

Analyse fonctionnelle : du continu au discret

ENSIMAG 2^{ème} Année 1^{er} semestre

S. Meignen

2017/2018

Table des matières

1	Théorie élémentaire des distributions	7
1.1	Motivations	7
1.2	L'espace des fonctions test	7
1.2.1	Notations	7
1.2.2	Support d'une fonction	8
1.2.3	Définition des fonctions test $\mathcal{D}(\Omega)$	8
1.2.4	Convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$	8
1.3	Définition des distributions	9
1.4	Convergence des distributions	10
1.5	Opérations sur les distributions	11
1.5.1	Dérivation des distributions	11
1.5.2	Multiplication par les fonctions C^∞	16
1.5.3	Convolution d'une fonction et d'une distribution : $\mathcal{D}'(\Omega) * \mathcal{D}(\Omega)$	18
1.6	Distributions périodiques	19
1.7	Distribution à support compact	20
2	Rappel : transformée de Fourier des fonctions	23
2.1	Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^N)$	23
2.1.1	Théorèmes de densité	23
2.1.2	Définition de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ et propriétés	24
2.1.3	Inversion de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^N)$	27
2.1.4	Produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R}^N)$	29
2.1.5	Convolution et transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^N)$	30
2.2	Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^N)$	30
2.2.1	L'espace $L^2(\mathbb{R}^N)$	30
2.2.2	Convolution dans $L^2(\mathbb{R}^N)$	31
2.2.3	Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^N)$	31
2.2.4	Propriété de la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^N)$	33
3	Transformée de Fourier des Distributions	35
3.1	L'espace de Schwartz	35
3.2	Distributions Tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$	36
3.3	Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$	37
3.4	Propriétés de la transformée de Fourier des distributions	41
3.5	Convolution $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) * \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$	41
3.6	Convolution $\mathcal{E}'(\mathbb{R}) * \mathcal{D}'(\mathbb{R})$	43

4	Transformée de Fourier Discrète	45
4.1	Lien entre convolution et convolution circulaire	45
4.2	Définition de la TFD et propriété	46
4.2.1	Définition	46
4.2.2	TFD et convolution circulaire	46
4.2.3	Autres propriétés	47
4.3	Exemples d'applications	47
4.3.1	calcul rapide d'une convolution	47
4.3.2	Approximation des coefficients de Fourier par TFD	47
4.3.3	Relation entre coefficients de Fourier exacts et approchés	48
4.4	L'algorithme de la FFT	48
5	Théorème de Shannon	51
5.1	Formule de Poisson dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$	51
5.1.1	Forme duale de la formule de Poisson	51
5.1.2	Forme directe de la formule de Poisson	52
5.2	Formule de Poisson dans $L^1(\mathbb{R})$	52
5.3	Théorème de Shannon	52
6	Etude des filtres discrets, transformée en Z	55
6.1	Définition des filtres discrets	55
6.2	Stabilité et causalité des filtres discrets	56
6.3	Transformée en Z	57
6.4	Filtre gouverné par une équation aux différences linéaire	58
7	Espaces de Hilbert	59
7.1	Définitions	59
7.2	Projection sur un convexe	61
7.3	Représentation de Riesz	63
7.4	Bases hilbertiennes	66
7.5	L'espace $L^2(I)$	67
7.5.1	Définitions	67
7.5.2	Propriétés	68
7.6	Bases hilbertiennes de $L^2(I)$	68
7.6.1	Définition	68
7.6.2	Théorème de Parseval	68
7.7	Séries de Fourier	69
7.8	Polynômes orthogonaux	72
7.9	Base de Haar	74
8	Quelques rappels de calcul différentiel	75
8.1	Notations	75
8.2	Le théorème de dérivation des applications composées	76
8.3	Les formules de Taylor	76
8.3.1	La formule de Taylor avec reste intégral	77
8.3.2	La formule de Taylor-Young	78
8.3.3	Application : interprétation du gradient	79

8.4	La formule de Green et ses variantes	79
8.4.1	Un doigt de géométrie : domaines réguliers	79
8.4.2	Formule de Green	80
8.4.3	Un exemple en thermique	81

Chapitre 1

Théorie élémentaire des distributions

1.1 Motivations

La théorie des distributions a été introduite pour élargir la notion de fonction et pour étendre la notion de dérivation dans le cas de fonctions discontinues. Elle permet d'unifier l'étude des phénomènes discrets et des phénomènes continus, entre autres en mécanique, en électronique et en probabilités.

Pour modéliser des impulsions, le physicien Paul Dirac a l'idée dans les années 1920 d'utiliser une pseudo-fonction, déjà introduite par Oliver Heaviside, connue maintenant sous le nom de distribution de Dirac et supposée vérifier :

$$\delta_a(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x = a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et, pour toute fonction continue ϕ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x)\phi(x)dx = \phi(a).$$

Cet objet δ_a n'est sûrement pas une fonction mais il faudra attendre les années 1945-1950 et les travaux de Laurent Schwartz pour qu'un sens mathématique précis soit donné à ce concept et pour que des règles précises d'utilisation soient rigoureusement établies. L'idée fondamentale consiste à remarquer que pour connaître une fonction f il suffit de connaître les valeurs de $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$ pour un ensemble bien choisi et assez grand de fonctions φ . Cet ensemble de fonctions est appelé l'ensemble des fonctions tests. Pour pouvoir intégrer par parties sans problème, les φ seront supposées indéfiniment dérivables. Pour que l'intégrale existe pour toute fonction f localement sommable, on supposera qu'il existe, pour chaque fonction φ , un intervalle borné en dehors duquel φ s'annule. La théorie des distributions va permettre en outre de dériver des fonctions qui n'ont pas de dérivée au sens classique. C'est l'outil de base pour l'étude des équations aux dérivées partielles.

1.2 L'espace des fonctions test

1.2.1 Notations

Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^N . Un point de \mathbb{R}^N est noté $x = (x_1, \dots, x_N)$.

Pour tout N -uplet d'entiers $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ on définit $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$ et $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_N!$

Pour tout $h \in \mathbb{R}^N$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$ on note : $h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \cdots h_N^{\alpha_N}$
 Toute dérivée partielle sera notée : $\partial^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}$

1.2.2 Support d'une fonction

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser aux fonctions à support compact :

Définition 1 Soit φ une fonction continue définie sur Ω . On appelle support de φ et on note $\text{Supp}(\varphi)$ l'adhérence (dans Ω) de l'ensemble des points où φ est non nulle.

Une définition équivalente : le complémentaire (dans Ω) du support d'une fonction φ est le plus grand ouvert (dans Ω) sur lequel φ est nulle.

1.2.3 Définition des fonctions test $\mathcal{D}(\Omega)$

Définition 2 On note $\mathcal{D}(\Omega)$ (ou encore $C_0^\infty(\Omega)$) l'ensemble des fonctions définies sur Ω et à valeurs dans \mathbb{C} , indéfiniment dérivables et à support compact inclus dans Ω .

$\mathcal{D}(\Omega)$ est un espace vectoriel.

Remarque 1 Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. $\text{Supp}(\varphi)$ est compact et $\text{Supp}(\varphi) \subset \Omega$.

Posons : $\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \text{Supp}(\varphi) \\ \varphi(x) & \text{si } x \in \text{Supp}(\varphi) \end{cases}$

alors $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Exemple 1 $\varphi(x) = \begin{cases} \exp \frac{-1}{1-\|x\|^2} & \text{si } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 1 \end{cases}$

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\text{Supp}(\varphi) = \overline{B(0,1)}$

Théorème 1

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tel que :
 $\varphi(x) = 1$ pour $\|x\| \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 1$ et $\varphi(x) = 0$ pour $\|x\| \geq 1 + \varepsilon$.

Démonstration Considérons f l'indicatrice de $\overline{B(0,1)}$, et une fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, telle que $\int_{\mathbb{R}^N} \psi(x) dx = 1$ et $\text{Supp}(\psi) = \overline{B(0,\varepsilon)}$, alors $\varphi = f * \psi$ satisfait la propriété ($\text{Supp}(f * \psi) \subset \overline{B(0,1+\varepsilon)}$). On peut obtenir une telle fonction ψ simplement à partir de l'exemple 1.

1.2.4 Convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$

Définition 3 Soient φ_n et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On dit que φ_n converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si :

- $\exists K$ compact, $K \subset \Omega$ tel que $\forall n, \text{Supp}(\varphi_n) \subset K$
- $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N, \partial^\alpha \varphi_n \rightarrow \partial^\alpha \varphi$ uniformément.

Théorème 2

$\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$.

1.3 Définition des distributions

Définition 4 Une distribution T sur Ω est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$, c'est-à-dire :

- (i) $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega), \forall \lambda \in \mathbb{C}, T(\varphi_1 + \lambda\varphi_2) = T(\varphi_1) + \lambda T(\varphi_2)$
- (ii) Si $\varphi_n \rightarrow \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, alors $T(\varphi_n) \rightarrow T(\varphi)$ dans \mathbb{C}

On note $\langle T, \varphi \rangle$ ou $T(\varphi)$.

Remarque 2 Notion équivalente pour le point ii) : Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $C_k > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $\text{Supp}(\varphi) \subset K$, on ait $\langle T, \varphi \rangle \leq C_k \|\varphi\|_{C^k(K)}$, avec $\|\varphi\|_{C^k(K)} = \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty, K}$.

On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω ; c'est un espace vectoriel.

Exemples

1. On note $L^1_{loc}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables sur Ω , intégrables sur tout compact de Ω .

Par exemple, $\frac{1}{\sqrt{|x|}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on pose :

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx$$

$T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$:

- T_f est bien définie puisque $|f(x)\varphi(x)| \leq \|f\|_{\infty} \mathbb{1}_{\text{Supp}(\varphi)}(x)|\varphi(x)| \in L^1(\Omega)$
- T_f est linéaire (linéarité de l'intégrale).
- T_f est continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$:

Soit $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

$$|\langle T_f, \varphi_n \rangle| = \left| \int_{\Omega} f(x)\varphi_n(x) dx \right| \leq \int |f(x)| |\varphi_n(x)| dx \leq \|\varphi_n\|_{\infty} \int_K |f(x)| dx$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}^N$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ on pose :

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$$

$\delta_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$:

- Linéarité : $\langle \delta_a, \varphi_1 + \lambda\varphi_2 \rangle = (\varphi_1 + \lambda\varphi_2)(a) = \varphi_1(a) + \lambda\varphi_2(a) = \langle \delta_a, \varphi_1 \rangle + \lambda\langle \delta_a, \varphi_2 \rangle$
 - Continuité : Si $\varphi_n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$: $|\langle \delta_a, \varphi_n \rangle| = |\varphi_n(a)| \leq \|\varphi_n\|_{\infty} \rightarrow 0$
- Quand $a = 0$, on note $\delta = \delta_0$.

3. Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $j \in \{1, \dots, N\}$, posons :

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) dx$$

Si $\varphi_n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$: soit K compact tel que $\forall n, \text{Supp}(\varphi_n) \subset K$.

$$|\langle T, \varphi_n \rangle| \leq \left\| \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j} \right\|_{\infty} \int_K |f(x)| dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Proposition 1

|| L'application de $L^1_{loc}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ qui à f associe T_f est linéaire et injective.

Démonstration

- $\forall f_1, f_2 \in L^1_{loc}(\Omega), \forall \lambda \in \mathbb{C}, T_{f_1+\lambda f_2} = T_{f_1} + \lambda T_{f_2}$
 En effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle T_{f_1+\lambda f_2}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} (f_1 + \lambda f_2) \varphi = \int_{\Omega} f_1 \varphi + \lambda \int_{\Omega} f_2 \varphi = \langle T_{f_1}, \varphi \rangle + \lambda \langle T_{f_2}, \varphi \rangle$$
- Si $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0$, alors $f = 0$. En effet, nous avons $\mathcal{D}(\Omega)$ dense dans $L^2(\Omega)$, donc soit φ_n une suite tendant vers f dans L^2 alors $\int_{\Omega} f(x) \varphi_n(x) dx = 0$ tend vers $\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^2 = 0$ donc f est nulle presque partout.

Remarque 3 L'application définie dans la proposition 1 n'est pas surjective. Elle permet d'identifier $L^1_{loc}(\Omega)$ à un sous espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\Omega)$ qu'on appelle les distributions régulières.

1.4 Convergence des distributions

Définition 5 On dit que la suite de distributions $T_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$ converge vers la distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$.

On dit qu'une série $\sum_{n \geq 0} T_n$ converge et a pour somme T si la suite $S_p = \sum_{n=0}^p T_n$ converge vers T .

Exemples 2

1. Soit $f_n(x) = \cos(nx)$, $f_n \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. $T_{f_n} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_{f_n} = 0 \text{ (car } \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \int \cos(nx) \varphi(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{)}$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $\delta_n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
 Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\langle \delta_n, \varphi \rangle = \varphi(n) = 0$ pour n grand (car φ à support compact).

Théorème 3

Soit $T_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$.

Si pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle T_n, \varphi \rangle$ a une limite dans \mathbb{C} , alors T_n a une limite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration

- $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ entraîne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n, \varphi \rangle$ existe.
 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n, \varphi_1 + \lambda \varphi_2 \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n, \varphi_1 \rangle + \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n, \varphi_2 \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n, \varphi_1 \rangle + \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n, \varphi_2 \rangle$$
, d'où la linéarité.

— La continuité de $\lim T_n$ est une conséquence du théorème de Banach Steinhaus (admis)

Exemple 3 $\forall n, T_n = \sum_{p=0}^n \delta_p \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\text{Supp}(\varphi) \subset [-n_0, n_0]$.

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \sum_{p=0}^{n_0} \varphi(p) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{p=0}^{n_0} \varphi(p), \text{ donc il existe } T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ tel que } T_n \rightarrow T \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : T = \sum_{p \geq 0} \delta_p.$$

1.5 Opérations sur les distributions

Le but : étendre aux distributions certaines opérations définies sur les fonctions.

Les conditions :

1. La nouvelle définition doit coïncider avec l'ancienne pour les fonctions.
2. Continuité au sens des distributions des opérations définies.

1.5.1 Dérivation des distributions

Soit $f \in C^1(\Omega)$ (donc $\in L^1_{loc}(\Omega)$) et soit $1 \leq j \leq N$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx$$

$$\langle T_{\frac{\partial f}{\partial x_j}}, \varphi \rangle = - \langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rangle$$

Pour les distributions on a :

Définition 6 Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $1 \leq j \leq N$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on définit $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ par :

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \rangle \stackrel{def}{=} - \langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rangle$$

Proposition 2

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

1. Pour $1 \leq j \leq N$, $\frac{\partial T}{\partial x_j} \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pour $1 \leq j, k \leq N$ on a : $\frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_j}$
2. T est indéfiniment dérivable et on a : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$

Démonstration (du 1.)

— Soit φ et $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi + \lambda\psi \right\rangle &= -\left\langle T, \frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi + \lambda\psi) \right\rangle \\ &= -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle - \lambda \left\langle T, \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle + \lambda \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \psi \right\rangle \end{aligned}$$

— Soit $\varphi_n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, alors $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j} \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

$$\text{On a : } \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi_n \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j} \right\rangle \rightarrow 0$$

— Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_k}, \varphi \right\rangle &= -\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \left\langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j} \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} \right\rangle \text{ d'après le théorème de Schwarz, car } \varphi \text{ est régulière} \\ &= -\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_j}, \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

Proposition 3

La dérivation est continue sur $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Si $T_n, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $T_n \rightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$, $\partial^\alpha T_n \rightarrow \partial^\alpha T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle \partial^\alpha T_n, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_n, \partial^\alpha \varphi \rangle \rightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle$

Remarque 4 Toute fonction continue et même localement intégrable a des dérivées de tous les ordres (en tant que distribution) : ces dérivées ne sont pas en général des fonctions¹.

Exemple 4 Si $f \in C^1(\Omega)$: $\frac{\partial}{\partial x_j}(T_f) = T_{\frac{\partial f}{\partial x_j}}$, la dérivée est encore une distribution régulière.

Exemples 5

1. On considère T_Y , où Y est la fonction d'Heaviside définie par : $Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$Y \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, donc Y définit une distribution $T_Y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (elle est dérivable).

Soit $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\langle T'_Y, \varphi \rangle = -\langle T_Y, \varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

Donc $T'_Y = \delta_0$.

1. i.e : des distributions de la forme T_f

2. Posons $f(x) = \ln|x|$ pour $x \neq 0$.

$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ donc f définit une distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$\langle T'_f, \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} f(x)\varphi'(x)dx$ par convergence dominée.

