Algèbre Linéaire 2

Dimitri Bălășoiu

Table des matières

Chapitre 1

Déterminants

1.1 Intérêt du déterminant

Définition (Développement par lignes)**.** Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$. On appelle déterminant de A, et on note $\det(A)$, le nombre donné par la relation de récurrence :

- si $n = 1$, $\det(A) = \det(a_{11}) = a_{11}$,
- si $n > 1$, $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(M_{ij})$,

où M_{ij} désigne la matrice obtenue à partir de A en retirant la ligne i et la colonne j [1].

Il n'aura pas échappé au lecteur attentif qu'on a le choix de la ligne quand on calcule le déterminant. Pour que cette définition soit cohérente, on a besoin de la propriété suivante :

Proposition (Admis)**.** *Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Le nombre* $\det(A)$ *ne dépend pas de la ligne choisie pour le calcul.*

La formule de développement par colonnes fixe arbitrairement une ligne avant d'effectuer le calcul. Que se passe-t-il si, au lieu de fixer une ligne, on fixe une colonne ? On obtient aussi le déterminant.

Théorème (Développement par colonnes, admis)**.** *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Pour toute colonne j fixée, on a :*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(M_{ij}).$$

Cette entrée en matière peut paraître un peu rude : la formule semble tomber de nulle part. On peut définir le déterminant de manière plus directe, mais plus abstraite. On ne le fait pas, par manque de temps, et on se contente de donner une version édulcorée du déterminant. D'ailleurs, on ne prouvera pas certains théorèmes, qui découlent de la définition plus abstraite. Le lecteur curieux peut aller voir [**BouquinAlgèbre**].

Quel est l'intérêt du déterminant ? Il vérifie de belles propriétés, qui le rendent pratique à utiliser. Par exemple :

Proposition (Admis)**.** *Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On a :*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Proposition. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On a :*

$$\det(A^t) = \det(A).$$

Démonstration. Cela découle simplement du fait qu'on peut développer le déterminant par ligne ou par colonne, au choix. □

Il permet également de savoir si une matrice est inversible :

Proposition (Admis)**.** *Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.*

[1] Dans la littérature, on dit que $\det(M_{ij})$ est le mineur de a_{ij}, et $(-1)^{i+j}\det(M_{ij})$ le cofacteur de a_{ij}.

1.2 Calculs simples

Essayons de calculer certains déterminants :

- Commençons par le déterminant d'une matrice 2×2, et calculons $\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. On va développer par rapport à la première ligne. On aura besoin de M_{11} et de M_{12}.

$$M_{11} = (1), \qquad M_{12} = (5).$$

  On a donc $\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = 2 \times 1 - 4 \times 5 = -18$.

- On peut même donner une formule pour le déterminant de matrices 2×2 :

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{(on note fréquemment le déterminant avec des barres verticales)} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \end{aligned}$$

- On peut aussi facilement calculer le déterminant d'une matrice triangulaire. Pour une matrice triangulaire supérieure, il suffit de développer n fois par rapport à la première colonne :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^{n} a_{ii}, \end{aligned}$$

  et je vous laisse montrer la même formule pour les matrices triangulaires inférieures.

- Calculons maintenant le déterminant des matrices des trois opérations élémentaires. On commence par la matrice élémentaire $L_i(\alpha)$ qui multiplie la i-ème ligne par α. On rappelle l'expression de $L_i(\alpha)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

  grâce au calcul précédent, on a $\det(L_i(\alpha)) = \alpha$.

- On continue par la matrice $L_{ij}(\lambda)$, qui rajoute à la i-ème ligne λ fois la j-ème ligne. On rappelle l'expression de $L_{ij}(\lambda)$:

$$\begin{aligned} L_{ij}(\lambda) &= I_n + \lambda E_{ij} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & \lambda & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & (0) & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{si } i < j, \end{aligned}$$

et

$$L_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & (0) & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & \lambda & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \text{ si } i > j.$$

Grâce au calcul précédent, on a $\det(L_{ij}(\lambda)) = 1$.

- Calculons le déterminant de la matrice élémentaire L_{ij} qui échange les lignes i et j. On rappelle l'expression de L_{ij} :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

On suppose ici $i < j$[1]. En développement successivement par rapport à la i-ème puis $(j-1)$-ème ligne, on a :

$$\begin{aligned} \det(L_{ij}) &= (-1)^{i+j} \det(M_{ji}) \\ &= (-1)^{2i+2j-1} \det(M_{(ji)(i(j-1))}) \\ &= (-1)^{-1} \det(I_{n-2}) \\ &= -1. \end{aligned}$$

1.3 Propriétés du déterminant

On va avoir besoin de résultats théoriques supplémentaires pour faire des calculs plus compliqués.

