} + \int_{t_0}^\tau f(X(s;x,t),s)e^{-\int_s^t a_0(X(\sigma;x,t),\sigma)d\sigma}ds.$$

Comme $y(t) = u(X(t;x,t),t) = u(x,t)$, on a finalement

$$u(x,t) = u_0(X(0;x,t))e^{-\int_0^t a_0(X(s;x,t),s)ds} + \int_0^t f(X(s;x,t),s)e^{-\int_s^t a_0(X(\sigma;x,t),\sigma)d\sigma}ds$$

En particulier si $a_0 = f = 0$ alors on a $u(x,t) = u_0(X(0;x,t))$.