Pour M suffisamment grand, on a que $\text{Supp}(\varphi) \subset [-M, M]$, donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq \varepsilon} f(x)\varphi'(x)dx &= \int_{\varepsilon}^M f(x)\varphi'(x)dx + \int_{-M}^{-\varepsilon} f(x)\varphi'(x)dx \\ &= [f(x)\varphi(x)]_{\varepsilon}^M - \int_{\varepsilon}^M \frac{\varphi(x)}{x}dx + [f(x)\varphi(x)]_{-M}^{-\varepsilon} - \int_{-M}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx \\ &= \underbrace{-\varphi(\varepsilon)\ln(\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon)\ln(\varepsilon)}_{\rightarrow 0} - \int_{\varepsilon \leq |x|} \frac{\varphi(x)}{x}dx \end{aligned}$$

En effet : $(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))\ln(\varepsilon) = 2\varepsilon\varphi'(\theta)\ln(\varepsilon)$ où $\theta \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, par théorème des accroissements finis, d'où : $|(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))\ln(\varepsilon)| \leq 2\|\varphi\|_{\infty}|\varepsilon\ln(\varepsilon)| \rightarrow 0$. On a donc, T'_f est bien une distribution et on définit $\text{vp}(\frac{1}{x}) := T'_f$.

Définition 7 Soit $a = a_0 < a_1 < \dots < a_p < a_{p+1} = b$ des points de \mathbb{R} . Soit f une application définie sur $]a, b[\setminus \{a_1, \dots, a_p\}$.

On dit que f est de classe C^k par morceaux si $\forall j \in \{1, \dots, p\}$, f a des dérivées jusqu'à l'ordre k sur $]a_j, a_{j+1}[$ et si ces dérivées se prolongent continûment sur $]a, a_1]$, $[a_j, a_{j+1}]$ pour $1 \leq j \leq p-1$ (si $p \geq 2$) et sur $[a_p, b[$. On note $f(a_i \pm 0)$ les limites à droite et à gauche en $a_i, i = 1, \dots, p$.

Théorème 4 Formule des sauts

Soit f de classe C^1 par morceaux sur $]a, b[$. On a :

$$T'_f = T_{f'} + \sum_{i=1}^p (f(a_i + 0) - f(a_i - 0))\delta_{a_i}$$

où T'_f désigne la dérivée de f au sens des distributions et $T_{f'}$ désigne la distribution définie par la dérivée de f en dehors des points $a_i, 1 \leq i \leq p$.

Exemple 6 $T'_Y = T_0 + \delta_0 = \delta_0$

Démonstration Pour $p = 1$: Soit $\varphi \in \mathcal{D}(]a, b[)$.

$$\begin{aligned}
\langle f', \varphi \rangle &= -\langle f, \varphi' \rangle \\
&= -\int_a^{a_1} f \varphi' - \int_{a_1}^b f \varphi' \\
&= -\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^{a_1 - 1/n} f \varphi' - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{a_1 + 1/n}^b f \varphi' \text{ par convergence dominée} \\
&= -\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[f \left(a_1 - \frac{1}{n} \right) \varphi \left(a_1 - \frac{1}{n} \right) - \int_a^{a_1 - 1/n} f' \varphi \right] \\
&\quad - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-f \left(a_1 + \frac{1}{n} \right) \varphi \left(a_1 + \frac{1}{n} \right) - \int_{a_1 + 1/n}^b f' \varphi \right] \\
&= \varphi(a_1) (f(a_1 + 0) - f(a_1 - 0)) + \underbrace{\int_a^{a_1} f' \varphi + \int_{a_1}^b f' \varphi}_{\int_a^b f' \varphi}
\end{aligned}$$

On peut étendre la formule des sauts en dimension supérieure (avant de lire cette partie, veuillez jeter un coup d'oeil aux rappels de calcul différentiel du chapitre 7).

Théorème 5 Formule des sauts dans \mathbb{R}^N

Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1 de \mathbb{R}^N . On note $\partial\Omega$ son bord et f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ telle que

- la restriction de f à Ω se prolonge en une fonction de classe C^1 sur un voisinage ouvert de $\bar{\Omega}$ et
- la restriction de f à $\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}$ est une fonction de classe C^1 sur un voisinage ouvert de $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$.

Alors la fonction f est localement intégrable sur \mathbb{R}^N et on a :

$$\partial_{x_j} T_f = \{\partial_{x_j} f\} + [f]_{\partial\Omega} n_j \sigma \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N) \text{ pour } j = 1, \dots, N$$

Dans cette formule, on a noté $\{\partial_{x_j} f\}$, la fonction continue par morceaux sur \mathbb{R}^N définie par la formule $\{\partial_{x_j} f\} = \partial_{x_j} f$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N \setminus \partial\Omega$ et $[f]_{\partial\Omega}$ est le saut à travers l'hypersurface $\partial\Omega$ dans la direction n :

$$[f]_{\partial\Omega}(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (f(x + tn(x)) - f(x - tn(x))), \quad x \in \Omega$$

Enfin σ est la distribution définie par, pour toute fonction g définie sur $\partial\Omega$:

$$\langle g\sigma, \varphi \rangle = \int_{\partial\Omega} g\varphi ds$$

où ds est la mesure de surface sur $\partial\Omega$.

Démonstration Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, la formule de Green montre que :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} f(x) \partial_{x_j} \varphi(x) dx &= - \int_{\Omega} \partial_{x_j} (f\varphi)(x) dx + \int_{\Omega} \varphi(x) \partial_{x_j} f(x) dx \\ &= - \int_{\partial\Omega} f^-(x) \varphi(x) n_j(x) ds + \int_{\Omega} \varphi(x) \partial_{x_j} f(x) dx \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} f(x) \partial_{x_j} \varphi(x) dx &= - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} \partial_{x_j} (f\varphi)(x) dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} \varphi(x) \partial_{x_j} f(x) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} f^+(x) \varphi(x) n_j(x) ds + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} \varphi(x) \partial_{x_j} f(x) dx \end{aligned}$$

où l'on a noté $f^+(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(x + tn(x))$ et $f^-(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(x - tn(x))$. En additionnant membre à membre ces deux égalités, on trouve que :

$$- \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \partial_{x_j} \varphi(x) dx = \int_{\partial\Omega} (f^+(x) - f^-(x)) \varphi(x) n_j(x) ds + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) \partial_{x_j} f(x) dx, \quad j = 1, \dots, N.$$

Le premier terme du membre de droite est $\langle [f]_{\partial\Omega} n_j \sigma, \varphi \rangle$, le second est $\langle \{ \partial_{x_j} f \}, \varphi \rangle$.

Théorème 6 Dérivation sous le crochet de dualité

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et une fonction test $\varphi(x, y) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ à support dans $K \times \mathbb{R}^N$ avec K compact. Alors la fonction :

$$y \mapsto \langle T, \varphi(\cdot, y) \rangle \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$$

et l'on a :

$$\partial_y^\alpha \langle T, \varphi(\cdot, y) \rangle = \langle T, \partial_y^\alpha \varphi(\cdot, y) \rangle$$

Démonstration Lorsque $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, il s'agit d'une simple dérivation sous le signe intégral.

Dans le cas général, commençons par écrire la formule de Taylor à l'ordre 1 en y_0 pour la fonction $y \mapsto \varphi(x, y)$:

$$\varphi(x, y_0 + h) = \varphi(x, y_0) + \sum_{i=1}^N \partial_{y_i} \varphi(x, y_0) h_i + r(x, y_0, h)$$

avec

$$r(x, y_0, h) = 2 \sum_{|\alpha|=2} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t) \partial_y^\alpha \varphi(x, y_0 + th) dt.$$

On remarque que la fonction $x \mapsto r(x, y_0, h)$ est à support compact. Par ailleurs, pour $\|h\| \leq 1$, on a que

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha r(x, y_0, h)| &\leq \sum_{|\beta|=2} \|h\|^2 \sup_{x \in K, \|y - y_0\| \leq 1} |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \varphi(x, y)| \\ &\leq \frac{n(n+1)}{2} \|h\|^2 \max_{|\beta|=2} \sup_{x \in K, \|y - y_0\| \leq 1} |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \varphi(x, y)|. \end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\langle T, \varphi(\cdot, y_0 + h) \rangle = \langle T, \varphi(\cdot, y_0) \rangle + \sum_{i=1}^N \langle T, \partial_{y_i} \varphi(\cdot, y_0) \rangle h_i + \langle T, r(\cdot, y_0, h) \rangle$$

où :

$$|\langle T, r(\cdot, y_0, h) \rangle| \leq C_K \|h\|^2 \max_{|\alpha| \leq p_K, |\beta|=2} \sup_{x \in K, \|y-y_0\| \leq 1} |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \varphi(x, y)| = O(h^2)$$

Ceci montre que la fonction

$$y \mapsto \langle T, \varphi(\cdot, y) \rangle$$

est différentiable sur \mathbb{R}^N et que ses dérivées partielles sont :

$$\partial_{y_i} \langle T, \varphi(\cdot, y) \rangle = \langle T, \partial_{y_i} \varphi(\cdot, y) \rangle$$

En itérant l'argument par récurrence sur l'ordre de la différentiation, on obtient le résultat de la proposition.

1.5.2 Multiplication par les fonctions C^∞

— La multiplication de deux distributions quelconques n'est pas possible en général.

Contre-exemple : $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$; $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Donc $T_f, T_g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mais $(fg)(x) = \frac{1}{|x|} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

— Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et soit $f \in C^\infty(\Omega)$.

Cas particulier :

Si $T = T_g$, $g \in L^1_{loc}(\Omega)$: $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle fg, \varphi \rangle = \int_\Omega fg\varphi = \langle g, f\varphi \rangle$

Cas général :

On pose : $\langle fT, \varphi \rangle \stackrel{def}{=} \langle T, f\varphi \rangle$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. La formule a un sens, car $f\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Proposition 4

|| Avec les notations ci-dessus : $fT \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration

— Linéarité :

$$\begin{aligned} \langle fT, \varphi_1 + \lambda\varphi_2 \rangle &= \langle T, f(\varphi_1 + \lambda\varphi_2) \rangle = \langle T, f\varphi_1 + \lambda f\varphi_2 \rangle \\ &= \langle T, f\varphi_1 \rangle + \lambda \langle T, f\varphi_2 \rangle = \langle fT, \varphi_1 \rangle + \lambda \langle fT, \varphi_2 \rangle \end{aligned}$$

— Continuité :

D'après la formule de Leibniz \mathbb{R}^N :

$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} g$$

avec $f, g \in C^\infty(\Omega)$; $\alpha \in \mathbb{N}^N$ et $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$; $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_N!$. L'inégalité $\beta \leq \alpha$ signifie : $\forall i = 1, \dots, N$, $\beta_i \leq \alpha_i$.

Soit $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi_n \rightarrow 0$. On a : $f\varphi_n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

En effet, $\exists K$ compact, $K \subset \Omega$ tel que $\forall n$, $\text{Supp}(\varphi_n) \subset K$. Alors $\text{Supp}(f\varphi_n) \subset K$.

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^N$,

$$|\partial^\alpha(f\varphi_n)| = \left| \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} \varphi_n \right| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sup_{x \in K} |\partial^\beta f(x)| \|\partial^{\alpha-\beta} \varphi_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Exemples 7

1. Soit $a \in \Omega$, $f \in C^\infty(\Omega)$, on a $f\delta_a = f(a)\delta_a$:

$$\text{Soit } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle f\delta_a, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \delta_a, f\varphi \rangle = f(a)\varphi(a) = f(a)\langle \delta_a, \varphi \rangle$$

2. $x \text{vp} \left(\frac{1}{x}\right) = 1$:

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle x \text{vp} \left(\frac{1}{x}\right), \varphi \rangle &= \langle \text{vp} \left(\frac{1}{x}\right), x\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \varphi(x) dx \\ &= \int \varphi(x) dx \text{ (par le th. de convergence dominée)} \\ &= \langle 1, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Proposition 5

1. Soient $T_n, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $f \in C^\infty(\Omega)$.

Si $T_n \rightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors $fT_n \rightarrow fT$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

2. Soient $f_n, f \in C^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Si $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$, $\partial^\alpha f_n \rightarrow \partial^\alpha f$ uniformément sur tout compact de Ω , alors $f_n T \rightarrow fT$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration

1. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle fT_n, \varphi \rangle = \langle T_n, f\varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle T, f\varphi \rangle = \langle fT, \varphi \rangle$$

2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle f_n T - fT, \varphi \rangle = \langle T, (f_n - f)\varphi \rangle \rightarrow 0 \text{ car } (f_n - f)\varphi \rightarrow 0 \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega)$$

Remarque 5 Si $T_n \rightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et si $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$ $\partial^\alpha f_n \rightarrow \partial^\alpha f$ uniformément sur tout compact (avec les notations de la proposition 4) alors $f_n T_n \rightarrow fT$ (preuve laissée en exercice).

Proposition 6

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $f \in C^\infty(\Omega)$. On a :

$$\frac{\partial f T}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} T + f \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

Remarque 6 Ceci est aussi vrai à n'importe quel ordre, et cela se prouve en utilisant la formule de Leibniz

Démonstration soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial f T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle &= -\left\langle f T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = -\left\langle T, f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} T + f \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} T, \varphi \right\rangle + \left\langle f \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, f \varphi \right\rangle \\ &= \left\langle T, \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi \right\rangle - \left\langle T, \frac{\partial f \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi \right\rangle - \left\langle T, \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi + f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \\ &= -\left\langle T, f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \end{aligned}$$

1.5.3 Convolution d'une fonction et d'une distribution : $\mathcal{D}'(\Omega) * \mathcal{D}(\Omega)$

Définition 8 Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Alors

$$\forall x \in \Omega, (T * \varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle \quad \text{où } \varphi(x - \cdot) : y \mapsto \varphi(x - y)$$

La définition est consistante, car à x fixé, $y \mapsto \varphi(x - y)$ est C^∞ , à support compact, c'est donc une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Remarque 7 Encore une fois cette définition découle de la situation lorsque f est une distribution fonction. En effet, la définition donne dans ce cas :

$$(T_f * \varphi)(x) = \langle T_f, \varphi(x - \cdot) \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \varphi(x - y) dy,$$

et on retrouve donc la définition classique de la convolution de deux fonctions.

Théorème 7

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } x &\mapsto (T * \varphi)(x) \text{ est une fonction, continue, } C^\infty \\ \Omega &\rightarrow \mathbb{C} \end{aligned}$$

Et on a : $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \partial^\alpha (T * \varphi)(x) = (\partial^\alpha T * \varphi)(x) = (T * \partial^\alpha \varphi)(x)$

Démonstration**Continuité :**

$$(T * \varphi)(x + h) - (T * \varphi)(x) = \langle T, \underbrace{\varphi(x + h - \cdot) - \varphi(x - \cdot)}_{\varphi_{x,h}(y) \in \mathcal{D}(\Omega)} \rangle$$

On a : $\varphi_{x,h} \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ ($\varphi_{x,h}$ et $\partial^\alpha \varphi_{x,h} \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$ uniformément sur tout compact.

En effet, un développement à l'ordre 1 nous donne $\varphi_{x,h}(y) = D\varphi(x - y + \theta h) \cdot h$, avec $\theta \in]0, 1[$ (formule de Taylor-Lagrange dans \mathbb{R}^N), $|\varphi_{x,h}(y)| \leq \|\varphi\|_{C^1(K)} \|h\|$, donc $|\varphi_{x,h}(y)|$ tend vers 0 uniformément lorsque $\|h\|$ tend vers 0. De façon générale, on a $\partial^\alpha \varphi_{x,h}(y) = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x + h - y) - (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x - y)$, d'où $|\partial^\alpha \varphi_{x,h}(y)| \leq \|\varphi\|_{C^{|\alpha|+1}(K)} \|h\|^{|\alpha|+1}$, d'où la convergence uniforme lorsque $\|h\|$ tend vers 0. Enfin, comme T est continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$, $\lim_{h \rightarrow 0} [(T * \varphi)(x + h) - (T * \varphi)(x)] = 0$.

Dérivabilité : D'après le théorème de dérivation sous le crochet dualité, il vient :

$$\partial^\alpha \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle = \langle T, \partial^\alpha \varphi(x - \cdot) \rangle = (T * \partial^\alpha \varphi)(x).$$

par ailleurs d'après les propriétés de la dérivation :

$$\langle T, \partial^\alpha \varphi(x - \cdot) \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha (\varphi(x - \cdot)) \rangle = \langle \partial^\alpha T, \varphi(x - \cdot) \rangle$$

Exemples 8

- $(\delta_0 * \varphi)(x) = \langle \delta_0, \varphi(x - \cdot) \rangle = \varphi(x)$ d'où : $\delta_0 * \varphi = \varphi$.
- $(\delta_a * \varphi)(x) = \langle \delta_a, \varphi(x - \cdot) \rangle = \varphi(x - a)$

Remarque 8 * est une opération régularisante.

1.6 Distributions périodiques

Définition 9 Soit a fixé. On définit $\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle$ (on rappelle $\tau_a \varphi(x) = \varphi(x - a)$). On dit que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est périodique, de période a , si $\tau_a T = T$.