Proposition (Application multi-linéaire)**.** *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On note $A = (A_1, \dots, A_n)$ les colonnes*[2] *de A. Soit encore $B \in \mathbb{R}^n$ un vecteur colonne et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. On a :*

$$\begin{aligned} \det(A_1, \dots, A_{k-1}, A_k + \lambda B, A_{k+1}, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, \dots, A_n) \\ + \lambda \det(A_1, \dots, A_{k-1}, B, A_{k+1}, \dots, A_n). \end{aligned}$$

Démonstration. Cette formule découle directement du développement par la k-ème colonne. On a :

$$\begin{aligned} \det(A_1, \dots, A_{k-1}, A_k + \lambda B, A_{k+1}, \dots, A_n) &= \sum_{i=1}^{n} (a_{ik} + \lambda b_i)(-1)^{i+k} \det(M_{ik}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k} \det(N_{ik}) \\ &\quad + \lambda \sum_{i=1}^{n} b_i (-1)^{i+k} \det(O_{ik}) \\ &= \det(A) + \lambda \det(A_1, \dots, A_{k-1}, B, A_{k+1}, \dots, A_n), \end{aligned}$$

[1] je vous laisse chercher pourquoi on suppose ça, et pourquoi le résultat reste valable si $i > j$.
[2] On peut, bien évidement, énoncer le théorème sur les lignes de A.

avec M_{ik} , N_{ik} et O_{ik} les matrices obtenues en enlevant la i-ème ligne et la k-ème colonne, respectivement à A, $(A_1\,, \dots, A_k + \lambda B\,, \dots, A_n)$ et $(A_1\,, \dots, B\,, \dots, A_n)$. □

Proposition (Application alternée)**.** *Le déterminant est une application alternée, c'est-a-dire que si deux de ses colonnes sont égales, il est nul.*

Démonstration. Commençons par prouver le résultat sur un cas particulier. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice. On note $(A_1\,, \dots, A_n)$ ses colonnes, et on suppose que deux colonnes consécutives k et $k+1$ sont égales. On développe par rapport à la k-ème colonne :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k} \det(M_{ik}),$$

où l'on a noté M_{ik} la matrice obtenue à partir de A en enlevant la i-ème ligne et la k-ème colonne. On remarque que $M_{ik} = M_{i(k+1)}$, et on écrit :

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{i=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k} \det(M_{ik})\\ &= -\sum_{i=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k+1} \det(M_{ik})\\ &= -\sum_{i=1}^{n} a_{i(k+1)}(-1)^{i+k+1} \det(M_{i(k+1)})\\ &= -\det(A).\end{aligned}$$

On peut facilement étendre ce cas particulier au cas ou la différence $k - k'$ des indices deux colonnes identiques k et k' est impaire.

Comment s'en sortir dans le cas ou $k - k'$ est pair ? On développe par rapport à une colonne k'', comprise entre k et k'. Ce faisant, les matrices $M_{ik''}$ ont deux colonnes identiques, dont la différence des indices est impaire, et on applique le résultat précédent. □

Proposition (Application antisymétrique)**.** *Le déterminant est une application antisymétrique, c'est-à-dire que pour toute famille $(A_1\,, \dots, A_n)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on a :*

$$\det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) = -\det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_n),$$

ou encore avec les notations des matrices d'opérations élémentaires :

$$\det(L_{ij}A) = \det(A).$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du caractère alternant du déterminant. On a :

$$\begin{aligned}\det(A_1, \dots, A_i + A_j, \dots, A_i + A_j, \dots, A_n) &= 0\\ &= \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_i + A_j, \dots, A_n)\\ &\quad + \det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_i + A_j, \dots, A_n)\\ &= \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n)\\ &\quad + \det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_n),\end{aligned}$$

d'où :

$$\det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) = -\det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_n).$$

□

Ces propriétés sont fondamentales[1], et facilitent grandement le calcul de déterminant. On peut les réécrire en termes d'opérations sur les matrices élémentaires :

[1]En fait, on définit classiquement le déterminant comme l'unique application multilinéaire antisymétrique sur $\mathbb{R}^n$, et on dérive les formules de développement par lignes et colonnes

Proposition (Opérations sur les matrices élémentaires)**.** *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice, et $\alpha \in \mathbb{R}$ un scalaire. Avec nos notations sur les matrices d'opérations élémentaires, on a :*

1. $\det(L_{ij}A) = -\det(A)$,
2. $\det(L_i(\alpha)A) = \alpha\det(A)$,
3. $\det(L_{ij}(\alpha)A) = \det(A)$.

Démonstration. C'est simplement une réécriture des propriétés précédentes. On en profite pour donner une autre preuve. On peut utiliser le fait que le déterminant est un morphisme :

$$\det(AB) = \det(A)\det(B), \qquad \forall A, B \in M_n(\mathbb{R}).$$

On a par exemple :

$$\det(L_{ij}A) = \det(L_{ij})\det(A).$$

Or, d'après les calculs de la section précédente, $\det(L_{ij}) = -1$, d'où le résultat. □

1.4 Calcul classiques de déterminants

Calculer un déterminant plus grand que 2×2 avec la formule de développement est fastidieux. De plus le résultat obtenu, lorsqu'on n'a pas fait d'erreurs de calculs, est inutilisable. La formule de développement nous donne un résultat sous forme développée, alors qu'on voudrait un résultat sous forme factorisée.

La stratégie générale est la suivante. On utilise au choix[1] :

- les trois propriétés du déterminant (anti-symétrie, caractère alternant, multilinéarité),
- les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes,

pour se ramener au déterminant d'une matrice facile à calculer, c'est à dire :

- au déterminant d'une matrice triangulaire,
- au déterminant d'une matrice avec une ligne (ou colonne) qui ne comporte qu'un coefficient non-nul.

