Méthodes variationnelles appliquées à la modélisation

Emmanuel Maitre et Clément Jourdana

ENSIMAG 2A / MSIAM1

`http://www-ljk.imag.fr/membres/Emmanuel.Maitre/doku.php?id=introef`

1. Introduction : des différences finies vers les éléments finis

- Vous avez abordé au premier semestre les méthodes de différences finies pour la résolution d'EDP. Un inconvénient majeur de ces méthodes est le fait qu'elles reposent sur une grille cartésienne ce qui rend délicat leur application aux domaines non rectangulaires.
- Ces méthodes travaillaient directement sur une discrétisation de l'équation via une discrétisation du domaine.
- Les méthodes variationnelles discrétisent l'espace des solutions cherchées plutôt que le domaine sur lequel l'équation est posée (bien qu'en définitive dans la méthode des éléments finis on verra que pour discrétiser l'espace, on utilisera une discrétisation du domaine).
- Cette nouvelle méthode ne travaille pas directement sur l'équation mais sur une formulation alternative équivalente de celle-ci.

1. Introduction : des différences finies vers les éléments finis

- Prenons par exemple le problème aux limites associé à l'équation aux dérivées partielles du second ordre la plus simple,

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

  où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $N = 2$ ou 3 en pratique.

- On appelle solution classique de ce problème une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ et vérifiant (1).
- Soit $v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ nulle sur $\partial\Omega$, et multiplions la première équation de (1) par v, puis intégrons par parties :

$$\int_\Omega -\Delta u \, v dx = \int_\Omega f v dx.$$

  D'après la formule de Green, du fait de la condition homogène au bord nous avons

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx,$$

  et ceci pour toute fonction v dans $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ s'annulant au bord.

1. Introduction : des différences finies vers les éléments finis

- Appelons V l'espace de ces fonctions. La transformation du problème classique (1) en

$$\text{Trouver } u \in V, \forall v \in V, \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx \qquad (2)$$

  consiste à écrire la formulation variationnelle du problème.
- Cette dénomination vient du fait qu'elle revient à écrire la variation d'une certaine énergie définie sur un espace de fonctions.
- D'un point de vue mécanique, et c'est cette communauté qui s'est intéressée la première à cette formulation, cela correspond à écrire un principe des travaux virtuels : le travail de la force f lors d'un déplacement v dans le membre de droite de (2) correspond à une variation de l'énergie du système dans le membre de gauche.
- Remarquons la dualité qui existe entre la formulation classique (1) qui peut se réécrire

$$\text{Trouver } u \in V, \forall x \in \Omega, \quad -\Delta u(x) = f(x) \qquad (3)$$

  et la formulation variationnelle (2), entre l'espace des points Ω et l'espace des fonctions V.

1. Introduction : des différences finies vers les éléments finis

- L'existence de solution à (2) est obtenue grâce au théorème de Lax-Milgram, qui donne des conditions suffisantes pour qu'une équation de la forme

$$\text{Trouver } u \in V, \forall v \in V, \quad a(u,v) = \ell(v) \tag{4}$$

  admette une unique solution. Dans cette équation *a* est une forme bilinéaire et ℓ une forme linéaire. Ce théorème est démontré lorsque V est un espace de Hilbert.
- Pour que les termes de (2) aient un sens, on voit qu'il suffit que u et v appartiennent à $\mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. C'est un autre avantage de la formulation variationnelle : la régularité demandée *a priori* pour que l'équation ait un sens est plus faible que dans la formulation classique.
- L'ennui est que l'espace $V = \left\{u \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}),\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}$ n'est pas hilbertien (il n'est pas complet) $\Rightarrow$ espaces complétés = espaces de Sobolev.
- la notion même de valeur d'une fonction sur le bord d'un domaine devient non triviale.