Théorème 8

Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite dans \mathbb{C} à croissance lente, c'est-à-dire :

$$\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z}, |\lambda_n| \leq C(1 + |n|)^m$$

(où C est une constante indépendante de n).

Alors la série :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n e^{2i\pi n \frac{x}{a}}$$

converge au sens des distributions vers une distribution T de période a .

Lemme 1

Soient $f_n, f \in C^0(\Omega)$, bornées et telles que $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$. Alors $f_n \rightarrow f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration (Lemme)

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle f_n, \varphi \rangle = \int f_n \varphi \longrightarrow \int f \varphi = \langle f, \varphi \rangle$ (par th. de convergence dominée)

Démonstration (Théorème)

Pour $N \in \mathbb{N}$, posons : $S_N(t) = \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \lambda_n \left(\frac{a}{2i\pi n} \right)^{m+2} e^{2i\pi n \frac{t}{a}}$

S_N vérifie les conditions du lemme 1. Donc $S_N \longrightarrow S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (au sens des distributions).

Alors : $(S_N)^{(m+2)} \longrightarrow S^{(m+2)}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et on rajoute λ_0 . La limite est évidemment périodique en tant que limite de suite de fonctions périodiques.

1.7 Distribution à support compact

Définition 10 Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Soit $\omega \subset \Omega$ un ouvert. On dit que T est nulle sur ω si pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

Exemple 9 Soit $a \in \mathbb{R}^N$. δ_a est nulle sur $\mathbb{R}^N \setminus \{a\}$. Si $\omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert et $a \notin \omega$, δ_a est nulle sur ω .

Définition 11 Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Le support de T , noté $\text{Supp}(T)$, est le complémentaire (dans Ω) du plus grand ouvert ω sur lequel T est nulle.

On peut montrer que ω existe.

Exemples 10

- $\text{Supp}(\delta_a) = \{a\}$
- Pour tout $a \in \mathbb{R}^N$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$, on a $\text{Supp}(\partial^\alpha \delta_a) = \{a\}$
- Si $f \in C^0(\Omega)$ et $\text{Supp}(f)$ est compact, $T_f \in \mathcal{E}'(\Omega)$.

Théorème 9 Distributions à support dans un singleton

Soit x_0 un point de Ω et une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Supposons que $\text{Supp}(T) \subset \{x_0\}$. Alors il existe une suite $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^N}$, de nombre réels (ou complexe) telle que :

$$T = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N} a_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0}$$

Définition 12 On note $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'espace vectoriel des distributions à support compact (dans Ω).

Théorème 10

$\mathcal{E}'(\Omega)$ est le dual de l'espace des fonctions $C^\infty(\Omega)$ donc $\mathcal{E}'(\Omega) \subsetneq \mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration On montre que, pour toute fonction φ dans $C^\infty(\Omega)$ et toute fonction $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\chi = 1$ sur un voisinage ouvert de $\text{Supp}(T)$, $\langle T, \chi\varphi \rangle$ est indépendante du choix de χ et on définit alors :

$$\langle T, \varphi \rangle := \langle T, \chi\varphi \rangle$$

pour une telle fonction χ .

En effet, soient χ_1 et χ_2 appartenant à $\mathcal{D}(\Omega)$, valant sur deux voisinages ouverts V_1 et V_2 de $\text{Supp}(T)$, alors

$$(\chi_1 - \chi_2)|_{V_1 \cap V_2} = 0$$

et comme $V_1 \cap V_2$ est un voisinage ouvert de $\text{Supp}(T)$ dans Ω , pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la fonction $(\chi_1 - \chi_2)\varphi$ appartient à $C^\infty(\Omega)$ et vérifie : $\text{Supp}((\chi_1 - \chi_2)\varphi) \cap \text{Supp}(T) = \emptyset$. d'où,

$$\langle T, (\chi_1 - \chi_2)\varphi \rangle = 0$$

de sorte que $\langle T, \chi_1\varphi \rangle = \langle T, \chi_2\varphi \rangle$

Chapitre 2

Rappel : transformée de Fourier des fonctions

2.1 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^N)$

2.1.1 Théorèmes de densité

Définition 1 On désigne par $C_0(\mathbb{R}^N)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur \mathbb{R}^N à support compact.

Définition 2 On appelle suite régularisante φ_ε une fonction $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ à support compact inclus dans $\overline{B(0, \varepsilon)}$ et telle que $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(x) = 1$.

Théorème 1 (Densité de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ dans $C_0(\mathbb{R}^N)$)

soit $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$ alors $\varphi_\varepsilon * f$ converge uniformément vers f

Démonstration Soit $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$ telle que $\text{Supp}(f) = \overline{B(0, R)}$. On remarque tout d'abord que $\text{Supp}(\varphi_\varepsilon * f) = \overline{B(0, R + \varepsilon)}$

$$\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(y)(f(x-y) - f(x))dy$$

On obtient alors, en utilisant les propriétés de φ_ε , que :

$$|\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x)| \leq \sup_{|y| \leq \varepsilon} |f(x-y) - f(x)|.$$

Or f est continue à support compact donc uniformément continue sur \mathbb{R}^N , d'où le résultat.

Théorème 2 (Densité de $C_0(\mathbb{R}^N)$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$)

Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p < +\infty$:

$$\forall \varepsilon \exists \varphi \in C_0(\mathbb{R}^N), \quad \|\varphi - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon$$

Démonstration Démonstration admise

Théorème 3 (Théorème de densité de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$)

Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p < +\infty$. Alors si φ_ε est définie comme au théorème précédent, on a pour tout $\eta > 0$, il existe une fonction $f_\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que :

$$\|f - f_\eta\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \eta.$$

Démonstration Comme $C_0(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, étant donné $\eta > 0$, il existe $\psi \in C_0(\mathbb{R}^N)$, telle que

$$\|f - \psi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \frac{1}{2}\eta.$$

En utilisant toujours la même suite régularisante que précédemment, on obtient :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\varphi_\varepsilon * \psi(x) - \psi(x)| \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

D'après l'inégalité de Hölder et en supposant $\text{Supp}(\psi) \subset \overline{B(0, R)}$, il vient que :

$$\|\varphi_\varepsilon * \psi - \psi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\varphi_\varepsilon * \psi(x) - \psi(x)| |\overline{B(0, R + \varepsilon)}|^{1/p} \rightarrow 0$$

lorsque ε tend vers 0. On choisit alors ε suffisamment petit pour que :

$$\|\varphi_\varepsilon * \psi - \psi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \frac{\eta}{2}$$

et on pose $f_\eta = \varphi_\varepsilon * \psi$.

2.1.2 Définition de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ et propriétés

Définition 3 (Transformée de Fourier) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on lui associe \hat{f} telle que :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}^N, \hat{f}(\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-2i\pi \langle \nu, x \rangle} dx$$

$\omega = 2\pi\nu$: pulsation (rad.s^{-1}), ν : fréquence (Hz) L'application $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ est appelée transformée de Fourier.

Théorème 4 (Riemann-Lebesgue)

1. $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ est une application linéaire, continue de $L^1(\mathbb{R}^N)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.
2. si $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors \hat{f} est continue sur \mathbb{R}^N et $\lim_{\|\nu\| \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\nu) = 0$.

Démonstration

1. — \mathcal{F} linéaire (linéarité de f).

— Montrons la continuité de \mathcal{F} en 0, autrement dit :

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^N), \|\mathcal{F}(f)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$$

$$\forall \nu, \left| \hat{f}(\nu) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-2i\pi\langle \nu, x \rangle} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$$

donc $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$.

2. Soit $g \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$, supposons que $\text{Supp}(g) \subset [-M, M]^N$ et choisissons une direction d'intégration x_j , alors en appliquant le théorème d'intégration par parties, il vient :

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-2i\pi\nu x} dx_j = \left[g(x) \frac{e^{-2i\pi\nu x}}{-2i\pi\nu_j} \right]_{-M}^{+M} - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} \frac{e^{-2i\pi\langle \nu, x \rangle}}{-2i\pi\nu_j} dx_j = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} \frac{e^{-2i\pi\langle \nu, x \rangle}}{2i\pi\nu_j} dx_j$$

D'où

$$|\hat{g}(\nu)| \leq \frac{1}{2\pi|\nu_j|} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} \right| dx = \frac{\left\| \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}}{2\pi|\nu_j|} \xrightarrow{\nu_j \rightarrow \pm\infty} 0 \text{ car } \left\| \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} < +\infty.$$

or $C_0^1(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^N)$, d'où :

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^N), \forall \varepsilon > 0, \exists g \in C_0^1(\mathbb{R}^N), \|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon$$

Alors, comme

$$|\hat{f}(\nu)| \leq \|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + |\hat{g}(\nu)|,$$

on obtient $\lim_{\|\nu\| \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\nu) = 0$.

Exemple

Fonction "porte" : $\Pi = \mathbb{1}_{]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[}$

$\hat{\Pi}(\nu) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2i\pi\nu x} dx = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$: sinus cardinal.

Proposition 1 (du retard)

$\| f \in L^1(\mathbb{R}^N), \tau \in \mathbb{R}^N$. Posons $\forall x \in \mathbb{R}^N, g(x) = f(x - \tau)$, alors $\forall \nu \in \mathbb{R}^N, \hat{g}(\nu) = e^{-2i\pi\langle \nu, \tau \rangle} \hat{f}(\nu)$

Remarque 1 $e^{-2i\pi\langle \nu, \tau \rangle}$ est un facteur de retard ou déphasage. On a ainsi :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}^N, |\hat{g}(\nu)| = |\hat{f}(\nu)| \text{ et } \text{Arg}(\hat{g}(\nu)) = \text{Arg}(\hat{f}(\nu)) - 2\pi\langle \nu, \tau \rangle$$

Démonstration Un changement de variable dans l'intégrale de Fourier donne le résultat.

Proposition 2

$f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $a \in \mathbb{R}$. Posons $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $g(x) = f(ax)$. Alors $\forall \nu \in \mathbb{R}^N$, $\mathcal{F}(g(\nu)) = \frac{1}{|a|^N} f\left(\frac{\nu}{a}\right)$

Théorème 5

1. si $x \rightarrow x^\alpha f(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ pour $|\alpha| \leq n$ alors :

$$\partial^\alpha \hat{f}(\nu) = \mathcal{F}((-2i\pi x)^\alpha f(x))(\nu) \quad \forall \nu \in \mathbb{R}^N$$

2. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap C^n(\mathbb{R}^N)$ et si $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ pour tout $|\alpha| \leq n$, alors on a :

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\nu) = (2i\pi\nu)^\alpha \hat{f}(\nu) \quad \forall \nu \in \mathbb{R}^N$$

3. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et si $\text{Supp}(f)$ est borné, alors $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Démonstration

1. $\frac{\partial f(x)e^{-2i\pi\langle \nu, x \rangle}}{\partial \nu_j} = (-2i\pi x_j)f(x)e^{-2i\pi\langle \nu, x \rangle}$ est continue pour tout ν_j et presque tout x , et appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$ donc d'après théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre $\frac{\partial \hat{f}}{\partial \nu_j}$ est dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ et satisfait 1., en considérant les dérivées par rapport aux autres coordonnées puis les dérivées à tout ordre, on obtient le résultat.
2. Calculons $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}$. En posant x' (resp. ν') le vecteur x (resp. ν) privé de x_j ((resp. ν_j) et en faisant une intégration par parties il vient que :

$$\begin{aligned} \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\nu) &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-2i\pi\langle \nu', x' \rangle} \left\{ [f(x)e^{-2i\pi\nu_j x_j}]_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} f(x)(2i\pi\nu_j)e^{-2i\pi\nu_j x_j} dx_j \right\} dx' \\ &= (2i\pi\nu_j)\hat{f}(\nu) \end{aligned}$$

En effet si f est intégrable et $C^1(\mathbb{R})$, telle que $f' \in L^1(\mathbb{R})$ est intégrable alors

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

comme f' est intégrable, l'intégrale a une limite lorsque x tend vers $\pm\infty$, donc $f(x)$ admet une limite quand x tend vers l'infini. D'autre part, cette limite est nécessairement nulle car f est intégrable. Ceci explique pourquoi le terme entre crochet de l'expression précédente s'annule. On conclut procédant par récurrence sur l'ordre de dérivation.

Proposition 3

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Alors $f\hat{g}$ et $\hat{f}g$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$ et on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} f\hat{g} = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}g$$

Démonstration Remarquez que le théorème de Fubini s'applique à la fonction $(x, \nu) \rightarrow f(x)g(\nu)e^{-2i\pi\langle \nu, x \rangle}$.

2.1.3 Inversion de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^N)$

Définition 4 Pour toute fonction f appartenant à $L^1(\mathbb{R}^N)$ on note :

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(\nu) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{2i\pi\langle \nu, x \rangle} dx$$

On a alors le théorème d'inversion suivant :

Théorème 6

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On suppose que f est continue au point $x \in \mathbb{R}^N$ fixé et que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Alors on a,

$$\overline{\mathcal{F}}\hat{f}(x) = f(x)$$

2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ alors

$$\overline{\mathcal{F}}\hat{f}(x) = f(x) \text{ pour presque tout } x$$

Démonstration 1) Nous démontrons d'abord le point 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n(x) = e^{-\frac{2\pi}{n}\|x\|_1}$, on a $\hat{g}_n(\nu) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\pi} \frac{n}{1+n^2\nu_i^2}$. Comme g_n est dans $L^1(\mathbb{R}^N)$, on peut écrire :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\nu)g_n(\nu)e^{2i\pi\langle x, \nu \rangle} d\nu = \int_{\mathbb{R}^N} f(\nu)\hat{g}_n(\nu - x)d\nu$$

Le membre de gauche tend vers $\overline{\mathcal{F}}\hat{f}(x)$ d'après le théorème de convergence dominée. Montrons que le membre de droite tend vers $f(x)$. Comme $\int_{\mathbb{R}^N} \hat{g}_n(\nu)d\nu = 1$, on peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\nu)\hat{g}_n(\nu - x)d\nu - f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} (f(\nu + x) - f(x))\hat{g}_n(\nu)d\nu$$

Soit $\epsilon > 0$, il existe $\eta = \eta(\epsilon, x)$ tel que $\|y - x\|_2 \leq \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \epsilon$ (f continue en x). On peut alors écrire :

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f(x + \nu) - f(x))\hat{g}_n(\nu)d\nu = \int_{\|\nu\| \leq \eta} (f(x + \nu) - f(x))\hat{g}_n(\nu) + \int_{\|\nu\| \geq \eta} (f(x + \nu) - f(x))\hat{g}_n(\nu)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_{\|\nu\| \leq \eta} |f(x + \nu) - f(x)| \widehat{g}_n(\nu) d\nu \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}_n(\nu) d\nu = \epsilon.$$

De plus,

$$\left| \int_{\|\nu\| \geq \eta} f(x) \widehat{g}_n(\nu) d\nu \right| \leq |f(x)| \prod_{i=1}^N \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctan(\eta_i n)\right)$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. En outre, comme $(\widehat{g}_n)_i$ (fonction uniquement de la variable ν_i) est paire et décroissante sur \mathbb{R}^+

$$\left| \int_{\|\nu\| \geq \eta} f(x + \nu) \widehat{g}_n(\nu) d\nu \right| \leq \widehat{g}_n(\eta) \|f\|_1,$$

cette expression tendant vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Le point 1. du théorème est donc démontré.

Nous démontrons ensuite le point 2. On multiplie l'intégrante par $\widehat{h}_\epsilon(\nu) = e^{-\pi\epsilon^2\|\nu\|_2^2}$:

$$I_\epsilon = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(u) e^{-\pi\epsilon^2\|\nu\|_2^2} e^{2i\pi\langle \nu, (x-u) \rangle} du \right) d\nu$$

on a $(u, \nu) \rightarrow \phi(u, \nu) = f(u) e^{-\pi\epsilon^2\|\nu\|_2^2} e^{2i\pi\langle \nu, (x-u) \rangle} \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. On va pouvoir appliquer Fubini pour donner deux expressions de I_ϵ :

i) On intègre par rapport à u :

$$I_\epsilon = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\nu) e^{-\pi\epsilon^2\|\nu\|_2^2} e^{2i\pi\nu x} d\nu$$

Or $|\widehat{f}(\nu) e^{-\pi\epsilon^2\|\nu\|_2^2} e^{2i\pi\nu x}| \leq |\widehat{f}(\nu)|$ qui appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$ et $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{-\pi\epsilon^2\|\nu\|_2^2} = 1$. Donc par le théorème de convergence dominée, on obtient que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_\epsilon = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\nu) e^{2i\pi\nu x} d\nu$.

ii) on intègre par rapport à ν :

$$I_\epsilon = \int_{\mathbb{R}^N} f(u) \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\pi\epsilon^2\|\nu\|_2^2} e^{2i\pi\langle \nu, (x-u) \rangle} d\nu \right) du = \int_{\mathbb{R}^N} f(u) \frac{1}{\epsilon^N} e^{-\frac{\|x-u\|_2^2}{\epsilon}} du,$$

en utilisant les propriétés des transformées de Fourier des Gaussiennes et la formule de dilatation. Par ailleurs on sait que la fonction $h_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^N} e^{-\pi(\frac{\|x\|_2}{\epsilon})^2}$ est d'intégrale égale à 1. On peut donc en déduire :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |I_\epsilon(x) - f(x)| &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |(f(x-u) - f(x)) h_\epsilon(u)| du \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-\epsilon u) - f(x)| h_\epsilon(u) du \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \|f(x-\epsilon u) - f(x)\|_1 h_\epsilon(u) du \end{aligned}$$

Or, dans $L^1(\mathbb{R}^N)$, nous avons la propriété suivante :

Proposition 4

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $h \in \mathbb{R}^N$. On pose $\tau_h f(x) = f(x-h)$. Alors $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_1 = 0$.