On applique maintenant cette stratégie sur des exemples qui peuvent sembler artificiels, mais qui nous permettent de manipuler.

- On veut calculer :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}.$$

  On commence par utiliser trois fois de suite le caractère multilinéaire du déterminant, pour faire sortir les facteurs a, b et c.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ a & b^2 & c^2 \\ a^2 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \\ &= ab\begin{vmatrix} 1 & 1 & c \\ a & b & c^2 \\ a^2 & b^2 & c^3 \end{vmatrix} \\ &= abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

[1] pourquoi est-ce la même chose ?

Puis, on utilise le caractère alternant, pour enlever a-fois la première ligne successivement aux deuxième et troisième lignes.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} &= abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \\
&= abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \\
&= abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Enfin, on développe par rapport à la première colonne, qui est presque vide, et on obtient :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} &= abc((b-a)(c^2-a^2) - (b^2-a^2)(c-a)) \\
&= abc(b-a)(c-a)(c-b).
\end{aligned}$$

- On calcule ensuite :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ a^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b+c & c+a \\ b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} \text{ (multilinéarité)} \\
&= \begin{vmatrix} a & b+c & c \\ a^2 & b^2+c^2 & c^2 \\ a^3 & b^3+c^3 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & c+a \\ b^2 & c^2 & c^2+a^2 \\ b^3 & c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} \text{ (caractère alternant)} \\
&= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ b^2 & c^2 & a^2 \\ b^3 & c^3 & a^3 \end{vmatrix} \text{ (caractère alternant)} \\
&= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & a & c \\ b^2 & a^2 & c^2 \\ b^3 & a^3 & c^3 \end{vmatrix} \text{ (antisymétrie)} \\
&= 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \text{ (antisymétrie)} \\
&= 2abc(b-a)(c-a)(c-b).
\end{aligned}$$

- On termine cette série d'exemples et on re-calcule :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix},$$

en utilisant cette fois ci les opérations élémentaires sur les lignes. On note :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix},$$

et on a :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} L_1(a)L_2(b)L_3(c),$$

puis :

$$L_{3,1}(-a)L_{2,1}(-a)M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix} L_1(a)L_2(b)L_3(c).$$

En utilisant la formule de morphisme, on a alors :

$$\det(L_{3,1}(-a)L_{2,1}(-a))\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \det(L_1(a)L_2(b)L_3(c)).$$

Or, d'après les calculs de déterminants de matrices élémentaires, on a :

$$\begin{aligned} \det(L_{3,1}(-a)L_{2,1}(-a)) &= \det(L_{3,1}(-a))\det(L_{2,1}(-a)) \\ &= 1, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \det(L_1(a)L_2(b)L_3(c)) &= \det(L_1(a))\det(L_2(b))\det(L_3(c)) \\ &= abc. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \det(M) &= abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \\ &= abc(b-a)(c-a)(c-b). \end{aligned}$$

1.5 Déterminant et rang

Proposition. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. A est inversible si et seulement si :*

$$\det(A) \neq 0.$$

Dans ce cas, on a :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Démonstration. Si on admet que, lorsqu'une matrice A est inversible, $\det(A)$ est non-nul, la deuxième partie de la propriété découle directement du fait que le déterminant est un morphisme :

$$\begin{aligned} \det(A^{-1}A) = \det(I_n) &= 1 \\ &= \det(A^{-1})\det(A), \end{aligned}$$

donc :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Il nous reste à prouver que A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. On rappelle qu'une matrice est inversible si et seulement si sa l.r.e.[1] est la matrice identité I_n. On rappelle également qu'on obtient la l.r.e. d'une matrice par un nombre fini d'opérations élémentaires.

On commence par prouver que si A est inversible, $\det(A) \neq 0$. Il existe donc $L_1, \dots L_k$ des matrices d'opérations élémentaires telles que :

$$I_n = \left(\prod_{i=1}^{k} L_k \right) A.$$

[1] matrice ligne réduite échelonnée.

On a donc :

$$1 = \left(\prod_{i=1}^{k} \det(L_k) \right) \det(A),$$

et on en déduit que $\det(A)$ est non-nul.

On prouve maintenant la réciproque, et on suppose que $\det(A)$ est non nul. On note B la matrice l.r.e. de A. Il existe donc $L_1, \ldots L_k$ des matrices d'opérations élémentaires telles que :

$$B = \left(\prod_{i=1}^{k} L_k \right) A.$$

Or, si L est une matrice d'opération élémentaire, $\det(L) \neq 0$. Comme le déterminant est un morphisme multiplicatif, on en déduit que $\det(B) \neq 0$. La seule matrice l.r.e. dont le déterminant est non-nul est l'identité. Donc $B = I_n$ et A est inversible. $\square$

On peut même être plus précis :

Proposition. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Le rang de A est le plus grand entier r tel qu'il existe un mineur de A d'ordre r non nul.*

1.6 Déterminants et systèmes linéaires

Le déterminant permet de donner une formule exacte pour l'inverse d'une matrice.

Définition (Comatrice)**.** Soit $A \in M_n\mathbb{R}$. On appelle comatrice de A, et on note $\operatorname{Com} A$ la matrice des cofacteurs de A :

$$\operatorname{Com} A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}),$$

où M_{ij} désigne la matrice obtenue à partir de A en retirant la ligne i et la colonne j.