1. Introduction : des différences finies vers les éléments finis

- On écrira une formulation variationnelle approchée sur un sous-espace de dimension finie de V :

$$\text{Trouver } u_h \in V_h, \forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h). \tag{5}$$

  Ce sous-espace sera censé approcher V en un sens à préciser lorsque $h \to 0$. Sur ce sous-espace, le problème se ramène à la résolution d'un système linéaire dont les inconnues sont les coordonées de l'inconnue approchée dans une base de V_h.

- La question centrale de l'analyse numérique est l'estimation de l'erreur qu'on commet en remplaçant un problème continu (sans solution explicite en général) par un problème approché qu'on pourra implémenter sur machine. La méthode variationnelle offre un cadre très élégant en ramenant l'estimation d'erreur entre la solution approchée $u_h \in V_h$ et la solution exacte $u \in V$ à un problème d'approximation de u par des fonctions de V_h.

- Les différentes méthodes éléments finis qui en découlent correspondent à autant de choix de l'espace V_h et à l'étude de l'erreur d'approximation correspondante. Nous conclurons ce cours sur ces questions.

Pour résumer, l'approche variationnelle dont les éléménts finis sont un cas particulier correspond aux étapes suivantes qui structureront la suite du cours :

1. Choix de l'espace V et formulation variationnelle du problème aux limites.
2. Application du théorème de Lax-Milgram sur V.
3. Discrétisation de l'espace V et formulation variationnelle approchée.
4. Estimation de l'erreur d'approximation et résultat de convergence.
5. Implémentation (en TP avec FreeFem++ et/ou Life).

2. Espaces de Sobolev

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. On note $H^1(\Omega)$ l'espace des distributions $L^2(\Omega)$ ayant toutes leurs dérivées partielles d'ordre 1 appartenant à $L^2(\Omega)$. Donc en notant les dérivées partielles (au sens des distributions) $\partial_\alpha := \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega),\ \partial_\alpha u \in L^2(\Omega),\ \alpha = 1 \dots N \right\}.$$

Proposition

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_1 = \int_\Omega uv + \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

On notera $\| \cdot \|_1$ la norme associée.

Autre caractérisation. Dans le cas de l'espace entier :

$$H^1(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \xi \to (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}$$

D'où les espaces de Sobolev d'ordre s en posant très naturellement

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \xi \to (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

Pour s entier, c'est équivalent à dire que toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à s sont dans L^2.

2. Espaces de Sobolev

- En dimension 1, les foncions de H^1 sont continues : si $u \in H^1(a,b)$ alors $u' \in L^2(a,b)$. Soit alors $v(x) = \int_a^x u'(s)ds$. La fonction v est (uniformément) continue, puisque

$$|v(x) - v(y)| = \left| \int_x^y u'(s)ds \right| \leq |x-y|^{\frac{1}{2}} \|u'\|_{L^2}$$

D'autre part pour $\varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$,

$$\begin{aligned} \int_a^b v(x)\varphi'(x)dx &= \int_{x=a}^b \int_a^x u'(y)\varphi'(y)dydx \\ &= \int_{y=a}^b \int_{x=y}^b u'(y)\, \varphi'(x)dxdy = -\textstyle\int_a^b u'(y)\varphi(y)dy. \end{aligned}$$

D'où $v' = u'$ au sens des distributions, ce qui signifie que v et u ne diffèrent que d'une constante (cf cours distributions première année) . Comme v est continue, u aussi.

- Par contre en dimension supérieure ce n'est plus vrai. Le contre-exemple classique est donné dans $\mathbb{R}^2$ par la fonction $x \to (\ln|x|)^\alpha$ qui est dans H^1 d'une boule pour $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ et non continue (même infinie) en 0.

