Examen de Mathématiques pour Thermiciens

Durée : 1h30

Documents autorisés.
L'énoncé d'un résultat exact ne sera pris en compte que s'il est justifié.

Exercice 1

On considère une ailette de hauteur H, de section losange variable. Les diagonales (perpendiculaires) du losange sont proportionnelles à x et valent a et b en $x = H$. L'origine du repère est donc prise au sommet de l'ailette.

Cette ailette est positionnée en $x = H$ sur un corps à température $T_0 > 0$ qu'il s'agit de refroidir. La température extérieure est supposée nulle $T_{\text{ext}} = 0$. Le coefficient de conductivité thermique de l'ailette est noté λ et son coefficient d'échange thermique h_e. La température en $x = 0$ doit être finie. On se place dans l'approximation des ailettes vue en cours : on suppose que la température T ne dépend que de x.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$ dans l'ailette.
2. En utilisant le formulaire, donner la solution générale de cette équation.
3. Déterminer la solution du problème grâce aux conditions aux limites.
4. On suppose dorénavant que les côtés du losange à l'abscisse x ne sont plus proportionels à x mais à x^2.
5. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$ dans l'ailette.
6. En utilisant le formulaire, donner la solution générale de cette équation.
7. Déterminer la solution du problème grâce aux conditions aux limites.
8. Calculer le flux de chaleur dégagé par l'ailette en fonction des données thermiques et géométriques du problème.
9. Calculer le volume de l'ailette en fonction de a, b et H.
10. A volume fixé, déterminer quelle relation doivent vérifier a, b, H et L de sorte le flux de chaleur dégagé par l'ailette soit maximal.

Exercice 2

Une barre de longueur L, initialement à température nulle, est maintenue à ses extrêmités $x = 0$ et $x = L$ à la température nulle et chauffée par une source de chaleur S_0 sur toute sa longueur. On cherche à déterminer l'évolution de température dans la barre, solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = S_0 & \text{pour } (x,t) \in]0, L[\times]0, +\infty[\\ u(x,0) = 0 & \text{pour } x \in]0, L[\\ u(0,t) = 0 \quad u(L,t) = 0 & \text{pour } t \in]0, +\infty[\end{cases}$$

où λ est une constante thermique donnée.

1. Montrer que la température à l'équilibre (c'est à dire lorsque $t \to \infty$), vaut $v(x) = -\frac{S_0}{2\lambda} x(x - L)$.
2. On pose $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$. Montrer que w vérifie la même équation que u avec un second membre nul, les mêmes conditions en $x = 0$ et $x = L$ mais une condition initiale non nulle $w_0(x)$ que l'on déterminera.
3. Appliquer la méthode de séparation des variables sur w et en déterminer l'expression.
4. En déduire l'expression du développement en série de u.