Proposition. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On a :*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\operatorname{Com} A)^t.$$

Démonstration. On calcule le produit :

$$\begin{aligned}
(A \operatorname{Com} A^t)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (\operatorname{Com} A^t)_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \operatorname{Com} A_{jk} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{k+j} \det(M_{jk}).
\end{aligned}$$

On a donc, sur la diagonale :

$$(A \operatorname{Com} A)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{k+i} \det(M_{ik}) = \det(A).$$

De plus, hors de la diagonale, on a $i \neq j$, et on est en train de calculer le déterminant de la matrice :

$$(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_i, \ldots, A_n),$$

qui est nul car le déterminant est alternant. On a donc :

$$A \operatorname{Com} A^t = \det(A) I_n,$$

d'où le résultat. $\square$

De cette formule, on déduit une formule pour la solution d'un système linéaire :

Proposition. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible, et $K \in \mathbb{R}^n$ un vecteur. Le système linéaire :*

$$AX = K,$$

admet une unique solution, donnée par :

$$X = (x_i), \qquad x_i = \frac{\det(A^{(i)})}{\det(A)} \qquad \forall 1 \leq i \leq n,$$

où $A^{(i)}$ est obtenue en remplaçant la i-ème colonne de A par le vecteur colonne K.

Démonstration. On sait déjà que si A est inversible, le système admet une unique solution :

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}K \\ &= \frac{1}{\det(A)}(\operatorname{Com} A^t)K. \end{aligned}$$

On calcule $(\operatorname{Com} A^t)K$:

$$\begin{aligned} ((\operatorname{Com} A^t)K)_i &= \sum_{k=1}^{n} k_i \operatorname{Com} A_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k_i (-1)^{i+k} \det(M_{ki}) \\ &= \det(A^{(i)}). \end{aligned}$$

Le résultat suit. $\square$

On note que cette formule est principalement utilisée pour démontrer des résultats théoriques, ou pour faire rapidement des calculs à la main, sur des matrices 2×2 ou 3×3. On ne l'utilise pas en informatique, car sa complexité algorithmique est rédhibitoire. Elle est en $O(n\,!)$, alors que l'algorithme basé sur la l.r.e. est en $O(n^3)$.

Chapitre 2

Espaces vectoriels

La notion d'espace vectoriel, et son caractère abstrait, peuvent rebuter. C'est pourtant la bonne manière de donner une structure commune à plusieurs ensembles, comme :

- le plan complexe : $\mathbb{C}$,
- l'ensemble des vecteurs colonnes : $\mathbb{R}^n$,
- l'espace des matrices carrées de taille n sur $\mathbb{R}$: $M_n(\mathbb{R})$,
- l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Ainsi, si on démontre un théorème sur les espaces vectoriels, on aura en fait démontré des théorèmes sur $\mathbb{C}, \mathbb{R}^n \dots$ en même temps.

Dans un espace vectoriel, on veut :

- pouvoir additionner deux éléments, avec une loi : '+',
- pouvoir multiplier un élément par un nombre réel ou complexe, grâce à une loi externe notée '$\cdot$',
- que ces deux lois interagissent correctement ensemble.

Voyons la définition :

Définition. Soit E un ensemble non vide. On dit que c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si :

1. E est muni d'une loi $+ \colon E \times E \to E$, telle que $(E, +)$ est un groupe commutatif,
2. E est muni d'une loi externe $\cdot \colon \mathbb{R} \times E \to E$ telle que :
   (a) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \qquad \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$,
   (b) $\forall x \in E$, $1 \cdot x = x$,
3. les deux lois vérifient :
   (a) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in E, (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$,
   (b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E, \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.

On admet que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels :

Théorème. *Soit $n > 1$ un entier. Les ensembles $\mathbb{R}^n$, $M_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[X]$ sont des espaces vectoriels.*

2.1 Sous espaces vectoriels

De manière générale, quand on enlève des éléments à un espace vectoriel, on casse sa structure. L'ensemble obtenu n'est généralement pas un espace vectoriel.

Exemple. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, puis on lui enlève le point $(1\,,0)$:

$$F = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}\,.$$

L'ensemble F n'est pas un espace vectoriel. En effet, il contient le point $(-1\,,0)$ mais pas son opposé. Autrement dit, F n'est pas stable par l'opération de multiplication par un scalaire '$\cdot$'.

Cependant, dans certains cas particuliers, on peut enlever des éléments à un espace vectoriel, tout en préservant sa structure. On parle alors de sous-espaces vectoriels. Par exemple, l'ensemble des fonctions dérivables $C^1(\mathbb{R}\,,\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}\,,\mathbb{R})$. En fait, on a même la chaîne d'inclusions suivante :

$$C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \cdots \subset C^n(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \cdots \subset C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),$$

où chaque ensemble est un sous-espace vectoriel des espaces à sa droite.

Définition (Sous-espace vectoriel)**.** Soit E un espace vectoriel, soit $F \subset E$ un sous ensemble non vide de E. On dit que F est un sous espace vectoriel de E si c'est un espace vectoriel.