2. Espaces de Sobolev

- *Cas des conditions homogènes.* On définit l'espace

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$$

Autrement dit, H_0^1 est l'ensemble des limites (pour la norme de H^1) de suites de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$.
Comme ces dernières sont à support compact, *si tout se passe bien* cela devrait donner les fonctions nulles au bord en un sens généralisé.
Si tout se passe bien car rappelons que

$$\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{L^2(\Omega)} = L^2(\Omega)$$

Donc *on ne peut pas définir* la valeur d'une fonction de L^2 au bord en général, car elle peut être approchée aussi près que l'on veut par une fonction nulle au bord. Les résultats qui suivent prouveront que ce n'est pas le cas pour les fonctions de H^1.

- *Solution générale.* L'idée est de définir la valeur au bord comme limite des valeurs au bords d'une suite de fonctions régulières approchant la fonction H^1. Nous aurons besoin pour cela de savoir justement s'il existe de telles suites de fonctions régulières approchantes.

Théorème (Inégalité de Poincaré)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Alors il existe une constante $C(\Omega) > 0$ ne dépendant que du domaine Ω et telle que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Démonstration

- Comme le domaine est borné, on peut supposer qu'il est compris entre deux hyperplans.
- Quitte à effectuer un changement de coordonnées on va supposer que ces hyperplans sont $x_N = \alpha$ et $x_N = \beta$.
- On note $x \in \mathbb{R}^N$ sous la forme $x = (x', x_N)$, et on considère une fonction $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. Enfin on note $\widetilde{u}$ le prolongement de u à $\mathbb{R}^N$ par 0. Alors

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\widetilde{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \int_\alpha^\beta \int_{x' \in \omega} \widetilde{u}(x', x_N)dx'dx_N.$$

Comme $\widetilde{u}$ est une fonction régulière de x_N on a

$$\widetilde{u}(x', x_N) = \widetilde{u}(x', \alpha) + \int_\alpha^{x_N} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_N}(x', s)ds \text{ avec } \widetilde{u}(x', \alpha) = 0.$$

- D'autre part,

$$\left|\int_\alpha^{x_N} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_N}(x',s)ds\right| \leq \left(\int_\alpha^{x_N} 1^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\alpha^{x_N} (\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_N})^2(x',s)ds\right)^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$\widetilde{u}(x',x_N)^2 \leq (x_N-\alpha)\int_\alpha^{x_N}(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_N})^2(x',s)ds$$

et donc

$$\int_{\omega'} \widetilde{u}^2(x',x_N)dx \leq (x_N-\alpha)\int_{\mathbb{R}^N}(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_N})^2(x)dx.$$

- Enfin par intégration de α à β on a

$$\|\widetilde{u}\|_{L^2}^2 \leq \frac{(\beta-\alpha)^2}{2}\|\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_N}\|_{L^2}^2.$$

- D'où le résultat pour les fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ puis par densité pour les fonctions de $H_0^1(\Omega)$.

Remarques

- *Ce résultat nous montre en particulier que pour* Ω *borné,* $H_0^1(\Omega)$ *est un sous-espace propre de* $H^1(\Omega)$. *En effet la fonction constante égale à* 1 *appartient à* $H^1(\Omega)$ *et n'appartient pas à* $H_0^1(\Omega)$, *sinon elle vérifierait l'égalité ci-dessus ce qui est absurde car son gradient est nul.*
- *Le théorème ci-dessus est valable dès que* Ω *est borné dans une direction.*
- *Si* Ω *est un ouvert borné, la semi-norme* $\|\nabla u\|_{L^2}$ *est norme sur* H_0^1 *équivalente à la norme* H^1. *Pour le produit scalaire associé (et donc aussi pour celui de* H^1*),* H_0^1 *est un espace de Hilbert.*

2.3 Notion de trace

- Comme on l'a vu, les fonctions de H^1 ne sont pas nécessairement continues.
- Pour définir leur valeur au bord on va les approcher par des fonctions régulières.
- Le premier résultat est que les fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ sont denses dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. la démonstratiion de ce résultat se fait par troncature et régularisation. On montre d'abord que l'ensemble des fonctions bornées de $H^1(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^N)$, puis on régularise ces fonctions par convolution.
- D'autre part si Ω est un ouvert de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, c'est à dire que localement sa frontière est le graphe d'une fonction $\mathcal{C}^1$, ou bien si $\Omega = \mathbb{R}^N_+$ alors $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.
- Nous allons montrer que le fait d'associer une valeur au bord pour une fonction est une opération continue pour la topologie de H^1 (et pas de L^2 bien sûr). Plus précisèment, nous avons le théorème suivant :