Démonstration La démonstration utilise la densité des fonctions continues à support compact dans $L^1(\mathbb{R}^N)$. En effet, il existe une suite $g_n \in C_0(\mathbb{R}^N)$ telle que :

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \|f - g_n\|_1 \leq \epsilon$$

On a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x+\eta) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+\eta) - g_n(x+\eta)| + \int_{\mathbb{R}^N} |g_n(x+\eta) - g_n(x)| + \int_{\mathbb{R}^N} |g_n(x) - f(x)|$$

Considérons N tel que $\|f - g_N\|_1 \leq \frac{\epsilon}{3}$ puis η tel que $\|g_N(x+\eta) - g_N(x)\|_1 \leq \frac{\epsilon}{3}$ (Théorème de convergence dominée), d'où le résultat.

Revenons en alors à la démonstration du Théorème 6. Comme $\|f(x - \epsilon u) - f(x)\|_1 |h(u)| \leq 2\|f\|_1 |h(u)|$ qui appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$, on en déduit en appliquant le théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|I_\epsilon - f\|_1 = 0$$

Donc I_ϵ tend vers f dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ donc il existe une sous suite $I_{\phi(\epsilon)}$ convergeant vers f presque partout (résultat admis), d'où le résultat.

2.1.4 Produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R}^N)$

Théorème 7 et définition

$f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)dy$.
Alors $(f * g)$ est défini presque partout, intégrable et $\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$.

Démonstration Appliquons le théorème de Fubini :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(y)g(x-y)| dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(x-y)| dx \right) dy \quad (2.1)$$

Et par changement de variable $u = x - y$. Nous obtenons :

$$(2.1) = \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(u)| du \right) dy = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} < +\infty$$

Donc $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)g(x-y)| dy$ est intégrable donc finie presque partout. Donc $(f * g)$ est définie presque partout, intégrable et :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(f * g)(x)| dx \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$$

2.1.5 Convolution et transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^N)$

Théorème 8 Convolution et transformée de Fourier

- i) Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $h \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Alors $\forall \nu \in \mathbb{R}^N$, $\mathcal{F}(f * h)(\nu) = \hat{f}(\nu)\hat{h}(\nu)$.
 ii) Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $h \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tels que \hat{f} et \hat{h} soient aussi dans $L^1(\mathbb{R}^N)$. Alors pour presque tout ν , on a : $\hat{f} * \hat{h}(\nu) = \mathcal{F}(fh)(\nu)$

Démonstration i) Appliquons le théorème de Tonelli :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(y)g(x-y)| dy \right) |e^{-2i\pi\langle \nu, x \rangle}| dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} < +\infty,$$

car $|e^{-2i\pi\langle \nu, x \rangle}| = 1$. Nous pouvons alors appliquer le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g)(\nu) &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y) dy \right) e^{-2i\pi\langle \nu, x \rangle} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y) dy \right) e^{-2i\pi\langle \nu, (x-y+y) \rangle} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(y) e^{-2i\pi\langle \nu, y \rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^N} g(x-y) e^{-2i\pi\langle \nu, (x-y) \rangle} dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(y) e^{-2i\pi\langle \nu, y \rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^N} g(u) e^{-2i\pi\langle \nu, u \rangle} du \right) dy = \hat{f}(\nu)\hat{g}(\nu) \end{aligned}$$

ii) Comme \hat{f} et \hat{g} sont dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ nous avons d'après ce qui précède, en remarquant que $\overline{\mathcal{F}}$ a les mêmes propriétés que \mathcal{F} :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}(\hat{f} * \hat{g}) &= \overline{\mathcal{F}}(\hat{f})\overline{\mathcal{F}}(\hat{g}) \\ &= fg \text{ p.p.} \end{aligned}$$

comme $f = \overline{\mathcal{F}}(\hat{f})$, f est bornée donc on peut considérer la transformée de Fourier de fg pour finalement obtenir : $\hat{f} * \hat{g} = \mathcal{F}(fg)$.

2.2 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^N)$

Nous avons vu que la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ présente des inconvénients notant en terme d'inversion. Dans ce qui suit, nous allons voir comment l'on peut définir la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ comme une application bijective de $L^2(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

2.2.1 L'espace $L^2(\mathbb{R}^N)$

Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R}^N)$, on rappelle que $L^2(\mathbb{R}^N)$ est muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\overline{g(x)}dx$ et que la norme sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ est alors définie par $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$

Remarque : $L^2(\mathbb{R}^N)$ est un espace de Hilbert (voir chapitre concerné) dans lequel on a le théorème de Cauchy-Schwarz :

Théorème 9 (Cauchy-Schwarz)

Soit f et g appartenant à $L^2(\mathbb{R}^N)$, on a la propriété suivante :

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f(t)\bar{g}(t) dt \right| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

2.2.2 Convolution dans $L^2(\mathbb{R}^N)$

On appelle convolution dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ l'application définie pour toute fonction f et g de $L^2(\mathbb{R}^N)$ par :

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 10

$F \in C^0(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$

Démonstration F appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ par application directe du théorème de Cauchy-Schwarz. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} |F(x+\eta) - F(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (f(x+\eta-y) - f(x-y))g(y)dy \right| \\ &\leq \|f(x+\eta-\cdot) - f(x-\cdot)\|_2 \|g\|_2 \end{aligned}$$

On montre que $\|f(x+\eta-\cdot) - f(x-\cdot)\|_2$ tend vers 0 avec η , en utilisant à nouveau la densité des applications continues à support compact dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Donc f est continue en x .

2.2.3 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ **Théorème 11 (Plancherel-Parseval)**

Soit f et h appartenant à $L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$, alors on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(t)\bar{h}(t)dt = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\nu)\overline{\hat{h}(\nu)}d\nu$$

Si $f = h$, on a la propriété suivante : $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$

Démonstration On commence par démontrer que la transformée de Fourier d'une fonction $L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ est dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ en montrant que $\|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2$.

Pour cela, on considère $g_\alpha(x) = e^{-\alpha\|x\|_2^2}$ dont la transformée de Fourier est $\hat{g}_\alpha(\nu) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{-N/2} e^{-\frac{\pi}{\alpha}\|\nu\|_2^2}$. Par application du théorème de convergence monotone on a tout d'abord :

$$\int_{\mathbb{R}^N} g_\alpha(x)|\hat{f}(x)|^2 \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{f}|^2 \leq +\infty$$

car $g_\alpha(x)|\hat{f}(x)|^2$ est positive, appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$ et est croissante lorsque α décroît. Par ailleurs, comme la fonction $(x, u, y) \rightarrow f(y)\overline{f(u)}e^{i2\pi x(u-y)}g_\alpha(x)$ est dans $L^1((\mathbb{R}^N)^3)$ (en appliquant le théorème de Tonelli).

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} g_\alpha(x)|\hat{f}(x)|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \int_{\mathbb{R}^N} \overline{f(u)} \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\langle x, y-u \rangle} g_\alpha(x) dx dy du \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \int_{\mathbb{R}^N} \overline{f(u)} \hat{g}_\alpha(y-u) dy du = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(y+u) \overline{f(u)} du \hat{g}_\alpha(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} G(y) \hat{g}_\alpha(y) dy = \int_{\mathbb{R}^N} G\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}y\right) e^{-\pi y^2} dy \\ &\xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} G(0) = \|f\|_2^2, \end{aligned}$$

où G est la corrélation de f avec elle-même, la limite s'obtenant en appliquant le théorème de convergence dominée.

Nous savons donc que la transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ est dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Nous allons maintenant démontrer la formule de Plancherel. Soit f et h dans $L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$. $\hat{f}\tilde{h}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$ en tant que produit de fonctions de $L^2(\mathbb{R}^N)$. Par ailleurs, si l'on pose $\tilde{h}(t) = \overline{h(-t)}$ on a $\mathcal{F}(f*\tilde{h}) = \hat{f}\tilde{h}$ qui appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$, donc d'après le théorème d'inversion de la transformée de Fourier et comme $f*\tilde{h}$ est continue en tant que convolution de fonctions de $L^2(\mathbb{R})$, on a $f*\tilde{h}(x) = \overline{\mathcal{F}(\hat{f}\tilde{h})(x)}$, pour tout x . En considérant la valeur en $x = 0$, on obtient l'égalité de Plancherel.

Proposition 5

|| L'espace $L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Démonstration Soit la suite $f_n(x) = \chi_{[-n,n]^N}(x)f(x)$ qui appartient à $L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$, on vérifie que f_n tend vers f dans $L^2(\mathbb{R})$.

Considérons une suite f_n de fonctions de $L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ convergeant vers f dans $L^2(\mathbb{R})$. Nous avons vu que \hat{f}_n appartient à $L^2(\mathbb{R})$, d'autre part \hat{f}_n est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$ puisque

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}_p\|_2^2 = \int_{\{x, \forall i, n \geq |x_i| \geq p\}} |\hat{f}_n - \hat{f}_p|^2 \rightarrow 0 \text{ quand } p \text{ tend vers l'infini.}$$

On définit \hat{f}_∞ la limite dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ de \hat{f}_p .

Il faut montrer que cette limite est indépendante du choix de la suite f_n tendant vers f . Il est facile de voir que cela provient de l'égalité de Parseval. En effet, soit f_n et \tilde{f}_n de $L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ tendant vers f dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ alors :

$$\|f_n - \tilde{f}_n\|_2 = \|\hat{f}_n - \widehat{\tilde{f}_n}\|_2 \rightarrow 0,$$

donc les transformées de Fourier ont la même limite dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

On a alors la définition suivante :

Définition 5 La transformée de Fourier d'une fonction f de $L^2(\mathbb{R}^N)$ est définie comme la limite dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ de la transformée de Fourier de toute suite f_n de $L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ tendant vers f dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

On notera par la suite $\mathcal{F}(f)$ la transformée de Fourier de f quand f est dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Remarque : comme on a le choix de la suite, on prend $f_n = \chi_{[-n,n]^N} f$.

2.2.4 Propriété de la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^N)$

Théorème 12

La transformation de Fourier (resp. $\overline{\mathcal{F}}$) se prolonge en une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Désignons toujours par \mathcal{F} et $\overline{\mathcal{F}}$, ces prolongements, on a alors :

- $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^N) \quad \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}(f) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(f) = f$ presque partout.
- $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^N) \quad \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(f)\overline{\mathcal{F}(g)}d\xi$
- $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^N) \quad \|f\|_2 = \|\mathcal{F}(f)\|_2$

Démonstration La démonstration découle de la densité de $L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ (les égalités étant vraies dans $L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$, elles le sont aussi dans $L^2(\mathbb{R}^N)$).

Chapitre 3

Transformée de Fourier des Distributions

La transformée de Fourier des distributions va être définie pour un sous-ensemble de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, appelées distributions tempérées. Celles-ci sont définies comme des formes linéaires continues sur l'espace de Schwartz que nous introduisons dans un premier temps. Avant d'entamer ce chapitre il est indispensable de réviser le chapitre sur la transformée de Fourier de première année.

3.1 L'espace de Schwartz

Définition 1 On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des fonctions $\phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ telles que :

- $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N, n \in \mathbb{N}, \exists C$ tel que $|\partial^\alpha \phi(x)| \leq \frac{C}{(1+\|x\|)^n}$ (décroissance rapide)

Autrement dit, les fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ sont les fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ dont les dérivées de tout ordre sont à décroissance rapide.

Exemple : $\phi(x) = e^{-x^2}$

Théorème 1

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ a les propriétés suivantes :

1. $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \forall P \in \mathbb{C}[X] \quad P\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
2. $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \partial_{x_j} \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$
3. $1 \leq p \leq \infty \quad \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$

Théorème 2

De plus, \mathcal{F} (i.e. la transformée de Fourier, $\mathcal{F}(\phi) = \hat{\phi}$) est une bijection (linéaire) de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ sur lui-même et d'inverse $\overline{\mathcal{F}}$.

Démonstration Faisons la démonstration dans \mathbb{R} pour simplifier. Soit f appartenant à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, comme pour tout k , $x^k f(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$, \hat{f} appartient à $C^\infty(\mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N}$ and $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \xi^n \hat{f}^{(p)}(\xi) &= \xi^n \mathcal{F}((-2i\pi x)^p f(x)) \text{ par le théorème de différentiation sous le signe intégral} \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^n} \mathcal{F}(((-2i\pi x)^p f(x))^{(n)}) \text{ propriétés sur la transformée de Fourier de la dérivée.} \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de stabilité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ par produit par un polynôme et par dérivation, on obtient que la fonction dont on prend la transformée de Fourier est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, donc sa transformée de Fourier est bornée, ce qui prouve que \hat{f} appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Par ailleurs, comme f et \hat{f} sont dans $L^1(\mathbb{R})$ et que f est continu, on a $f(x) = \overline{\mathcal{F}(\hat{f})}(x)$.

La topologie de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ n'est pas définie par une norme mais par une famille dénombrable de normes :

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \quad \mathcal{N}_p(\phi) = \max_{|\alpha|, |\beta| \leq p} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)|, \quad p \in \mathbb{N}$$

On dit qu'une suite ϕ_n converge vers ϕ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ si :

$$\mathcal{N}_p(\phi_n - \phi) \rightarrow 0 \text{ pour tout } p \geq 0, \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

Autrement dit, on peut aussi définir la convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N \quad x^\alpha \partial^\beta \phi_n(x) \rightarrow x^\alpha \partial^\beta \phi(x) \text{ uniformément sur } \mathbb{R}^N$$

3.2 Distributions Tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$

Nous avons besoin de définir la transformée de Fourier dans un cadre plus général que celui des fonctions pour donner un sens à la transformée de Fourier de signaux échantillonnés qui sont les signaux rencontrés en pratique.

L'ensemble des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{linéaire, "continue"} \\ \varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle \end{array} \right\}$$

Ici, on entend par continue, la notion suivante :

$$\exists m, C_m \text{ tel que } \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \quad |\langle T, \phi \rangle| \leq C_m \mathcal{N}_m(\phi)$$

où avec les suites :

$$\phi_n \rightarrow \phi \text{ dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \langle T, \phi_n \rangle \rightarrow \langle T, \phi \rangle \text{ dans } \mathbb{C}$$

Remarque 1 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et si T est continue pour la topologie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ elle l'est aussi pour la topologie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, donc $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Par ailleurs, on peut montrer que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ pour la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Une conséquence est que pour la continuité dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, il suffit de se restreindre à des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, c'est-à-dire :

$$\exists m, C_m \text{ tel que } \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \quad |\langle T, \phi \rangle| \leq C_m \mathcal{N}_m(\phi)$$

où avec les suites : $\phi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\phi_n \rightarrow \phi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \langle T, \phi_n \rangle \rightarrow \langle T, \phi \rangle$ dans \mathbb{C}

Exemples 1

- $f \in L^1(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R})$ ou $L^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$
- Dirac $\delta_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$
- Peigne de Dirac $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$
- $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$
- L'ensemble des fonctions à croissance lente est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On dit qu'une fonction est à croissance lente si :

$$\exists c > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq c(1 + |x|)^N$$

- Si la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est à croissance lente (i.e. $\exists m \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}$ tel que $|y_n| \leq C(1 + |n|)^m, n \in \mathbb{Z}$), la distribution

$$T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} y_n \delta_{na}$$

est tempérée.

Cet exemple est très important en traitement du signal car à un signal discret $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, on peut associer le peigne de Dirac $\sum_{n \in \mathbb{Z}} y_n \delta_{na} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Si la suite est à croissance lente on peut en prendre la transformée de Fourier comme nous allons le voir par la suite.