Techniquement, pour que $F \subset E$ soit un sous-espace vectoriel de E, il faudrait vérifier la longue liste d'axiomes. Cependant, en pratique, il suffit de vérifier :

Proposition (Caractérisation d'un sous-espace vectoriel)**.** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et $F \subset E$ un sous-ensemble de E non vide. On muni F des lois $'+|_F'$ et $'\cdot|_F'$, qui sont les restrictions à F des lois sur E :*

$$\begin{aligned} +|_F : F \times F &\to E \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot|_F : \mathbb{R} \times F &\to E \\ (\lambda,y) &\mapsto \lambda \cdot y \end{aligned}$$

Muni de ces lois restreintes, F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

1. *F est stable par addition : $\forall (x\,,y) \in F \times F\,, x+y \in F$,*
2. *F est stable par multiplication scalaire : $\forall (\alpha\,,x) \in \mathbb{R} \times F\,, \alpha \cdot x \in F$.*

Démonstration. Si F est un espace vectoriel, il est stable par les opérations '$+|_F$'et '$\cdot|_F$'. Cela vient directement de la définition des opérations dans un espace vectoriel :

$$+ \colon F \times F \to F,$$

et

$$\cdot \colon \mathbb{R} \times F \to F.$$

On suppose maintenant que $F \subset E$ est stable par addition et par multiplication par un scalaire. Montrons que c'est un espace vectoriel.

Notons que l'on peut remplacer E par F dans l'espace d'arrivée des opération :

$$\begin{aligned} +|_F : F \times F &\to F \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot|_F : \mathbb{R} \times F &\to F \\ (\lambda,y) &\mapsto \lambda \cdot y \end{aligned}$$

On a fait le plus important. On vérifie maintenant que $(F, +)$ est un groupe commutatif (point 1). Soit $f \in F$ un élément de F. On a :

$$0 \cdot f = 0 \in F,$$

par stabilité de '$\cdot$'. On a aussi :

$$-1 \cdot f \in F,$$

et

$$f + -1 \cdot f = 1 \cdot f + -1 \cdot f = (1-1) \cdot f = 0,$$

donc f admet un opposé par $+$ dans F. Les propriétés d'associativité et de commutativité découlent directement de la restriction de $+$ a F. $(F, +)$ est donc un groupe commutatif.

On laisse maintenant le lecteur vérifier que F satisfait les axiomes 2 . et 3 . de la définition d'un espace vectoriel. $\square$

Exemple. On souhaite prouver que l'ensemble :

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x + y = 0\right\}$$

est un espace vectoriel. Au lieu de montrer que E vérifie tous les axiomes de la définition d'espace vectoriel, on se contente de montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. On a :

- $E \subset \mathbb{R}^2$,
- $E \neq \emptyset$,
- E est stable par addition : si $a, b \in E$, avec

  $$a = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$
  $$b = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

  alors

  $$a + b = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix},$$

  et

  $$\begin{aligned} 2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) &= (2x_1 + y_1) + (2x_2 + y_2) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

  donc $a + b \in E$ et E est stable par addition,
- E est stable par multiplication scalaire : si $a \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, avec :

  $$a = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

  alors

  $$\lambda \cdot a = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

  et

  $$\begin{aligned} 2\lambda x + \lambda y &= \lambda(2x + y) \\ &= \lambda \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

  donc $\lambda \cdot a \in E$ et E est stable par multiplication scalaire.

Donc E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, donc E est un espace vectoriel.

On va maintenant rechercher les opérations ensemblistes qui préservent la structure d'espace vectoriel.

Proposition. *Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Les ensembles suivants sont encore des sous-espaces vectoriels de E :*

1. *la somme $F + G = \{x + y,\ \text{avec } x \in F \text{ et } y \in G\}$,*
2. *l'intersection $F \cap G$.*

Démonstration. On commence par montrer que $F + G$ est un sev de E. Soit $a\,, b \in F + G$, et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Il existe $(f_1\,, g_1) \in F \times G$ et $(f_2\,, g_2) \in F \times G$ tels que :

$$a = f_1 + g_1, \qquad b = f_2 + g_2.$$

Il est stable par addition, car :

$$\begin{aligned} a + b &= (f_1 + g_1) + (f_2 + g_2) \\ &= (f_1 + f_2) + (g_1 + g_2) \in F + G. \end{aligned}$$

De plus, il est stable par multiplication scalaire, car :

$$\begin{aligned} \alpha a &= \alpha(f_1 + g_1) \\ &= \alpha f_1 + \alpha g_1 \in F + G \end{aligned}$$

On montre maintenant que $F \cap G$ est un sev de E. Soit $a\,, b \in F \cap G$, et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a $a\,, b \in F$ donc, comme F est un sev, il est stable par addition et $a + b \in F$. De meme $a\,, b \in G$, donc $a + b \in G$. Donc $a + b \in F \cap G$. Je laisse le lecteur montrer que $F \cap G$ est stable par multiplication scalaire. □

Remarque. Notons que l'union $F \cup G$ ne donne généralement pas un sous-espace vectoriel de E. Voyons ça sur un exemple. Les deux ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $C^0(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} F &= \{x \mapsto \lambda \exp(x), \lambda \in \mathbb{R}\} \\ G &= \{x \mapsto \lambda \cos(x), \lambda \in \mathbb{R}\}\,, \end{aligned}$$

cependant leur union ne contient pas la fonction $x \longmapsto \exp(x) + \cos(x)$. Elle n'est donc pas stable par addition !