Théorème (Théorème de trace)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors l'application trace

$$\gamma_0 : \begin{cases} \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to \mathcal{C}^0(\Gamma) \\ v \to \gamma_0(v) = v_{|\Gamma} \end{cases}$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$. Cela implique en particulier

$$\exists C > 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \|\gamma_0(v)\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Remarques

On verra que le noyau de γ_0 est en fait H_0^1. L'image de γ_0 n'est pas $L^2(\Gamma)$ tout entier, mais un espace intermédiaire entre $L^2(\Gamma)$ et $H^1(\Gamma)$. On a défini les espaces de Sobolev d'exposants non entiers uniquement pour l'espace entier, mais cet espace intermédiaire correspondrait à $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, défini en redressant localement Γ.

2.3 Notion de trace

- Pour démontrer le théorème de trace, on se restreint au cas $\Omega = \mathbb{R}^N_+$, pour lequel on cherche à définir une trace sur l'hyperplan $x_N = 0$.
- Le cas d'un domaine général Ω est traité par cartes locales : on se place sur un morceau de $\partial\Omega$ et on le redresse grâce à un difféomorphisme en une partie de $\mathbb{R}^N_+$ sur lequel on applique le résultat désormais connu. Puis on recolle les morceaux.
- Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N_+$, on va montrer que pour $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+})$,

$$\|v(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^{N-1})} \leq \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}.$$

En effet si $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+})$, on a

$$v(x', 0)^2 - 0 = \int_{+\infty}^{0} \frac{\partial}{\partial x_N} v(x', x_N)^2 dx_N = -2 \int_0^{+\infty} v(x', x_N) \frac{\partial v}{\partial x_N}(x', x_N) dx_N.$$

- D'où

$$v(x',0)^2 \leq 2\left(\int_0^{+\infty} v(x',x_N)^2 dx_N\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\partial v}{\partial x_N}(x',x_N)^2 dx_N\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \int_0^{+\infty} v(x',x_N)^2 dx_N + \int_0^{+\infty} \frac{\partial v}{\partial x_N}(x',x_N)^2 dx_N$$

  ce qui en intégrant sur R_+^{N-1} donne l'inégalité annoncée.

- Comme $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^N})$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}_+^N)$, cette inégalité se prolonge aux fonctions de ce dernier espace et on obtient, pour ces fonctions, une trace dans L^2 du bord. A noter que ce n'est pas le cas pour les fonctions de $L^2(\mathbb{R}_+^N)$: pour celles-ci on ne peut pas définir de valeur au bord.

Corollaire

$H_0^1(\Omega) = \left\{v \in H^1(\Omega), \quad \gamma_0(v) = 0_{L^2(\Gamma)}\right\}.$

Démonstration. En effet comme les fonctions de H_0^1 sont les limites de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la topologie de H^1 et que celles-ci s'annulent sur $\partial\Omega$, la continuité de γ_0 implique que la fonction limite a une trace nulle. L'inclusion dans un sens est donc prouvée. L'autre sens est admis. $\square$

2.4 Formules de Green dans les espaces de Sobolev

Le résultat suivant permet de déduire la formule de Green.

Théorème (intégration par parties en dimension N)

Soit Ω un ouvert borné de frontière Γ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega (\partial_{x_i} u) v dx = - \int_\Omega u(\partial_{x_i} v) dx + \int_\Gamma u v n_i d\sigma, \qquad i = 1, \ldots, N$$

où n_i est la i-ème composante de la normale sortante au domaine Ω.