Proposition 1

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

1. $\forall k \in \mathbb{N}, \quad x^k T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N, \quad \partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$
3. $\forall k \in \mathbb{N}, T \rightarrow x^k T$ et $T \rightarrow T^{(k)}$ sont continues de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

3.3 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$

Définition 2 Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On définit la transformée de Fourier

$$\hat{T} : \left(\begin{array}{ll} \varphi & \mapsto \langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle \\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) & \rightarrow \mathbb{C} \end{array} \right)$$

On a : $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$

Remarque 2

- $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$
- Donc \hat{T} est bien définie, linéaire par linéarité de T , continue par continuité de T (et du fait que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est stable par transformée de Fourier).

Proposition 2

On dit qu'une suite $T_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ converge vers T dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, si $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$.

Proposition 3

|| La transformée de Fourier est une application continue de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ dans lui-même.

Démonstration Soit T_n tendant vers T dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ alors pour tout φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on a :

$$\langle \hat{T}_n, \varphi \rangle = \langle T_n, \hat{\varphi} \rangle \rightarrow \langle T, \hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{T}, \varphi \rangle$$

Théorème 3

$$\mathcal{F} : \begin{array}{ccc} T & \mapsto & \hat{T} \\ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) & \rightarrow & \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \end{array}$$

est inversible, et son inverse est :

$$\bar{\mathcal{F}} : \begin{array}{ccc} T & \mapsto & \bar{\mathcal{F}}(T) \\ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) & \rightarrow & \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \end{array}$$

avec $\langle \bar{\mathcal{F}}(T), \varphi \rangle = \langle T, \bar{\mathcal{F}}(\varphi) \rangle$

Démonstration Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \langle \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}(T), \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}(T), \bar{\mathcal{F}}(\varphi) \rangle = \langle T, \mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}(\varphi) \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

(car : $\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}} = Id$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$)

Remarque 3 On a $\mathcal{F}\mathcal{F}(T) = T_\sigma$ avec T_σ défini par $\langle T_\sigma, \varphi \rangle = \langle T, \varphi_\sigma \rangle$ avec $\varphi_\sigma(x) = \varphi(-x)$.

Exemples 2

(i) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ ou $L^2(\mathbb{R}^N)$, Alors $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

$$\langle \widehat{T}_f, \varphi \rangle = \langle T_f, \hat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\hat{\varphi}(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(y)\varphi(y)dy = \langle T_{\hat{f}}, \varphi \rangle$$

Donc $\widehat{T}_f = T_{\hat{f}}$. En effet si f est dans $L^1(\mathbb{R}^N)$, le résultat découle de la proposition 3 du chapitre 2 et du Théorème 12 chapitre 3, si f est dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Conclusion : une fonction dont on sait calculer \hat{f} a pour transformée de Fourier au sens des distributions $T_{\hat{f}}$.

(ii)

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \langle \hat{\delta}, \varphi \rangle &= \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)e^{-2i\pi 0x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = \langle T_1, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Donc $\hat{\delta} = T_1$.

(iii) Avec $\delta_a = \delta(x - a)$

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \langle \widehat{\delta}_a, \varphi \rangle = \langle \delta_a, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-2i\pi ax} dx = \langle e^{-2i\pi ax}, \varphi \rangle$$

. Donc $\widehat{\delta}_a = T_{e^{-2i\pi ax}}$. On retrouve la transformée de Fourier de δ , mais avec un déphasage.

(iv)

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \langle \widehat{T_{e^{2i\pi k_0 x}}}, \varphi \rangle = \langle T_{e^{2i\pi k_0 x}}, \hat{\varphi} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi k_0 y} \hat{\varphi}(y) dy = \varphi(k_0) = \langle \delta_{k_0}, \varphi \rangle$$

Donc $\widehat{T_{e^{2i\pi k_0 x}}} = \delta_{k_0}$ (cas particulier : $\widehat{T_1} = \delta_0$).

Puis par linéarité on a :

$$T_{\cos(2\pi k_0 x)} = \frac{\delta_{k_0} + \delta_{-k_0}}{2}$$

$$T_{\sin(2\pi k_0 x)} = \frac{\delta_{k_0} - \delta_{-k_0}}{2i}$$

(v)

Proposition 4

Soit T un réel strictement positif et $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite à croissance lente, alors

1.

$$\mathcal{F}\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} y_n \delta_{nT}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} y_n e^{-2i\pi n T x}$$

2.

$$\mathcal{F}\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{nT}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2i\pi n T x} = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{\frac{n}{T}}$$

La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac de période T est un peigne de Dirac de période $\frac{1}{T}$.

Démonstration

1. En utilisant la continuité de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} y_n \widehat{\delta}_{nT} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} y_n \hat{\delta}_{nT} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} y_n e^{-2i\pi n T x}$$

La dernière égalité étant obtenue en utilisant $\mathcal{F}\mathcal{F}(T) = T_\sigma$.

2. Par définition du peigne :

$$\left\langle \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{\frac{n}{T}}, \varphi \right\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{n}{T}\right)$$

Montrons que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \left\langle \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\delta}_{nT}, \varphi \right\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(nT) = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{n}{T}\right)$$

On introduit alors $\tilde{\varphi} : x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{T} \varphi(x + \frac{n}{T})$ (l'idée étant d'écrire cette fonction en la développant en séries de Fourier et de finalement prendre sa valeur en 0). On remarque que $\tilde{\varphi}$ est périodique de période $\frac{1}{T}$. On peut montrer que $\tilde{\varphi}$ admet alors un développement en série de Fourier et que l'on a l'égalité ponctuelle de la fonction avec sa série de Fourier (Le cadre général pour lequel cela est vrai est φ dans $L^1(\mathbb{R})$, continue et la dérivée au sens des distributions aussi dans $L^1(\mathbb{R})$, voir [1] p.282). La série de Fourier de $\tilde{\varphi}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\tilde{\varphi}) e^{i\omega k x} \quad (\omega = 2\pi T, \text{ car la période est } \frac{1}{T}) \\ \text{avec } c_k(\tilde{\varphi}) &= T \int_0^{\frac{1}{T}} \tilde{\varphi}(x) e^{-i\omega k x} dx = T \int_0^{\frac{1}{T}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(x + \frac{n}{T}) e^{-i\omega k x} dx \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{\frac{1}{T}} \varphi(x + \frac{n}{T}) e^{-i\omega k x} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\frac{n}{T}}^{\frac{n+1}{T}} \varphi(y) e^{-i\omega k (y - \frac{n}{T})} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{-2i\pi k T y} dy = \hat{\varphi}(kT) \\ \text{d'où} \quad &: \tilde{\varphi}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(kT) e^{2i\pi T k x} \end{aligned}$$

Il y a égalité pour tout x car $\tilde{\varphi}$ est C^1 (la série et la série des dérivées converge normalement car φ et φ' sont à décroissance rapide).

$$\text{Pour } x = 0, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(kT) = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(\frac{n}{T})$$

$$\text{Alors } \mathcal{F}(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{nT}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2i\pi n T x} = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{\frac{n}{T}}$$

Ce dernier exemple est très important en traitement du signal. Les traiteurs de signaux définissent la transformée de Fourier à temps discret (TFTD) d'une suite (x_n) sous réserve de convergence de la manière suivante :

Définition 3 La transformée de Fourier à temps discret de la séquence (x_n) est définie par :

$$X(e^{2i\pi\omega}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-2i\pi n \omega} \quad (3.1)$$

lorsqu'elle existe. La transformée TFTD inverse de la fonction 1 périodique $X(\omega)$ est

$$x_n = \int_{-1/2}^{1/2} X(e^{2i\pi\omega}) e^{2i\pi n \omega} d\omega, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.2)$$

Lorsque la TFTD existe, on note : $x_n \xleftrightarrow{\text{TFTD}} X(e^{2i\pi\omega})$

Remarque 4 On reconnaît dans cette définition la transformée de la distribution $\sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \delta_n$. Pour pouvoir écrire (3.2), il faut que X soit une fonction, cependant la transformée inverse existe toujours au sens des distributions (à condition que x_n soit à croissance lente).

cadre classique du traitement du signal : Si la suite $x_n \in l^1(\mathbb{Z})$, alors la TFTD converge normalement et $X(e^{2i\pi\omega})$ est continue.

Si maintenant on considère une suite x_n dans $l^2(\mathbb{Z})$, alors $X(e^{2i\pi\omega})$ appartient à $L^2([-1/2, 1/2])$. En effet, $(e^{-2in\omega})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base de cet espace et l'on a l'égalité de Parseval : $\int_{-1/2}^{1/2} |X(e^{2i\pi\omega})|^2 d\omega = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2$. Ainsi, l'égalité (3.1) est vraie presque partout.

Remarque 5 On voit que si l'on sort du cadre des suites de $l^1(\mathbb{Z})$ ou $l^2(\mathbb{Z})$ alors l'approche en utilisant les distributions prend tout son sens. Prenons par exemple la suite $x_n = 1$ pour tout n , alors la transformée de Fourier $\sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \delta_n$ est $\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-i2\pi n x}$, calcul que l'on peut pas mener lorsque l'on reste dans le cadre classique des suites sommable ou de carré sommable.

3.4 Propriétés de la transformée de Fourier des distributions

Proposition 5

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a les propriétés suivantes

- (i) $\widehat{T^{(k)}} = (-2i\pi x)^k T$
- (ii) $\widehat{T^{(k)}} = (2i\pi \xi)^k \widehat{T}$
- (iii) $\tau_a \widehat{T} = e^{2i\pi a x} T$
- (iv) $\widehat{\tau_a T} = e^{-2i\pi a \xi} \widehat{T}$

Proposition 6

Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, alors \widehat{T} est une fonction $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ à croissance lente.

3.5 Convolution $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) * \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

Théorème 4

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on définit :

$$(T * \varphi)(x) = \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle$$

Alors :

$$\begin{cases} T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées} \\ \forall |\alpha| \geq 0, \partial^\alpha (T * \varphi) = \partial^\alpha T * \varphi = T * \partial^\alpha \varphi \end{cases}$$

Démonstration On peut montrer que toute distribution T tempérée peut s'écrire comme la dérivée d'ordre α (au sens des distributions) d'une certaine fonction à croissance lente, c'est-à-dire $T = \partial^\alpha T_f$ avec f à croissance lente (théorème de structure des distributions tempérées). Partant

de là, on peut donc écrire :

$$\langle \partial^\alpha T_f, \varphi(x - \cdot) \rangle = \langle T_f, \partial^\alpha \varphi(x - \cdot) \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \partial^\alpha \varphi(x - y) dy$$

qui est C^∞ d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale. $\partial^\alpha(T * \varphi) = \partial^\alpha T * \varphi = T * \partial^\alpha \varphi$ découle directement de l'écriture de $T * \varphi$. Par ailleurs, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \partial^\alpha \varphi(x - y) dy \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y) \partial^\alpha \varphi(y) dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x - y) \partial^\alpha \varphi(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} c(1 + \|x - y\|^2) |\partial^\alpha \varphi(y)| dy \end{aligned}$$

qui est un polynôme en x , donc est à croissance lente.

Proposition 7

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

(i) $\mathcal{F}(T * \varphi) = \mathcal{F}(\varphi)\mathcal{F}(T)$

(ii) $\mathcal{F}(\varphi T) = \mathcal{F}(T) * \mathcal{F}(\varphi)$

Démonstration i)

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\varphi T}, \psi \rangle &= \langle \widehat{T}, \widehat{\varphi \psi} \rangle = \langle T, \widehat{\varphi \psi} \rangle \\ &= \langle T, \varphi_\sigma * \widehat{\psi} \rangle = \langle T, \langle \varphi(x), \widehat{\psi}(x + u) \rangle \rangle \end{aligned}$$

car $\widehat{\varphi}$, ψ , $\widehat{\psi}$ et ψ appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^N)$. En utilisant le théorème de structure des distributions tempérées, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \langle \widehat{T * \varphi}, \psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \langle T_y, \varphi(x - y) \rangle \widehat{\psi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \langle (\partial^\alpha T_f)_y, \varphi(x - y) \rangle \widehat{\psi}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \langle (T_f)_y, \partial^\alpha \varphi(x - y) \rangle \widehat{\psi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \partial^\alpha \varphi(x - y) \widehat{\psi}(x) dx dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \partial^\alpha \left(\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x - y) \widehat{\psi}(x) dx \right) dy = \langle T_y, \langle \varphi(x), \widehat{\psi}(x + y) \rangle \rangle \end{aligned}$$

Pour le point ii), on remarque que, si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, il en est de même pour leur transformée de Fourier, il vient en appliquant le point i) que

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}(\widehat{T * \varphi})} &= \overline{\mathcal{F}(\widehat{T})} \overline{\mathcal{F}(\widehat{\varphi})} = \varphi T \\ &\Rightarrow \mathcal{F}(\varphi T) = \widehat{T} * \widehat{\varphi} \end{aligned}$$

3.6 Convolution $\mathcal{E}'(\mathbb{R}) * \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Considérons une fonction $u \in C_c(\mathbb{R}^N)$ et $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on peut écrire, comme l'application de $(x, y) \mapsto u(y)v(x-y)\varphi(x) \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, en appliquant le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} u * v(x)\varphi(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u(y)v(x-y)dy \right) \varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} u(y) \left(\int_{\mathbb{R}^N} v(x)\varphi(x+y)dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} v(x) \left(\int_{\mathbb{R}^N} u(y)\varphi(x+y)dy \right) dx. \end{aligned}$$

Ce que l'on peut récrire au sens des distributions sous la forme :

$$\langle T_{u*v}, \varphi \rangle = \langle T_u, \langle T_v, \varphi(\cdot + y) \rangle \rangle = \langle T_v, \langle T_u, \varphi(\cdot + y) \rangle \rangle.$$

On peut alors généraliser la propriété précédente en utilisant le théorème suivant portant sur la transformée de Fourier dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$:

Définition 4 Soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

— Il existe une distribution, appelée convolution de S et T et notée $S * T$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on ait :

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_t, \langle T_x, \varphi(x+t) \rangle \rangle = \langle T_u, \langle S_x, \varphi(x+u) \rangle \rangle$$

— L'application $(S, T) \rightarrow S * T$ de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ est continue par rapport à chaque variable.
— si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ alors $S * T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

Exemples : soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $\delta_a * T = T * \delta_a = \tau_a T$.
 $\delta^{(k)} * T = T * \delta^{(k)} = T^{(k)}$

Proposition 8

Soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\widehat{S * T} = \widehat{S} \widehat{T}$$

Démonstration S appartient à $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, donc \widehat{S} est $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ à croissance lente, donc $\widehat{S} \widehat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
On a :

$$\begin{aligned} \langle \widehat{S} \widehat{T}, \varphi \rangle &= \langle \widehat{T}, \widehat{S} \varphi \rangle \\ &= \langle T, \widehat{S} \varphi \rangle = \langle T, S_\sigma * \widehat{\varphi} \rangle \text{ En appliquant la proposition 6} \\ &= \langle T_u, \langle S_\sigma, \widehat{\varphi}(u - \cdot) \rangle \rangle \\ &= \langle T_u, \langle S_x, \widehat{\varphi}(u + x) \rangle \rangle \\ &= \langle T * S, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \widehat{T * S}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Il est important de faire le lien ici avec les applications en traitement du signal. On définit la convolution en temps des séquences (h_n) et (x_n) par :

$$y_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_{n-k} h_k \quad (3.3)$$

Si le support de (h_k) est fini, on peut lui associer la distribution à support compact $h = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \delta_k$ et si (x_n) est à croissance lente, on peut lui associer la distribution tempérée $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \delta_k$. En appliquant la définition de la convolution on obtient la distribution tempérée $y = \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_n \delta_n$ et on peut donc en prendre la transformée de Fourier.

Cadre classique du traitement du signal : Si (h_n) est support fini et si (x_n) est dans $l^1(\mathbb{Z})$ ou $l^2(\mathbb{Z})$ alors on peut montrer que (y_n) appartient au même espace et on a :

Proposition 9

$$Y(e^{2i\pi\omega}) = X(e^{2i\pi\omega})H(e^{2i\pi\omega}).$$

ou Y, X et H sont les TFTD des séquences y, x et h respectivement.

L'intérêt du cadre des distributions est donc de pouvoir définir la transformée de Fourier de convolutions de signaux discrets, celles-ci n'appartenant pas à $l^1(\mathbb{Z})$ ou $l^2(\mathbb{Z})$. Dans le cas $l^1(\mathbb{Z})$ ou $l^2(\mathbb{Z})$ la formulation à l'aide de suites est suffisante. Nous verrons plus loin comment, grâce à la transformée en Z , les traiteurs de signaux parviennent à contourner ces problèmes de convergence du produit de convolution.

