Examen de Mathématiques pour Thermiciens

Durée : 1h30

Documents autorisés.
L'énoncé d'un résultat exact ne sera pris en compte que s'il est justifié.

Exercice 1
On considère une ailette pyramidale de longueur L, de section triangulaire (équilatéral). On note $h(x)$ la hauteur du triangle équilatéral à l'abscisse x. Celle-ci varie linéairement de 0 en $x = 0$ à H en $x = L$.

L'ailette est positionnée en $x = L$ sur un corps à température $T_0 > 0$ qu'il s'agit de refroidir. La température extérieure est supposée nulle $T_{\text{ext}} = 0$. Le coefficient de conductivité thermique de l'ailette est noté λ et son coefficient d'échange thermique h_e. La température en $x = 0$ doit être finie. On se place dans l'approximation des ailettes vue en cours : on suppose que la température T ne dépend que de x.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$ dans l'ailette.
2. En utilisant le formulaire, donner la solution générale de cette équation.
3. Déterminer la solution du problème grâce aux conditions aux limites.
4. Calculer le flux de chaleur dégagé par l'ailette en fonction des données thermiques et géométriques du problème. On donne $I_1' = I_0 - \frac{1}{x} I_1$.

Exercice 2
Une barre de longueur L, initialement à température nulle, est chauffée par une source de chaleur P. Alors que ses deux extrêmités sont maintenues à température nulle. On cherche à déterminer l'évolution de température dans la barre, solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = P & \text{pour } (x,t) \in]0, L[\times]0, +\infty[\\ u(x,0) = 0 & \text{pour } x \in]0, L[\\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{pour } t \in]0, +\infty[\end{cases}$$

où λ est une constante thermique donnée.

1. Déterminer la température à l'équilibre, notée $v(x)$.
2. On pose $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$. Montrer que w vérifie la même équation que u avec un second membre nul, les mêmes conditions en $x = 0$ et $x = L$ mais une condition initiale non nulle connue.
3. Appliquer la méthode de séparation des variables pour résoudre l'équation en w, en fonction d'une condition initiale $w_0(x)$.
4. w_0 étant connue, calculer explicitement en fonction de k et des paramètres du problème, les coefficients intervenant dans le développement en série de la solution.
5. En déduire l'expression du développement en série de u. Pouvait-on appliquer la méthode de séparation des variables directement sur l'équation de départ ? Justifiez votre réponse.