Démonstration.

- La formule est vraie pour les fonctions régulières : Exercice !
- Dans $\mathbb{R}^2$, prenez d'abord le cas d'un domaine Ω égal au triangle rectangle $\{(x, y),\ x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.
- Puis sur un triangle image du précédent par difféomorphisme.
- Puis par le théorème ci-dessous (pour des triangles) en recollant ces triangles sur tout domaine polygonal. C'est déjà bien !
- Enfin la continuité de la trace démontrée précédemment permet de passer à la limite sur deux suites de fonctions régulières approchant les fonction données. $\square$

2.4 Formules de Green dans les espaces de Sobolev

Application : Supposons qu'on dispose d'une discrétisation de Ω en sous-domaines ouverts Ω_i, $i = 1, \ldots, M$ de frontière de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux, de sorte que $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{M} \overline{\Omega_r}$ et $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ pour $i \neq j$. Alors on a :

Proposition

Soit v une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ telle que sa restriction à Ω_i soit dans $H^1(\Omega_i)$, pour tout $i = 1, \ldots, M$. Alors $v \in H^1(\Omega)$.

Démonstration

- Soit $w_i \in L^2(\Omega)$ telle que sa restriction sur Ω_j soit égale à $\partial_{x_i}(v_{|\Omega_j})$, qui est bien dans L^2 par hypothèse. Alors prenons $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a d'après le théorème ci-dessus

$$\int_\Omega w_i \varphi dx = \sum_{j=1}^{M} \int_{\Omega_j} \partial_{x_i}(v_{|\Omega_j})\varphi dx = -\sum_{j=1}^{M} \int_{\Omega_j} v_{|\Omega_j} \partial_{x_i}\varphi dx + \sum_{j=1}^{M} \int_{\partial\Omega_j} v\varphi n_i^j dx,$$

où n_i^j est la i-ème composante de la normale sortante à Ω_j.

- Comme v est continue la dernière somme s'annule car pour deux triangles ayant un coté en commun, les deux normales sortantes sont opposées. On a donc au sens des distributions

$$\langle w_i, \varphi \rangle = - \langle v, \partial_{x_i} \varphi \rangle = \langle \partial_{x_i} v, \varphi \rangle .$$

- Comme $w_i \in L^2(\Omega)$ on en déduit que $\partial_{x_i} v \in L^2(\Omega)$ pour tout i et donc que $v \in H^1(\Omega)$. $\square$

Definition (Espaces de Sobolev d'ordre m)

On note $H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \quad \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), \quad |\alpha| \leq m\}$, où $\partial^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_N}^{\alpha_N}}$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$. Cet espace est un espace de Hilbert séparable pour le produit scalaire $(u, v)_m = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u \partial^\alpha v dx$ et la norme associée est notée $\| \cdot \|_m$.

- Si Ω est un ouvert borné de frontière Γ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, comme $H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ on peut définir la trace d'une fonction H^2.
- Mais d'autre part $\partial_{x_i} v \in H^1(\Omega)$ pour $v \in H^2(\Omega)$ donc on peut aussi définir sa trace ainsi que la quantité $(\partial_n v)_{|\Gamma} = \sum_{i=1}^N \gamma_0(\partial_{x_i} v) \in L^2(\Gamma)$. On a donc :

Théorème (Théorème de trace pour H^2)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors l'application trace $v \to (\gamma_0 v, \gamma_1 v) = \left(v_{|\Gamma}, (\partial_n v)_{|\Gamma}\right)$ de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dans $\mathcal{C}^0(\Gamma) \times \mathcal{C}^0(\Gamma)$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ (en fait d'image $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, passer au bord enlève $\frac{1}{2}$). Cela implique en particulier

$$\exists C > 0, \quad \forall v \in H^2(\Omega), \quad \|\gamma_0(\partial_n v)\|_{L^2(\Gamma)} \le C\|v\|_{H^2(\Omega)}.$$

- Notons qu'il n'y a pas de régularité $\mathcal{C}^2$ requise sur la frontière du domaine; en effet on obtient le résultat en appliquant le théorème de trace de H^1 aux dérivées des fonctions H^2 et celui-ci ne nécessite qu'une régularité $\mathcal{C}^1$ du bord.
- Munis de cette notion de valeur au bord des fonctions H^2 et de leurs dérivées, nous avons la formule de Green pour les fonctions de Sobolev.