Chapitre 4

Transformée de Fourier Discrète

4.1 Lien entre convolution et convolution circulaire

On rappelle que la convolution de deux suites h et x est définie par lorsqu'elle existe :

$$y_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k x_{n-k} \quad (4.1)$$

Définition 1 *La convolution circulaire entre les suites h et x de taille N périodisées est définie par :*

$$\begin{aligned} (h \circledast x)_n &= \sum_{0 \leq k \leq N-1} x_k h_{n-k \bmod N} \\ &= \sum_{0 \leq k \leq N-1} x_{(n-k) \bmod N} h_k \end{aligned} \quad (4.2)$$

Remarque 1 *Cette suite est elle-même périodique de période N .*

Le lien entre convolution et convolution circulaire est alors le suivant. Définissons

$$h_{N,n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{n-kN}, \quad (4.3)$$

qui existe si $h \in l^1(\mathbb{Z})$. On a alors la propriété suivante :

Proposition 1

Soit x de taille N et périodisé à \mathbb{Z} tout entier, alors on a la propriété suivante :

$$(h * x)_n = (h_N \circledast x)_n \quad (4.4)$$

Remarque 2 *Cette propriété montre que la convolution par h d'une suite x , supposée périodique de période N , peut se calculer par convolution circulaire.*

4.2 Définition de la TFD et propriété

4.2.1 Définition

Définition 2 Soit $X = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ un vecteur de \mathbb{C}^N . On appelle transformée de Fourier discrète (TFD) de X le vecteur $\hat{X} = (\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{N-1})$ défini par :

$$\hat{x}_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2i\pi \frac{kn}{N}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.5)$$

qui admet comme transformée inverse :

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k e^{2i\pi \frac{kn}{N}} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.6)$$

La démonstration est laissée en exercice.

Remarque 3 On peut voir la TFD comme la transformée de Fourier de la distribution $\sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \delta_n$ évaluée en $\frac{k}{N}$.

4.2.2 TFD et convolution circulaire

Théorème 1

Soient deux suites complexes (x_k) et (h_k) , de période N , et leurs transformées de Fourier discrètes (\hat{x}_n) et (\hat{h}_n) .

i) La suite définie par convolution circulaire

$$z_n = (x \star h)_n$$

a pour TFD

$$\hat{z}_k = \hat{x}_k \hat{h}_k$$

ii) La suite produit

$$p_n = x_n h_n$$

a pour tTFD

$$(\hat{x} \star \hat{h})_k$$

Nous avons de plus une propriété de conservation de la norme :

Théorème 2 (Formule de Parseval)

On a la relation :

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_n \bar{y}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k \bar{\hat{y}}_k$$

et par conséquent

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{x}_k|^2$$

4.2.3 Autres propriétés

Proposition 2

En périodisant une suite de longueur N , (x_n) sur tout \mathbb{Z} , on périodise aussi (\hat{x}_k) . Les suites (x_n) et (\hat{x}_k) sont ici étendues à \mathbb{Z} par périodisation de longueur N . Soit $(x_n) \xrightarrow{TFD} (\hat{x}_k)$ alors :

1. $(x_{-n}) \xrightarrow{TFD} (\hat{x}_{-k})$
2. $(\overline{x_n}) \xrightarrow{TFD} (\overline{\hat{x}_{-k}})$
3. $(\overline{x_{-n}}) \xrightarrow{TFD} (\overline{\hat{x}_k})$

Proposition 3

Avec les mêmes notations que précédemment, on a :

- i) (x_n) est paire (resp. impaire) $\Leftrightarrow (\hat{x}_k)$ est paire (resp. impaire)
- ii) (x_n) est réelle $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z} \hat{x}_{-k} = \overline{\hat{x}_k}$
- iii) (x_n) est réelle paire $\Leftrightarrow (\hat{x}_k)$ est réelle paire
- iv) (x_n) est réelle impaire $\Leftrightarrow (\hat{x}_k)$ est imaginaire pure, impaire.

4.3 Exemples d'applications

4.3.1 calcul rapide d'une convolution

On peut voir la convolution comme le calcul du produit de deux TFDs suivi d'une TFD inverse. Si l'on fait le calcul direct, la convolution nécessite $O(N^2)$ opérations, nous allons voir qu'il existe un algorithme rapide appelé FFT permettant le calcul de la TFD en $O(N \log_2(N))$, d'où un gain en temps de calcul.

4.3.2 Approximation des coefficients de Fourier par TFD

On cherche à calculer de manière approchée les coefficients de Fourier de f périodique de période a , soit $c_k = \frac{1}{a} \int_0^a f(t) e^{-2i\pi k \frac{t}{a}} dt$, pour $-\frac{N}{2} \leq k < \frac{N}{2}$. La méthode des rectangles à gauche conduit à la valeur approchée suivante :

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{na}{N}\right) e^{-2i\pi \frac{k}{a} \frac{na}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \omega_N^{-nk}, \quad -\frac{N}{2} \leq k < \frac{N}{2}$$

en posant $y_n = f\left(\frac{na}{N}\right)$ et $\omega_N = e^{\frac{2i\pi}{N}}$.

En appelant Y_k la TFD de y_n/N , il vient que $c_k \approx \tilde{c}_k = Y_k$ si $0 \leq k \leq \frac{N}{2}$ et $c_k \approx \tilde{c}_k = Y_{k+N}$ si $-\frac{N}{2} \leq k < 0$. Donc l'approximation des coefficients de Fourier par la méthode des rectangles correspond à la transformée de Fourier discrète du signal échantillonné (modulo le passage de Y à \tilde{c} , fftshift sous matlab).

4.3.3 Relation entre coefficients de Fourier exacts et approchés

Considérons le développement en série de Fourier de f :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{2i\pi n \frac{t}{a}}$$

où l'on suppose pour simplifier que la série est absolument convergente :

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n| < +\infty,$$

ce qui est le cas si f est continue et C^1 par morceaux. On peut grouper les indices par paquets de la manière suivantes :

$$\frac{1}{N} f\left(k \frac{n}{N}\right) = \frac{y_n}{N} = \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} c_m \omega_N^{mk} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \left(\sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} c_{n+qN} \right) \omega_N^{nk}$$

On en déduit, par transformée inverse, la formule :

$$\tilde{c}_n = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} c_{n+qN}$$

qui conduit à :

$$\tilde{c}_n - c_n = \sum_{q \neq 0} c_{n+qN}$$

On voit ainsi que l'approximation à N fixé $c_n \approx \tilde{c}_n$ pour $-\frac{N}{2} \leq n < \frac{N}{2}$ est d'autant meilleure que les coefficients de Fourier tendent plus vite vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

4.4 L'algorithme de la FFT

Cet algorithme est du † Cooley et Tuckey (1965). Supposons que $N = 2m$. Posons $\omega_N = e^{\frac{2i\pi}{N}}$. Dans l'expression de \hat{x}_k regroupons les termes d'indices pairs et d'indices impairs.

$$\hat{x}_k = P_k + \omega_N^{-k} I_k$$

avec

$$\begin{cases} P_k &= x_0 + x_2 \omega_N^{-2k} + \cdots + x_{N-2} \omega_N^{-(N-2)k} \\ I_k &= x_1 + x_3 \omega_N^{-2k} + \cdots + x_{N-1} \omega_N^{-(N-2)k} \end{cases}$$

On remarque que $P_{k+m} = P_k$ et de même $I_{k+m} = I_k$. De plus comme $\omega_N^{-(k+m)} = -\omega_N^{-k}$, on peut faire une première économie de calcul. Pour $k = 0, \dots, m-1$, on calcule successivement :

1. On calcule P_k et $\omega_N^{-k} I_k$
2. On forme $\hat{x}_k = P_k + \omega_N^{-k} I_k$
3. On en déduit $\hat{x}_{k+m} = P_k - \omega_N^{-k} I_k$

La première partie coûte $2(m-1)^2 + m - 1$ soit à peu près $\frac{1}{2}N^2$ multiplications contre N^2 multiplications pour un calcul direct.

Cependant, on remarque que P_k et I_k sont \ddagger leur tour des transformées de Fourier, indépendantes l'une de l'autre. Il ne reste qu'à itérer l'astucieuse décomposition précédente à condition que m soit encore pair. Le passage d'une étape (vecteur de longueur m) à l'autre (vecteur de longueur $2m$) se fait à l'aide des formules

$$\begin{cases} \hat{x}_k &= P_k + \omega_N^{-k} I_k \\ \hat{x}_{k+m} &= P_k - \omega_N^{-k} I_k \end{cases}$$

Evaluation du coût de l'algorithme :

Pour $N = 2^p$ Soit M_p le nombre de multiplications utilisées par cet algorithme, et de même soit A_p le nombre des additions :

- Coût du calcul des P_k : $[M_{p-1}, A_{p-1}]$
- Coût du calcul des I_k : $[M_{p-1}, A_{p-1}]$
- Multiplications par ω_N^{-k} , $k \geq 1$: $[2^{p-1} - 1, 0]$
- Additions : $[0, 2^p]$.

D'où les relations :

$$\begin{cases} M_1 &= 0 \\ M_p &= 2M_{p-1} + 2^{p-1} - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 &= 2 \\ A_p &= 2A_{p-1} + 2^p \end{cases}$$

On obtient finalement :

$$\begin{cases} M_p &= (p-2)2^{p-1} + 1 \\ A_p &= p2^p \end{cases}$$

ou encore en fonction de N : $[N/2(\log_2(N) - 2) + 1, N\log_2(N)]$.

Chapitre 5

Théorème de Shannon

5.1 Formule de Poisson dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

5.1.1 Forme duale de la formule de Poisson

Echantillonner un signal f toutes les a secondes consiste à considérer une approximation constante par morceaux de ce signal en la séquence (na) et à remplacer la valeur de la fonction par celle de son intégrale sur tout intervalle de longueur na , i.e. $af\Delta_a = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na)\delta_{na}$.

Supposons que f est une distribution tempérée dont la transformée au sens des distributions satisfait :

$$\text{Supp}(\hat{f}) \subset [-\lambda_c, \lambda_c],$$

i.e. $\hat{f} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, on a alors, f étant C^∞ à croissance lente et appartenant à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

$$af\Delta_a = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na)\delta_{na} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \quad (5.1)$$

donc par transformée de Fourier on obtient dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

$$a\widehat{f\Delta_a}(\xi) = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na)e^{-2i\pi na\xi}. \quad (5.2)$$

Par ailleurs, par transformée de Fourier de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}) * \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (proposition 8 chapitre 3), on a ainsi :

$$\hat{f} * \widehat{\Delta_a} = \widehat{f\Delta_a}$$

d'où :

$$\begin{aligned} a\widehat{f\Delta_a}(\xi) &= \hat{f} * \widehat{\Delta_{\frac{1}{a}}}(\xi) \text{ propriétés de la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tau_{\frac{n}{a}} \hat{f}(\xi). \end{aligned} \quad (5.3)$$

En utilisant les expressions données par (5.1) et (5.3), on obtient la forme duale de la formule de Poisson (valable dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$) :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tau_{\frac{n}{a}} \hat{f}(\xi) = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na)e^{-2i\pi na\xi} \quad (5.4)$$

5.1.2 Forme directe de la formule de Poisson

La forme directe de la formule de Poisson correspond à l'écriture suivante :

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \tau_{na} f(t) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \hat{f}\left(\frac{n}{a}\right) e^{2i\pi n \frac{t}{a}} \quad (5.5)$$

Par analogie avec la formulation duale, supposons que f soit à support compact ($f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$), alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} f * \Delta_a &= \overline{\mathcal{F}}(\hat{f} \hat{\Delta}_a) \\ &= \overline{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{n}{a}\right) \delta_{\frac{n}{a}}\right) \\ &= \frac{1}{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{n}{a}\right) e^{2i\pi n \frac{t}{a}} \end{aligned}$$

5.2 Formule de Poisson dans $L^1(\mathbb{R})$

Théorème 1

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - na)$, alors

1. $F \in L^1_p(0, a)$ (périodique de période a) et la série converge dans $L^1(0, a)$.
2. La formule (5.5) est vraie dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
3. Si de plus f' (la dérivée étant prise au sens des distributions) est dans $L^1(\mathbb{R})$, alors F est continue sur \mathbb{R} et $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - na)$ converge normalement et (5.5) est vraie pour tout t (propriété des séries de Fourier).

Remarque 1 Pour montrer la convergence de F vers sa série de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a donc juste besoin de savoir que F appartient à $L^1(0, a)$. En revanche, si on se place dans le cadre fonctionnel, il faudrait avoir dans $L^2(0, a)$, ce qui est plus restrictif.

5.3 Théorème de Shannon

Le théorème de Shannon exprime comment reconstruire une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact à l'aide de ces échantillons.

Théorème 2 (Shannon)

Soit f une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est à support dans l'intervalle $[-\lambda_c, \lambda_c]$. On peut échantillonner f avec un pas d'échantillonnage a sans perte d'information si $\frac{1}{a} > 2\lambda_c$.

Dans ce cas, on a :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{f(na)}_{\text{échantillons}} \cdot \underbrace{\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{a}(x - na)\right)}_{\text{base d'interpolation de Shannon}}$$

Démonstration f est à croissance lente donc on la forme duale de la formule de Poisson :

$$\hat{f}(\xi) = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na) e^{-2i\pi na\xi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tau_{\frac{n}{a}} \hat{f}(\xi).$$

Comme \hat{f} dans $L^2(\mathbb{R})$ et à support compact, on peut montrer facilement que l'égalité précédente est aussi vraie dans $L^2_p(-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a})$. Avec l'hypothèse faite sur a , on a ensuite dans $L^2_p(-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a})$ (fonction périodique de période $1/a$ et de carré sommable sur une période) :

$$\hat{f}(\xi) = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na) e^{-2i\pi na\xi} \chi_{[-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}]}(\xi).$$

En utilisant alors la continuité de la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ (cours 1A), on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= a \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na) \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-2i\pi na\xi} \chi_{[-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}]} \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{a}(x - na)\right) \end{aligned}$$

Exemple 1 Attention : $\frac{1}{a} > 2\lambda_c$ est une inégalité stricte ! En effet, ça ne marche pas toujours pour l'égalité.

Par exemple, si $f(x) = \sin(2\pi kx)$ et $a = 1/2k$, les échantillons sont donnés par $f_n = f(\frac{n}{2k}) = \sin(n\pi) = 0$. On obtient alors des échantillons tous nuls, et il est impossible de reconstruire f à partir de ses échantillons.

Chapitre 6

Etude des filtres discrets, transformée en Z

6.1 Définition des filtres discrets

Nous étudions dans ce chapitre les signaux discrets x définis de la manière suivante :

$$x = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x_n \delta_{na}$$

Soit a fixé. On note X_a l'ensemble de ces signaux :

$$X_a = \{x \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), x = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x_n \delta_{na}\}$$

Il s'agit d'un espace vectoriel que l'on munit de la notion de convergence induite par celle sur \mathcal{D}' :

$$(x^N \xrightarrow{\mathcal{D}'} x) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{Z} \quad x_n^N \rightarrow x_n)$$

On définit alors les filtres discrets de la manière suivante :

Définition 1 On appelle filtre discret toute application $D : X \rightarrow X_a$ linéaire, continue et invariante par les translations τ_{ka} $k \in \mathbb{Z}$, où X est un sous-espace vectoriel de X_a contenant δ , invariant par les translations τ_{ka} , i.e. $D(\tau_{ka}x) = \tau_{ka}D(x)$ et muni de la même notion de convergence que X_a .

Proposition 1

Soit : $D : X \rightarrow X_a$, un filtre discret et $h = D\delta$ (h est appelée réponse impulsionnelle du filtre). Alors D est un système de convolution :

$$\forall x \in X \quad Dx = h * x$$

dans les deux cas suivants :

- i) $X = X_a$ et h est fini
- ii) X est l'ensemble des signaux à support limité à gauche et h appartient aussi à cet ensemble.

Dans ces deux cas, $y = Dx = h * x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} y_n \delta_{na}$ avec $y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k}$ où cette somme est finie.

Remarque 1 Comme nous l'avons vu précédemment pour définir le filtrage dans le cadre des distributions on n'a pas besoin d'avoir une suite (y_n) dans $l^1(\mathbb{Z})$ ou $l^2(\mathbb{Z})$.

6.2 Stabilité et causalité des filtres discrets

Commençons par la définition la notion de causalité :

Définition 2

$$(\text{Le filtre } D : X \rightarrow X_a \text{ est causal}) \Leftrightarrow ((\forall n < 0, \quad x_n = 0) \Rightarrow (\forall n < 0, \quad (Dx)_n = 0))$$

Pour la notion de stabilité des filtres, nous avons besoin de l'ensemble :

$$l_a^\infty = \left\{ x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \delta_{na}, \quad \sup |x_n| < +\infty \right\}$$

muni duquel nous pouvons alors écrire la définition de stabilité :

Définition 3

$$(\text{Le filtre } D : X \rightarrow X_a \text{ est stable}) \Leftrightarrow (\exists A > 0, \forall x \in X \cap l_a^\infty, \|Dx\|_\infty \leq A\|x\|_\infty)$$

Remarque 2 Pour qu'un filtre soit implémentable en temps réel (réalisable), il faut nécessairement qu'il soit causal, i.e la sortie Dx_n ne dépend que des valeurs de x_m pour $m \leq n$.