2.2 Familles libres, familles génératrices

On déduit facilement de la caractérisation d'un sous-espace vectoriel que le plus petit sous espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R})$ qui contient la fonction exponentielle est :

$$\{x \mapsto \lambda \exp(x), \lambda \in \mathbb{R}\}\,.$$

Le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient la famille de vecteurs $(e_1\,, \ldots, e_n)$, doit contenir au moins l'ensemble des combinaisons linéaires :

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n,$$

avec $\lambda_1\,, \ldots, \lambda_n$ des scalaires. On note usuellement cet ensemble $\mathrm{vect}(e_1\,, \ldots, e_n)$. Comme la notation le suggère, c'est suffisant. On énonce la propriété :

Proposition. *Soit $(e_1\,, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. L'ensemble des combinaisons linéaires*

$$\mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_n) = \left\{ u \in E \;\middle|\; \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}, u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\}$$

est un sous espace vectoriel de E. C'est même le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient les vecteurs $e_1\,, \ldots, e_n$.

Démonstration. Soit E un espace vectoriel, et $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs de E. On commence par prouver que $\operatorname{vect}(e_1, \dots, e_n)$ est un sous espace vectoriel de E.

Montrons que $\operatorname{vect}(e_1, \dots, e_n)$ est stable par addition. Soient $a, b \in \operatorname{vect}(e_1, \dots, e_n)$. Il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $\mu_1, \dots, \mu_n$ tels que :

$$a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$
$$b = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} a + b &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) e_i, \end{aligned}$$

donc le vecteur $a + b$ s'écrit comme une combinaison linéaire des $(e_1, \dots, e_n)$. Donc $a + b \in \operatorname{vect}(e_1, \dots, e_n)$, et $\operatorname{vect}(e_1, \dots, e_n)$ est stable par addition.

Montrons que $\operatorname{vect}(e_1, \dots, e_n)$ est stable par multiplication scalaire. Soient $a \in \operatorname{vect}(e_1, \dots, e_n)$ et μ un scalaire. Il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \mu \cdot a &= \mu \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu \cdot (\lambda_i e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu \lambda_i e_i, \end{aligned}$$

donc $\mu \cdot a \in \operatorname{vect}(e_1, \dots, e_n)$, et $\operatorname{vect}(e_1, \dots, e_n)$ est stable par multiplication scalaire.

Comme $\operatorname{vect}(e_1, \dots, e_n)$ est stable par addition et par multiplication scalaire, c'est un sous espace vectoriel de E.

Montrons maintenant que $\operatorname{vect}(e_1, \dots, e_n)$ est le plus petit sous espace vectoriel de E qui contient les vecteurs $e_1, \dots, e_n$. Cela revient a montrer que si F est un sous espace vectoriel de E qui contient les vecteurs $e_1, \dots, e_n$, alors nécessairement :

$$\operatorname{vect}(e_1, \dots, e_n) \subset F.$$

Soit donc F un sous espace vectoriel de E qui contient les vecteurs $e_1, \dots, e_n$, et soit $a \in \operatorname{vect}(e_1, \dots, e_n)$. Il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Or, comme F est stable par multiplication scalaire, on a :

$$\forall 1 \leq i \leq n, \lambda_i e_i \in F,$$

et comme F est stable par addition, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in F,$$

On en déduit :

$$\mathrm{vect}(e_1, \dots, e_n) \subset F,$$

et on a montré que $\mathrm{vect}(e_1\,, \dots, e_n)$ est le plus petit sev de E qui contient les vecteurs $e_1\,, \dots, e_n$.

□

Exemple. Soit $e_1 = (1\,,0\,,0)$ et $e_2 = (1\,,1\,,0)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. L'ensemble $\mathrm{vect}(e_1\,,e_2)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. De plus :

$$\begin{aligned}\mathrm{vect}(e_1, e_2) &= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}.\end{aligned}$$

Quand on travaille dans un espace vectoriel, posséder une bonne famille est primordial. On peut ainsi contrôler l'espace engendré par cette famille, en écrivant chacun de ses éléments comme combinaison linéaire des éléments de la famille. Il serait intéressant de pouvoir contrôler l'espace E en entier. On définit donc :

Définition (Famille génératrice)**.** Soit $(e_1\,, \dots, e_n)$ une famille (finie) de vecteurs de E. On dit que c'est une famille génératrice si :

$$\mathrm{vect}(e_1, \dots, e_n) = E,$$

ou encore si :

$$\forall e \in E, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, e = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Une famille génératrice est une famille qui, par combinaisons linéaires, engendre tous les vecteurs de E. Intuitivement, une famille génératrice est une famille suffisamment grande, suffisamment variée. Ainsi, si on rajoute des vecteurs à une famille génératrice, elle reste génératrice.

