Correction : séparation de variables

Durée : 2h00

Exercice 1

Une barre de longueur L, initialement à température nulle, est chauffée par une source de chaleur P. Alors que ses deux extrêmités sont maintenues à température nulle. On cherche à déterminer l'évolution de température dans la barre, solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = P & \text{pour } (x,t) \in]0,L[\times]0,+\infty[\\ u(x,0) = 0 & \text{pour } x \in]0,L[\\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{pour } t \in]0,+\infty[\end{cases}$$

où λ est une constante thermique donnée.

1. Déterminer la température à l'équilibre, notée $v(x)$.
   Nous cherchons une température $u(x,t) = v(x)$ indépendante du temps, ce qui remplacé dans l'équation donne : $-\lambda v''(x) = P$ avec comme condition aux limites $v(0) = V(L) = 0$. On intègre deux fois et on trouve $v(x) = \frac{P}{2\lambda} x(L-x)$.

2. On pose $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$. Montrer que w vérifie la même équation que u avec un second membre nul, les mêmes conditions en $x = 0$ et $x = L$ mais une condition initiale non nulle connue.
   On a $\frac{\partial w}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda v'' = 0$. D'autre part u et v étant nulles en $x = 0$ et $x = L$, il en est de même pour w. Enfin la condition initiale sur w est $w(x,0) = u(x,0) - v(x) = -v(x) = -\frac{P}{2\lambda} x(L-x)$.

3. Appliquer la méthode de séparation des variables pour résoudre l'équation en w, en fonction d'une condition initiale $w_0(x)$.
   Nous avons donc mis l'équation sous la forme de celle de l'exercice 1 de la feuille 2, mais avec une condition de température nulle imposée au lieu d'une condition de flux nul. On applique maintenant la méthode de séparation des variables.
   Etape 1. On cherche une solution sous la forme $w(x,t) = f(t)g(x)$. On trouve comme équations différentielles

   $$f'(t)g(x) - \lambda f(t)g''(x) = 0$$

   soit

   $$\frac{f'(t)}{f(t)} = \lambda \frac{g''(x)}{g(x)}.$$

Les deux membres de l'équation ci-dessus étant exprimés en des variables indépendantes, les deux expressions sont en fait constantes et égales à une constante $\alpha \in \mathbb{R}$. Donc

$$f'(t) = \alpha f(t) \text{ et } g''(x) - \frac{\alpha}{\lambda} g(x) = 0.$$

D'autre part d'après les conditions aux limites on a $g(0) = g(L) = 0$. Comme on l'a vu en TD, pour qu'il existe g non identiquement nul il faut choisir $\alpha < 0$, de sorte que l'équation en g ait des solutions en sinus et cosinus qui peuvent s'annuler deux fois. Posons donc $\frac{\alpha}{\lambda} = -\omega^2$, ce qui donne comme solution

$$g(x) = A \sin \omega x + B \cos \omega x.$$

Comme $g(0) = 0$ on a $B = 0$ et $g(L) = 0$ donne $A \sin \omega L = 0$. Si on veut une solution non identiquement nulle, il faut que $A \neq 0$, donc $\sin \omega L = 0$. Donc $\omega = \frac{k\pi}{L}$, $k \in \mathbb{N}^*$. Cela donne comme solution

$$g_k(x) = a_k \sin \frac{k\pi x}{L}, \qquad a_k \in \mathbb{R}.$$

L'équation en f quant à elle est une équation du premier ordre qui s'intègre facilement, en

$$f_k(t) = b_k e^{-\lambda \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}, \qquad b_k \in \mathbb{R}.$$

Finalement nous obtenons comme solution à variables séparables

$$w_k(t) = c_k e^{-\lambda \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi x}{L}, \qquad c_k \in \mathbb{R}.$$

Notons que toute combinaison de ces solutions et aussi solution donc on a trouvé en général comme solution une fonction de la forme

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\lambda \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi x}{L}, \qquad c_k \in \mathbb{R}.$$

Il faut maintenant réaliser la condition initiale $w(x,0) = w_0(x)$. Pour cela on cherche les coefficients c_k tels que

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \frac{k\pi x}{L} = w_0(x),$$

On a déjà fait ce calcul en multipliant par l'un des sinus et en intégrant sur $[0, L]$ on trouve

$$c_k = \frac{2}{L} \int_0^L w_0(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx,$$

ce qui termine la résolution du problème en w.

4. w_0 étant connue, calculer explicitement en fonction de k et des paramètres du problème, les coefficients intervenant dans le développement en série de la solution.
   On a $w_0(x) = -\frac{P}{2\lambda}x(L-x)$ donc on peut calculer les coefficients c_k explicitement en intégrant deux fois par parties l'intégrale
   $$c_k = \frac{P}{\lambda L}\int_0^L x(L-x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx.$$
   On trouve
   $$c_k = \frac{P}{\lambda L}\left[-x(L-x)\frac{L}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{L}\right]_0^L + \frac{P}{\lambda k\pi}\int_0^L (L-2x)\cos\frac{k\pi x}{L}dx$$
   où le terme entre crochets est nul. En intégrant à nouveau par parties le terme entre crochet comporte un sinus qui s'annule et on trouve
   $$c_k = \frac{2PL}{\lambda(k\pi)^2}\int_0^L \sin\frac{k\pi x}{L}dx.$$
   Enfin
   $$c_k = \frac{2PL^2}{\lambda(k\pi)^3}(1-(-1)^k)$$
   ce qui donne une expression explicite des coefficients c_k, et en particulier ceux de rang pair sont nuls.

5. En déduire l'expression du développement en série de u. Pouvait-on appliquer la méthode de séparation des variables directement sur l'équation de départ ? Justifiez votre réponse.
   On a $u(x,t) = w(x,t) + \frac{P}{2\lambda}x(L-x)$ ce qui donne une expression de u à partir de celle de w. On ne pouvait pas appliquer directement la méthode à l'équation de départ, car sans second membre nul, on ne peut pas séparer les variables x et t comme on l'a fait.