Les filtres stables et causaux qui s'écrivent sous forme de convolution sont alors caractérisés par :

Théorème 1

- | |
|--|
| <p>i) D est stable $\Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n < +\infty$</p> <p>ii) D est causal $\Leftrightarrow \forall n < 0 \quad h_n = 0$</p> |
|--|

Démonstration Dans le cas où la convolution existe (en particulier si h est fini ou si h et x sont à support limité à gauche), on peut écrire :

$$|y_n| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k| |x_{n-k}| \leq \sup_n |x_n| \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|$$

D est donc stable. La réciproque est évidente si D est fini. Examinons le cas de h et x à support limité à gauche (on peut supposer sans perte de généralité que h est à support dans \mathbb{N}).

Soit p appartenant à \mathbb{N} , et x^p défini par :

$$x_n^p = \begin{cases} \text{sign}(h_{p-n}) & \text{si } 0 \leq n \leq p \text{ et } h_{p-n} \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ces signaux sont finis donc causaux et $\|x^p\|_\infty \leq 1$. On a alors

$$y_n^p = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \text{sign}(h_{p-n+k}).$$

D'où, $y_p^p = \sum_{k=0}^p |h_k| \leq A$, pour tout $p \geq 0$ donc, $\sum_{k=0}^{\infty} |h_k| \leq +\infty$

6.3 Transformée en Z

La transformée de Fourier d'un signal discret tempéré $x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \delta_{na}$ est la distribution périodique :

$$X(e^{2i\pi a\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{-2i\pi a\omega n}. \quad (6.1)$$

Cependant, comme nous l'avons vu, avoir la convergence de la série au sens des fonctions implique que (x_n) soit dans $l^1(\mathbb{Z})$ ou $l^2(\mathbb{Z})$ ce qui est très restrictif. Par ailleurs, le fait de savoir que l'on peut définir le filtrage dans un espace de distributions ne permet pas l'étude pratique des filtres.

En remplaçant $e^{2i\pi a\omega}$ dans (6.1) par un complexe z quelconque, on obtient ce qu'on appelle la transformée en Z du signal x :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n z^{-n} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Dans ce qui suit, $X(z)$ définit la transformée en z de (x_n) . Pour se convaincre de l'intérêt d'une telle transformation prenons la suite de Heaviside $x_n = 1$ si $n \geq 0$ et 0 sinon. On voit que $X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ si $|z| \in [0, 1[$, alors que la TFTD ne converge pas dans ce cas.

En général, lorsqu'elle existe la transformée en Z converge sur une couronne de convergence $r < |z| < R$.

Pour l'étude des signaux discrets, on remplace la transformée de Fourier par la transformée en Z pour des problèmes de convergence, comme nous venons de voir, mais aussi parce que l'étude des filtres se ramène comme nous le verrons à étudier des fractions rationnelles en Z.

En revanche, la transformée en Z existe dès que la convolution des signaux x et h existent. Nous avons la propriété essentielle qui va nous servir par la suite :

Théorème 2

Soient deux signaux discrets $h = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \delta_{na}$ et $x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \delta_{na}$, satisfaisant les conditions d'existence de la convolution (i.e. h est fini ou h et x sont à support limité à gauche). Alors, leurs transformées en Z respectives H et X existent dans des couronnes C_1 et C_2 et nous avons alors :

$$\forall z \in C_1 \cap C_2, \quad Y(z) = H(z)X(z)$$

Remarque 3 Les couronnes de convergence peuvent être éventuellement vides.

On peut retrouver x à l'aide de $X(z)$ en inversant la transformée en Z. Cependant, la fonction $X(z)$ est une fonction holomorphe dont l'inversion se fait par développement en séries de Laurent (comme les séries entières mais sur \mathbb{Z}) ou par la méthode des résidus (hors programme). Nous n'inverserons donc la transformée en Z que dans les cas simples où nous reconnaissons des développements en séries entières classiques.

6.4 Filtre gouverné par une équation aux différences linéaire

On considère la classe important des filtres discrets vérifiant l'équation aux différences linéaires à coefficients constants :

$$y_n = \sum_{j=0}^p a_j x_{n-j} - \sum_{k=1}^q b_k y_{n-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k x_{n-k}$$

On considère alors la transformée en z du système pour obtenir :

$$\left(\sum_{k=0}^q b_k z^{-k} \right) Y(z) = \left(\sum_{j=0}^p a_j z^{-j} \right) X(z)$$

et on obtient alors :

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^p a_j z^{-j}}{\sum_{k=0}^q b_k z^{-k}}$$

On peut caractériser la stabilité des filtres à l'aide de leur fonction de transfert $H(z)$. On appelle zéros (resp. pôles) de H les racines du numérateur (resp. dénominateur).

Théorème 3

- i) Pour que le filtre soit stable, il faut et il suffit que la couronne de convergence contienne le cercle unité.
- ii) Si le filtre est causal, il est stable si et seulement si les pôles de $H(z)$ sont situés à l'intérieur du disque unité.

Sous l'hypothèse que le filtre h cherché soit causal, on peut déterminer ses composantes par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{cases} h_0 = a_0 \\ h_n = a_n - \sum_{k=1}^n b_k h_{n-k} \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Les coefficients y_n étant donnés par :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad y_n = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k x_{n-k}$$

Chapitre 7

Espaces de Hilbert

Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

7.1 Définitions

Définition 1 Un produit scalaire sur H est une application de $H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ (notée $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$) vérifiant :

$$(i) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x, y, z \in H, \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$$

$$(ii) \quad \forall x, y \in H, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$(iii) \quad \forall x \in H, \langle x, x \rangle \geq 0$$

$$(iv) \quad \forall x \in H, \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$$

Proposition 1

On a :

1) L'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall x, y \in H, |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

(On a égalité lorsque x et y sont colinéaires.)

2) L'identité du parallélogramme : Si on note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, on a :

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$$

Démonstration Si $\langle x, y \rangle = 0$, c'est clair ; sinon soit $t \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle x + ty, x + ty \rangle &= \langle x, x \rangle + t \langle y, x \rangle + \bar{t} \langle x, y \rangle + |t|^2 \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2 \operatorname{Re}(t \langle y, x \rangle) + |t|^2 \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

$\exists \theta \in [0, 2\pi[$ et $r > 0$ tq $\langle y, x \rangle = r \cdot e^{i\theta}$

Prenons $t = s \cdot e^{-i\theta}$ où $s \in \mathbb{R}$.

$$\langle x, x \rangle + 2rs + s^2 \langle y, y \rangle \geq 0$$

Le discriminant de ce polynôme en s doit être négatif.

Remarque 1 Pour démontrer 1, on n'a pas utilisé $\langle x, x \rangle > 0$ pour $x \neq 0$.

Proposition 2

|| L'application $x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$ est une norme sur H .

Démonstration

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \|y\| \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Définition 2 Un espace préhilbertien est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire. Si cet espace est complet pour la norme provenant du produit scalaire, on dit que H est un espace de Hilbert.

Exemples 1

1) $H = \mathbb{R}^N$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ est un Hilbert.

2) $H = \mathbb{C}^N$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j$ est un Hilbert.

3) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné.

1. $H = C(\bar{\Omega}, \mathbb{C})$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\langle x, y \rangle = \int_{\Omega} x(t) \bar{y}(t) dt$ est un préhilbertien. Il n'est pas complet.

2. $H = L^2(\Omega)$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\langle x, y \rangle = \int_{\Omega} x(t) \bar{y}(t) dt$ est un Hilbert. C'est le complété de l'espace préhilbertien défini précédemment.

4) $H = l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n, x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n \geq 0} |x_n|^2 < +\infty\}$, $\langle x, y \rangle = \sum_{n \geq 0} x_n \bar{y}_n$ est un Hilbert.

Définition 3 Soit H un préhilbertien.

1) $x, y \in H$ sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$.

2) Soit $A \subset H$, $A \neq \emptyset$.

On appelle orthogonal de A dans H l'ensemble noté A^{\perp} tel que :

$$A^{\perp} = \{x \in H \mid \forall y \in A, \langle x, y \rangle = 0\}$$

Remarque 2 On peut donner la définition 3 dans un espace vectoriel H muni d'une application vérifiant seulement 1 et 2 de la définition 1.

Proposition 3

Soit H un préhilbertien.

- 1) Soit $A \subset H, A \neq \emptyset$. Alors A^\perp est un sous-espace vectoriel fermé de H .
- 2) Soit $A, B \subset H, A \neq \emptyset$ et $A \subset B$. Alors $B^\perp \subset A^\perp$.
- 3) Soit $A \subset H, A \neq \emptyset$. Alors $A \subset (A^\perp)^\perp$.
- 4) Soit A un sous-espace vectoriel de H . Si H est complet alors $\overline{A} = (A^\perp)^\perp$.

Le dernier point est le seul non trivial...

Remarque 3 $\overline{A}^\perp = A^\perp$ et $\overline{\text{vect}(A)}^\perp = A^\perp$

7.2 Projection sur un convexe**Théorème 1 Projection sur un convexe fermé**

Soit H un espace de Hilbert. Soit $C \subset H$ une partie convexe fermée et non vide. Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $a \in C$ tel que :

$$\|x - a\| = d(x, C) = \inf_{y \in C} \|x - y\|$$

Démonstration

— Existence :

Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C telle que $\|x - y_n\| \rightarrow d(x, C)$.

$$\forall n \neq m, \frac{1}{2} \|y_n - y_m\|^2 = \|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2 - 2 \left\| x - \frac{y_n + y_m}{2} \right\|^2$$

Et $\frac{y_n + y_m}{2} \in C$ car C est convexe.

$$\text{Donc } \left\| x - \frac{y_n + y_m}{2} \right\| \geq d(x, C).$$

On a alors :

$$0 \leq \frac{1}{2} \|y_n - y_m\|^2 \leq \underbrace{\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2 - 2d(x, C)^2}_{\xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0}$$

Donc $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme H est complet, il existe $a \in H$ tel que $\lim y_n = a$.

Comme C est fermé, $a \in C$.

$$d(x, C) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - y_n\| = \|x - a\|$$

— Unicité :

Supposons qu'il existe a et $b \in C$ tels que $\|x - a\| = \|x - b\| = d(x, C)$.

On définit la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de C par : $y_{2p} = a$ et $y_{2p+1} = b$.

On sait que $\|x - y_n\| \rightarrow d(x, C)$, et donc que (y_n) est de Cauchy dans H complet.

Ainsi, $a = b$ par unicité de la limite.

Théorème 2 Caractérisation de la projection

Soit H un espace de Hilbert. Soit $C \subset H$ une partie convexe, fermée et non vide. On a l'équivalence suivante :

- (i) $a \in C$ est la projection de x sur C
- (ii) $a \in C$ et $\forall y \in C, \operatorname{Re} \langle x - a, y - a \rangle \leq 0$

Démonstration

— $i) \Rightarrow ii)$

Soit $y \in C$ et soit $t \in]0, 1]$.

$(1 - t) \cdot a + t \cdot y \in C$ car C est convexe.

$$\|x - ((1 - t)a + ty)\|^2 \geq \|x - a\|^2$$

Or,

$$\begin{aligned} \|x - ((1 - t)a + ty)\|^2 &= \|x - a - t(y - a)\|^2 \\ &= \|x - a\|^2 + t^2 \|y - a\|^2 - 2 \operatorname{Re} (t \langle x - a, y - a \rangle) \end{aligned}$$

Donc $\forall t \in]0, 1], 2 \operatorname{Re} (t \langle x - a, y - a \rangle) \leq t^2 \|y - a\|^2$

D'où $\forall t \in]0, 1], 2 \operatorname{Re} \langle x - a, y - a \rangle \leq t \|y - a\|^2$

On fait $t \rightarrow 0$, d'où : $\operatorname{Re} \langle x - a, y - a \rangle \leq 0$.

— $ii) \Rightarrow i)$

Soit $y \in C$.

$$\|x - y\|^2 = \|x - a + a - y\|^2 = \|x - a\|^2 + \|y - a\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x - a, y - a \rangle$$

Donc par ii) $\|x - y\|^2 \geq \|x - a\|^2 + \|y - a\|^2 \geq \|x - a\|^2$

d'où : $\|x - a\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|$

Proposition 4

Soit H un espace de Hilbert. Soit $C \in H$ une partie convexe, fermée et non vide. Pour $x \in H$, on note $P_C x$ la projection de x sur C . On a :

$$\forall x_1, x_2 \in H, \|P_C x_1 - P_C x_2\| \leq \|x_1 - x_2\|$$

Démonstration

Posons $a_j = P_C x_j$ pour $j = 1, 2$.

$$\|a_1 - a_2\|^2 = \langle a_1 - a_2, a_1 - a_2 \rangle = \operatorname{Re} \langle a_1 - a_2, a_1 - a_2 \rangle$$

$$= \underbrace{\operatorname{Re} \langle a_1 - x_1, a_1 - a_2 \rangle}_{\geq 0} + \operatorname{Re} \langle x_1 - x_2, a_1 - a_2 \rangle + \underbrace{\operatorname{Re} \langle x_2 - a_2, a_1 - a_2 \rangle}_{\geq 0} \text{ par le théorème 2 (page 62)}$$

$$\leq \operatorname{Re} \langle x_1 - x_2, a_1 - a_2 \rangle$$

$\leq \|x_1 - x_2\| \|a_1 - a_2\|$ d'après Cauchy-Schwarz.

Corollaire 1

Soit H un espace de Hilbert et soit F un sous-espace vectoriel fermé de H (F est donc convexe).

- 1) $a = P_F x$ est caractérisé par : $\begin{cases} a \in F \\ \forall y \in F, \langle x - a, y \rangle = 0 \end{cases}$
- 2) P_F est linéaire et continue
- 3) $H = F \oplus F^\perp$

Démonstration

1) $a = P_F x$ est caractérisé par :

$$(1) \begin{cases} \forall y \in F, \operatorname{Re}\langle x - a, y - a \rangle \leq 0 \text{ d'après le théorème 2 (page 62)} \\ a \in F \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à :

$$(2) \begin{cases} a \in F \\ \forall y \in F, \langle x - a, y \rangle = 0 \end{cases}$$

En effet :

— $2 \Rightarrow 1$

$$\forall y \in F, \langle x - a, y - a \rangle = 0 \text{ car } y - a \in F, \text{ donc } \operatorname{Re}\langle x - a, y - a \rangle \leq 0$$

— $1 \Rightarrow 2$

$$\text{On a : } \forall y \in F, \operatorname{Re}\langle x - a, y + a - a \rangle \leq 0 \text{ car } y + a \in F$$

$$\text{i.e. : } \forall y \in F, \operatorname{Re}\langle x - a, y \rangle \leq 0$$

$$\text{Mais si } y \in F, \text{ alors } -y \in F, \text{ donc } \operatorname{Re}\langle x - a, -y \rangle \leq 0$$

$$\text{D'où } \forall y \in F, \operatorname{Re}\langle x - a, y \rangle = 0$$

$$\text{Si } y \in F, iy \in F$$

$$\operatorname{Re}\langle x - a, iy \rangle = 0 \text{ d'où } \operatorname{Im}\langle x - a, y \rangle = 0$$

2) Soit $x, x' \in H, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

$$\text{On veut savoir si : } P_F(\lambda x + \mu x') = \lambda P_F x + \mu P_F x'$$

$$\text{Or, par 1 } \forall y \in F, \langle \lambda x + \mu x' - P_F(\lambda x + \mu x'), y \rangle = 0$$

$$\text{et } \forall y \in F, \langle \lambda x + \mu x' - \lambda P_F x - \mu P_F x', y \rangle = \lambda \langle x - P_F x, y \rangle + \mu \langle x' - P_F x', y \rangle = 0$$

3) $F \cap F^\perp = \{0\}$

$$\forall x \in H, x = \underbrace{P_F x}_{\in F} + \underbrace{x - P_F x}_{\in F^\perp}$$

Remarque 4 Dans le théorème 1 (page 61), on peut supposer H préhilbertien avec $C \subset H$ une partie non vide convexe et complète. Même remarque pour le corollaire 1 (page 63).

7.3 Représentation de Riesz

Théorème 3 Théorème de représentation de Riesz

Soit $L \in \mathcal{L}(H, \mathbb{K}) = H'$, H Hilbert.

Il existe $a \in H$ unique tel que :

$$\forall x \in H, L(x) = \langle x, a \rangle$$

De plus : $\|L\| = \|a\|$

Démonstration

Posons $F = L^{-1}(0)$.