Proposition. *Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.*

Démonstration. Soit $(e_1\,, \dots, e_n)$ une famille génératrice de E. Soit encore $e \in E$. On a :

$$\mathrm{vect}(e_1, \dots, e_n) \subset \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_n, e),$$

donc :

$$E = \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_n) \subset \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_n, e) \subset E,$$

puis :

$$\mathrm{vect}(e_1, \dots, e_n, e) = E.$$

On en déduit que $(e_1\,, \dots, e_n\,, e)$ est une famille génératrice de E. □

Exemple. On considère l'espace vectoriel $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - y = 0\right\}$. On en cherche une famille génératrice. Soit $u = (x\,, y\,, z) \in E$ un vecteur quelconque de E. Comme $u \in E$, on a :

$$x = y,$$

et donc :

$$\begin{aligned} u &= \begin{pmatrix} y \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \\ &= y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On pose $e_1 = (1\,,1\,,0)$ et $e_2 = (0\,,0\,,1)$. On en conclut que $E = \mathrm{vect}(e_1\,, e_2)$.

On a maintenant envie de caractériser la redondance d'informations dans les familles.

Définition (Famille libre)**.** Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit que c'est une famille libre si elle vérifie l'une de ces trois conditions équivalentes :

1. pour tout i dans $[\![1, n]\!]$:

$$\mathrm{vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n) \subsetneq \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_n),$$

2. la seule combinaison linéaire nulle est la combinaison triviale :

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0,$$

3. chaque élément de $\mathrm{vect}(e_1, \dots, e_n)$ admet une unique décomposition en combinaison linéaire :

$$\forall e \in \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_n), \exists! \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, e = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Démonstration. On vérifie que ces trois conditions sont bien équivalentes. Pour ce faire, on montre que $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

Commençons par montrer que $1 \Rightarrow 2$. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$. On suppose par l'absurde qu'il existe un $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} e_i &= \frac{1}{\lambda_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j e_j \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} e_j, \end{aligned}$$

et donc $e_i \in \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n)$. C'est absurde, donc $1 \Rightarrow 2$.

Montrons maintenant que $2 \Rightarrow 3$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ deux familles de scalaires, telles que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i.$$

On a alors :

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) e_i = 0.$$

Donc, d'après le point 2 :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i - \mu_i = 0,$$

ou encore :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = \mu_i.$$

Donc $2 \Rightarrow 3$.

Montrons enfin que $3 \Rightarrow 1$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. D'après le point 3, la seule décomposition de e_i en combinaison linéaire des $(e_1, \dots, e_n)$ est la combinaison triviale :

$$e_i = e_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} 0 e_j.$$

On ne peut donc pas décomposer e_i sur la famille $(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n)$. Autrement dit :

$$e_i \notin \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n),$$

ou encore :
$$\mathrm{vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n) \subsetneq \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_n).$$
Et donc $3 \Rightarrow 1$. $\square$

Exemple. Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$. Soit encore deux vecteurs de E : $e_1 = (1\,,1\,,0)$ et $e_2 = (0\,,0\,,1)$. On veut montrer que la famille $(e_1\,, e_2)$ est une famille libre. On cherche les scalaires $\lambda_1\,, \lambda_2$ tels que :
$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0.$$
Cela revient à résoudre le système :
$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$
La seule solution du système est la solution triviale $\lambda_1 = 0\,, \lambda_2 = 0$. La famille $(e_1\,, e_2)$ est donc libre.

On a évidement la propriété suivante :

Proposition. *Toute sous famille d'une famille libre est libre.*

Démonstration. Soit E un espace vectoriel, $n \geq 2$ un entier, et $(e_1\,, \dots, e_n)$ une famille libre de vecteurs de E. Pour prouver la propriété, il suffit de montrer que la famille $(e_1\,, \dots, e_{n-1})$ est libre[1]. Comme la famille $(e_1\,, \dots, e_n)$ est libre, on a :
$$\forall i \in [\![1\,, n]\!], \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n) \subsetneq \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_n),$$
donc en particulier :
$$\forall i \in [\![1\,, n-1]\!], e_i \notin \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n).$$
Donc :
$$\forall i \in [\![1\,, n-1]\!], e_i \notin \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{n-1}),$$
et donc :
$$\forall i \in [\![1\,, n-1]\!], \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{n-1}) \subsetneq \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_{n-1}),$$
et la famille $(e_1\,, \dots, e_{n-1})$ est libre. $\square$

Intuitivement, les familles libres sont des petites familles, et les familles génératrices sont des grandes familles. On a le résultat suivant.

Lemme (Admis)**.** *Soit E un espace vectoriel, et $(v_1\,, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs qui engendre E. Soit encore $(w_1\,, \dots, w_m)$ une famille libre de vecteurs de E. On a $m \leq n$.*

2.3 Base et dimension

On veut représenter un vecteur x quelconque de E comme une somme de vecteurs de base. Si une famille génératrice assure l'existence d'une telle décomposition, une famille libre assure l'unicité. Une famille qui vérifie ces deux critères assure donc l'existence et l'unicité de la décomposition. On peut en faire une définition :

Définition. Soit $(e_1\,, \dots, e_n)$ une famille de E. On dit que c'est une base si c'est en même temps une famille libre et génératrice.

Cette définition prend son sens avec le théorème suivant :

Théorème. *Soit E un espace vectoriel, qui possède une base B de taille finie. Alors toutes les bases de E sont de la même taille.*

[1] pourquoi ?