Théorème (Formule de Green dans H^2)

Soit Ω un ouvert borné de frontière Γ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$. Alors

$$\int_\Omega (\Delta u) v dx = - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Gamma (\partial_n u) v d\sigma.$$

Démonstration. On applique la formule d'intégration par parties en dimension N avec $\partial_{x_i} u$ à la place de u et on somme sur i. $\square$

Lorsque m est assez grand, dépendant de la dimension, les fonctions de H^m deviennent régulières :

Théorème (Régularité des fonctions H^m)

Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors pour $m > \frac{N}{2}$, on a $H^m(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ avec injection continue, ce qui signifie $\exists C > 0,\ \forall u \in H^m(\Omega),\ \sup_{x\in\Omega} |u(x)| \leq C\|u\|_m$.

Démonstration

▶ Un résultat assez technique (méthode de réflexion, cf H. Brézis, Analyse fonctionnelle, Masson, p. 158) montre sous les hypothèses du théorème qu'il existe un opérateur de prolongement linéaire continu de $H^m(\Omega)$ dans $H^m(\mathbb{R}^N)$.

▶ Soit $u \in H^m(\Omega)$, on note U son prolongement. Il existe donc une constante C indépendante de u telle que

$$\|U\|_{H^m(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{H^m(\Omega)}.$$

2.5 Régularité des fonctions des espaces de Sobolev

- En écrivant la transformée de Fourier de U sous la forme

$$\widehat{U}(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-\frac{m}{2}} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \widehat{U}(\xi)$$

on fait apparaitre $\xi \to (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \widehat{U}(\xi)$ qui est dans L^2 d'après la caractérisation de H^s par transformée de Fourier (p. 8), et $\xi \to (1 + |\xi|^2)^{-\frac{m}{2}}$ qui est dans L^2 si et seulement si $m > \frac{N}{2}$ (exercice : passez en "polaire" dans $\mathbb{R}^N$).
- Donc dans ce cas $\widehat{U} \in L^1$ et d'après les propriétés de la transformée de Fourier, $U \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N)$.
- Comme $U(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot\xi} \widehat{U}(\xi) d\xi$, on a

$$|U(x)| \leq C \|\widehat{U}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq C \|U\|_{H^m(\mathbb{R}^N)}.$$

- Enfin comme U est un prolongement, on a $\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |U(x)|$ et ce prolongement vérifie $\|U\|_{H^m(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{H^m(\Omega)}$. D'où le résultat. $\square$

2.6 Compacité des espaces de Sobolev

Enfin le résultat de compacité suivant nous sera utile. Un résultat de compacité d'un espace dans un autre sert souvent en théorie des EDP lorsqu'on dispose d'information sur la norme des éléments d'une suite d'éléments de l'espace. Si celui-ci s'injecte de manière compacte dans un plus gros espace, alors cette suite bornée contiendra une sous-suite convergente pour la norme du gros espace, ce qui permet de passer à la limite dans certains cas (pour une première application, voir la démonstration de l'inégalité de Poincaré dans le cas des fonctions H^1 nulles sur une partie du bord seulement).

Théorème (Rellich)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors $H^1(\Omega)$ s'injecte de manière compacte dans $L^2(\Omega)$. C'est à dire que de toute suite bornée dans H^1 on peut extraire une sous-suite convergeant en norme dans L^2. On a le même résultat pour H^1_0, sans hypothèse de régularité sur $\partial\Omega$.