Démonstration. On note $B = (e_1, \dots, e_n)$ la base de taille finie de E. Soit B' une base de E. On montre que B' est de même taille que B. On note n la taille de B, et m la taille de B'. Comme B est une base, c'est une famille génératrice. Comme B' est une base, c'est une famille libre. D'après le lemme, on a $m \leq n$. En inversant les rôles de B et B', on montre que $n \leq m$. On en déduit que $m = n$. Autrement dit, les deux familles sont de la même taille.

□

On appelle un tel espace vectoriel un espace de dimension finie. La longueur d'une base ne dépend donc pas de la base considérée, mais est un nombre intrinsèque à l'espace vectoriel considéré.

Définition. Soit E un espace vectoriel, qui possède une base de longueur n. On dit qu'il est de dimension n.

Si on a une famille qui est seulement libre, ou seulement génératrice, peut-on se débrouiller pour obtenir une base ?

Théorème (Base incomplète, admis)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors toute famille libre peut-être complétée en une base de E.*

Théorème (admis)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors de toute famille génératrice on peut extraire une sous famille qui soit une base de E.*

Obtenir des bases peut être difficile. On peut s'épargner une partie du travail avec la proposition suivante :

Proposition. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On note n sa dimension.*

- *toute famille libre $(e_1, \dots, e_n)$ de n vecteurs est une base de E,*
- *toute famille génératrice $(e_1, \dots, e_n)$ de n vecteurs est une base de E.*

Démonstration. Soit B une famille libre de taille n. On suppose par l'absurde qu'elle n'est pas une base. On la complète en une famille B' qui est une base de E. On note $|\cdot|$ le nombre de vecteurs d'une famille. On a :

$$|B| = n < |B'| .$$

Or E admet une base de taille n, et toutes les bases ont la même taille. C'est absurde. Donc B est une base de E.

On laisse le lecteur faire le même raisonnement pour les familles génératrices de taille n. □

2.4 Espaces supplémentaires

Définition. Soit E un espace vectoriel, et F, G deux sous espaces de E. On dit que F et G sont supplémentaires si on a :

1. $E = F + G$,
2. $F \cap G = \{0\}$.

On note $E = F \oplus G$.

Proposition. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F, G deux sous espaces supplémentaires de E. Tout vecteur $e \in E$ admet une unique décomposition*

$$e = f + g,$$

avec $f \in F$, et $g \in G$.

Démonstration. L'existence de la décomposition provient de la définition. On a : $E = F + G$, donc pour tout $e \in E$, il existe $f \in F$, $g \in G$ tels que :

$$e = f + g.$$

Montrons maintenant l'unicité de la décomposition. Soit $e \in E$ un vecteur, et f, $f' \in F$, et g, $g' \in G$ tels que :

$$\begin{aligned} e &= f + g \qquad (2.1) \\ &= f' + g'. \qquad (2.2) \end{aligned}$$

On a alors :

$$0 = (f - f') + (g - g'),$$

et donc :

$$f - f' = g' - g.$$

On a donc :

$$f - f' \in F \cap G, \quad g - g' \in F \cap G.$$

Or :

$$F \cap G = \{0\},$$

donc $f = f'$ et $g = g'$ et la décomposition $e = f + g$ est unique. □

Proposition. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F, G deux sous espaces supplémentaires de E. Soit B une base de F, et B' une base de G. Alors $B \cup B'$ est une base de $E = F \oplus G$.*

Démonstration. Soit $e \in E$ un vecteur. Il existe un unique couple $(f, g) \in F \times G$ tel que :

$$e = f + g.$$

Il existe une unique décomposition de f sur la base B, et il existe une unique décomposition de g sur la base B'. La somme des deux décomposition est donc l'unique décomposition de e sur la famille $B \cup B'$. La famille $B \cup B'$ est donc une base de E. □

Corollaire. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F, G deux sous espaces supplémentaires de E. On a :*

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(G).$$

2.5 Sous-espace vectoriel de dimension finie et rang

On a déjà vu la notion de rang d'une matrice dans le cas d'une matrice. On peut définir une notion similaire dans le cas d'une famille de vecteur.

Définition (Rang d'une famille de vecteurs)**.** Soit E un espace vectoriel, et $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteur de E. On appelle rang de cette famille la dimension de l'espace engendré :

$$\operatorname{rang}(u_1, \dots, u_p) = \dim \operatorname{vect}(u_1, \dots, u_p).$$

Chapitre 3

Applications Linéaires

Comme on l'a vu, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ sont deux espaces vectoriels. Ils se ressemblent de très près : ils sont tous deux la donnée d'un couple de deux réels. On peut passer de l'un à l'autre en définissant deux fonctions Φ et Ψ :

$$\begin{aligned} \Phi\colon \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{C} & \qquad \Psi\colon \quad \mathbb{C} &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto x+iy, & x+iy &\mapsto (x,y). \end{aligned}$$

On voudrait avoir une notion de similarité entre espaces vectoriels.

Définition. Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. On dit qu'il sont isomorphes s'il existe une fonction $\Phi\colon E \to F$ telle que :

1. Φ est bijective,
2. Φ préserve la structure d'espace vectoriel :
   (a) $\forall x\,, y \in E\,, \Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y)\,,$
   (b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}\,, \forall x \in E\,, \Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x).$

Annexe A

Rappels du cours du premier semestre

Loi de composition interne.
Produit cartésien