1. Si $F = H$, alors $L \equiv 0^1$ et on prend $a = 0$.
2. Sinon, soit $z \in F^\perp \setminus \{0\}$ (base de F^\perp puisque sa dimension est de 1)

— Existence :

$$\forall x \in H, \exists \lambda \in \mathbb{K}, y \in F \text{ tq } x = y + \lambda z \quad \left(H = F \oplus \overbrace{\text{Vect}(z)}^{=F^\perp} \right)$$

$$L(x) = L(y) + \lambda \cdot L(z) = \lambda \cdot L(z) \implies \lambda = \frac{L(x)}{L(z)}$$

$$0 = \langle y, z \rangle = \langle x - \frac{L(x)}{L(z)} \cdot z, z \rangle = \langle x, z \rangle - \frac{L(x)}{L(z)} \cdot \|z\|^2$$

$$L(x) = \frac{L(z)}{\|z\|^2} \cdot \langle x, z \rangle = \langle x, \frac{\overline{L(z)}}{\|z\|^2} \cdot z \rangle$$

$$\text{On prend } a = \frac{\overline{L(z)}}{\|z\|^2} \cdot z$$

— Unicité :

$$\forall x \in H, \langle x, a \rangle = \langle x, a' \rangle \iff \forall x \in H, \langle x, a - a' \rangle = 0 \iff a = a'$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|L(x)| = |\langle x, a \rangle| \leq \|x\| \cdot \|a\| \implies \|L\| \leq \|a\|$$

Or, si $L \equiv 0$, alors $\|L\| = \|a\| = 0$.

Sinon, $a \neq 0$ et $L\left(\frac{a}{\|a\|}\right) = \|a\| \implies \|L\| = \|a\|$

Remarque 5

— Soit

$$\begin{aligned} \theta : H &\longrightarrow H' \\ a &\longmapsto \varphi_a \end{aligned} \quad \text{où } \varphi_a(x) = \langle x, a \rangle$$

θ est une bijection, et est anti-linéaire :

$$\theta(a + b) = \theta_a + \theta_b$$

$$\theta(\lambda \cdot a) = \overline{\lambda} \cdot \theta(a)$$

N.B. : H' dual de H . Ici, il faut H complet car H' l'est forcément et il y a isomorphisme.

— Si H Hilbert sur \mathbb{R} , $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable, $\forall x \in H, f'(x) \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R}) = H'$

$$\forall x \in H, \exists a \in H \text{ tq } \forall h \in H, f'(x)(h) = \langle h, a \rangle = \langle a, h \rangle$$

On note :

$$a = \nabla f(x) = \left(\overrightarrow{\text{grad}f} \right)(x)$$

1. identiquement égal à

Définition 4 Soit H un espace de Hilbert.

Soit $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-espaces vectoriels fermés de H .

On dit que H est somme hilbertienne des H_n notée : $H = \bigoplus_{n \geq 0} H_n$ si :

$$1) \forall n \neq m, \forall x \in H_n, \forall y \in H_m, \langle x, y \rangle = 0$$

2) L'espace vectoriel F engendré par les H_n est dense dans H

(F est l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments des $H_n, n \in \mathbb{N}$).

Théorème 4

On suppose que $H = \bigoplus_{n \geq 0} H_n$. Si $x \in H$, on note $x_n = P_{H_n} x$.

Alors, on a :

1)

$$x = \sum_{n \geq 0} x_n \quad (\text{i.e. } x = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N x_n)$$

2)

$$\|x\|^2 = \sum_{n \geq 0} \|x_n\|^2$$

(Identité de Bessel-Parseval)

Réciproquement, soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in H_n$$

et telle que :

$$\sum_{n \geq 0} \|x_n\|^2 < +\infty$$

Alors la série $\sum_{n \geq 0} x_n$ converge dans H et si $x = \sum_{n \geq 0} x_n$, alors $\forall n \geq 0, x_n = P_{H_n} x$

Démonstration

1) Posons pour $N \in \mathbb{N}$,

$$S_N = \sum_{n=0}^N P_{H_n}$$

Si $x \in H$,

$$S_N x = \sum_{n=0}^N x_n$$

et on doit montrer que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|x - S_N x\| \rightarrow 0$$

$$\|S_N x\|^2 = \langle S_N x, S_N x \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^N x_n, \sum_{n=0}^N x_n \right\rangle = \sum_{n=0}^N \langle x_n, x_n \rangle = \sum_{n=0}^N \|x_n\|^2 \quad (4)$$

Ce que l'on pouvait directement obtenir grâce au théorème de Pythagore.

Soit $\varepsilon > 0$, comme F est dense dans H , il existe $x^* \in F$ tel que $\|x - x^*\| \leq \varepsilon/2$

$\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall N \geq N_0, S_N x^* = x^*$

Soit $N \geq N_0$,

$$\begin{aligned} \|S_N x - x\| &\leq \|S_N x - S_N x^*\| + \|S_N x^* - x\| \\ &= \|S_N x - S_N x^*\| + \|x - x^*\| \\ &\leq \|x - x^*\| + \|x - x^*\| \text{ car } S_N \text{ opÉrateur de projection} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

$$2) (4) \Rightarrow \|x\|^2 = \sum_{n \geq 0} \|x_n\|^2$$

Réciproquement Posons

$$u_N = \sum_{n=0}^N x_n$$

Soit $p > q$ dans \mathbb{N} :

$$\|u_p - u_q\|^2 = \left\| \sum_{n=q+1}^p x_n \right\|^2 = \sum_{n=q+1}^p \|x_n\|^2 \xrightarrow{p, q \rightarrow +\infty} 0$$

Donc, la suite u est de Cauchy, et elle converge.

Donc, on peut poser :

$$x = \sum_{n \geq 0} x_n$$

Soit $z_n \in H_n$, $\langle x - x_n, z_n \rangle = \langle x, z_n \rangle - \langle x_n, z_n \rangle$

et $\langle x, z_n \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^N \langle x_p, z_n \rangle = \langle x_n, z_n \rangle$ (dès que $N \geq n$).

D'où

$$\forall z_n \in H_n, \langle x - x_n, z_n \rangle = 0$$

D'après le corollaire 1 (page 63) (avec $x_n \in H_n$), on a :

$$x_n = P_{H_n} x$$

7.4 Bases hilbertiennes

Définition 5 On appelle base hilbertienne d'un espace de Hilbert H , une suite $(e_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de H telle que :

$$1) \forall n \neq m, \langle e_n, e_m \rangle = 0 \text{ et } \forall n, \langle e_n, e_n \rangle = 1$$

2) L'espace vectoriel engendré par les $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans H .

Remarque 6 Soit H un Hilbert et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H . D'après le théorème 4 avec $H_n = \mathbb{K}e_n$, tout $x \in H$ s'écrit de manière unique :

$$x = \sum_{n \geq 0} \langle x, e_n \rangle e_n$$

et

$$\|x\|^2 = \sum_{n \geq 0} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

Les $\langle x, e_n \rangle$ sont les coefficients de Fourier de x par rapport à la base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 0}$.

Réciproquement Si $\lambda = (\lambda_n) \in l_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{N})$, alors la série $\sum_{n \geq 0} \lambda_n e_n$ est convergente vers un élément

$$x \in H \text{ et } \forall n, \lambda_n = \langle x, e_n \rangle \text{ et } \|x\|^2 = \sum_{n \geq 0} |\lambda_n|^2$$

(exemple : $\lambda_n = \frac{1}{n+1}$ ($n \geq 0$))

Remarque 7 Ne pas confondre base Hilbertienne et base algébrique, qui est une famille non forcément dénombrable d'éléments de l'espace vectoriel qui est libre et telle que tout élément de l'espace vectoriel s'écrit comme une combinaison linéaire finie d'éléments de cette base.

Par contre, il s'agit de la même chose en dimension finie.

Remarque 8 Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.

Si l'espace de Hilbert n'est pas séparable, on peut faire des choses...

H est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset H$ dénombrable et dense dans H .

$D = \{v_0, v_1, \dots, v_n, \dots\}$ avec $v_j \neq 0$ pour tout j

$F_{n+1} = \text{Vect}(v_0, v_1, \dots, v_n)$, $\bigcup_{n \geq 1} F_n$ est dense dans H .

Dans F_1 , on prend un vecteur e_1 de norme 1.

Ensuite, on prend F_2 tel que $\dim F_2 = \dim F_1 + 1 = 2$ et on prend un vecteur e_2 de norme 1 orthogonal à e_1 , etc.

7.5 L'espace $L^2(I)$

7.5.1 Définitions

Définition 6 $L^2(I)$ est l'espace des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $|f|^2$ est intégrable.

Définition 7 Produit scalaire sur $L^2(I)$

$\forall f, g \in L^2(I)$, $\langle f, g \rangle = \int_I f(x) \overline{g(x)} dx$ est un produit scalaire dans $L^2(I)$ de norme associée : $\|f\|_2^2 = \int_I |f(x)|^2 dx$

7.5.2 Propriétés

Théorème 5

$(L^2(I), \|\cdot\|_2)$ est un espace de Hilbert

7.6 Bases hilbertiennes de $L^2(I)$

7.6.1 Définition

Définition 8 Soit $\mathcal{B} = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}, \varphi_n \in L^2(I)$
 \mathcal{B} est une base hilbertienne de $L^2(I)$ ssi :

1. $\forall n, m \in \mathbb{N}, \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \delta_{n,m}$
2. Les combinaisons linéaires finies de fonctions φ_n sont denses dans $L^2(I)$

$$\iff \mathcal{B}^\perp = \{g \in L^2(I) \mid \forall n \in \mathbb{N}, \langle g, \varphi_n \rangle = 0\} = \{0\}$$

7.6.2 Théorème de Parseval

Théorème 6

$\mathcal{B} = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne si \mathcal{B} vérifie l'une des deux propriétés suivantes équivalentes :

1. Convergence de la série dans $L^2(I)$:

$$\forall f \in L^2(I), f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

- 2.

$$\forall f \in L^2(I), \|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2$$

Remarque 9 Si on avait convergence ponctuelle de la série, on écrirait :

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n(x)$$

Dans le cas des bases hilbertiennes, la convergence (et les égalités) sont à prendre au sens de la norme L^2 , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} f = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \varphi_n \text{ dans } L^2(I) &\iff \lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| f - \sum_{n=0}^N c_n \varphi_n \right\|_2 = 0 \\ &\iff \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_I \left| f(x) - \sum_{n=0}^N c_n \varphi_n(x) \right|^2 dx = 0 \end{aligned}$$

7.7 Séries de Fourier

On considère l'espace suivant :

$$L_p^2(0, T) = \{f \in L^2([0, T]) \mid f \text{ } T\text{-périodique}\}$$

muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T f(x) \overline{g(x)} dx$$

On considère également la famille :

$$\mathcal{B} = (e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

où

$$e_n(x) = \frac{e^{in \frac{2\pi x}{T}}}{\sqrt{T}}$$

Théorème 7

\mathcal{B} est une base Hilbertienne de $L_p^2([0, T])$ donc

$$\forall f \in L_p^2(0, T), c_n(f) = \langle f, e_n \rangle = \int_0^T f(x) \cdot \frac{e^{-in \frac{2\pi x}{T}}}{\sqrt{T}} dx$$

1.

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$$

2.

$$\int_0^T |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

Pour la démonstration, on va utiliser les deux lemmes suivants :

Lemme 1 \mathcal{B} est orthonormé

Démonstration

$$\langle e_n, e_m \rangle = \int_0^T \frac{e^{i(n-m) \frac{2\pi x}{T}}}{T} dx = \delta_{m,n}$$

Théorème 8

Soit $\varphi \in C^\infty(0, T)$, T -périodique. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(\varphi) = \int_0^T \varphi(x) \frac{e^{-in \frac{2\pi x}{T}}}{\sqrt{T}} dx$$

Alors :

$$\varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\varphi) \frac{e^{in \frac{2\pi x}{T}}}{\sqrt{T}}$$

et la série converge uniformément sur $[0, T]$

Démonstration

— Convergence uniforme

$$\begin{aligned}
 \left| c_n(\varphi) \frac{e^{in\frac{2\pi x}{T}}}{\sqrt{T}} \right| &= \frac{1}{\sqrt{T}} |c_n(\varphi)| \\
 &= \frac{1}{T} \left| \int_0^T \varphi(x) e^{-in\frac{2\pi x}{T}} dx \right| \\
 &= \frac{1}{T} \left| \frac{1}{(-i\frac{2\pi n}{T})^2} \int_0^T \varphi''(x) e^{-inx} dx \right| \\
 &\leq \frac{T}{4\pi^2 n^2} \underbrace{\int_0^T |\varphi''(x)| dx}_c
 \end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum c_n(\varphi) \frac{e^{in\frac{2\pi x}{T}}}{\sqrt{T}}$ converge normalement, donc uniformément.

— Calcul de $\sum_{n=-N}^N e^{in\theta}$

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-N}^N e^{in\theta} &= e^{-N\theta} \sum_{n=0}^{2N} e^{in\theta} \\
 &= e^{-N\theta} \frac{1 - e^{i(2N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\
 &= e^{-N\theta} \frac{e^{i(\frac{2N+1}{2}\theta)} \left(e^{-i(\frac{2N+1}{2}\theta)} - e^{+i(\frac{2N+1}{2}\theta)} \right)}{e^{i\theta/2} \left(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2} \right)} \\
 &= \frac{\sin \left(N + \frac{1}{2} \right) \theta}{\sin \frac{\theta}{2}}
 \end{aligned}$$

La dernière expression s'appelle le noyau de Fejér

Remarque 10

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=-N}^N e^{in\theta} \right) d\theta = \sum_{n=-N}^N \left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta}}{2\pi} d\theta \right) = 1$$

donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \left(N + \frac{1}{2} \right) \theta}{\sin \frac{\theta}{2}} d\theta = 1$$

$$\begin{aligned}
\varphi(t) - \sum_{n=-N}^N c_n(\varphi) \frac{e^{in\frac{2\pi t}{T}}}{\sqrt{T}} &= \varphi(t) - \sum_{n=-N}^N \left(\int_0^T \varphi(x) \frac{e^{-in\frac{2\pi x}{T}}}{\sqrt{T}} dx \right) \frac{e^{in\frac{2\pi t}{T}}}{\sqrt{T}} \\
&= \varphi(t) - \int_0^T \frac{\varphi(x)}{T} \left(\sum_{n=-N}^N e^{in\frac{2\pi(t-x)}{T}} \right) dx \\
&= \varphi(t) - \int_0^T \frac{\varphi(x)}{T} \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{T}(x-t)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{T}(x-t)\right)} dx \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{T}(x-t)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{T}(x-t)\right)} \varphi(t) dx \\
&\quad - \int_0^T \frac{\varphi(x)}{T} \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{T}(x-t)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{T}(x-t)\right)} dx \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{\frac{\varphi(x) - \varphi(t)}{\sin\left(\frac{\pi}{T}(x-t)\right)}}_{\psi_t(x)} \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{T}(x-t)\right) dx
\end{aligned}$$

On pose $\psi_t(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(t)}{\sin\left(\frac{\pi}{T}(x-t)\right)}$. Comme φ est C^∞ , ψ_t est une fonction C^∞ des variables t et x , et on a :

$$\begin{aligned}
\left| \varphi(t) - \sum_{n=-N}^N c_n(\varphi) \frac{e^{in\frac{2\pi t}{T}}}{\sqrt{T}} \right| &= \frac{T}{4\pi^2 \left(N + \frac{1}{2}\right)^2} \left| \int_0^T \psi_t''(x) \sin\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{T}(x-t) dx \right| \\
&\leq \frac{T^2 \sup_{t,x} |\psi_t''(x)|}{4\pi^2 \left(N + \frac{1}{2}\right)^2} \\
&\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0
\end{aligned}$$

Démonstration du thÈorÈme

1. (admis) $C_p^\infty(0, T)$ (p pour pÈriodique) est dense dans $L_p^2(0, T)$, c'est-à-dire pour tout $f \in L_p^2(0, T)$, on a la propriété :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \varphi \in C_p^\infty(0, T) \|f - \varphi\|_{L^2} < \varepsilon$$

2. (th. de FÈjer-Dirichlet)

$$\varphi \in C^\infty, \varepsilon > 0, \exists N_0, \forall N \geq N_0, \|\varphi - S_N \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$$

, où S_N est l'opÈrateur de projection sur les H_n définis par les e_n . Or

$$\|\varphi - S_N \varphi\|_2 = \int_0^T |\varphi(x) - S_N \varphi(x)|^2 dx \leq T \|\varphi - S_N \varphi\|_\infty^2 < 2\pi \varepsilon^2$$

Conclusion :

$$\forall f \in L_p^2(0, T), \forall \varepsilon > 0, \forall N \geq N_0,$$

$$\begin{aligned}
\|f - S_N f\|_{2,[0,2\pi]} &= \|f - \varphi + \varphi - S_N \varphi + S_N \varphi - S_N f\|_{2,[0,2\pi]} \\
&\leq \|f - \varphi\|_{2,[0,2\pi]} + \|\varphi - S_N \varphi\|_{2,[0,2\pi]} + \|S_N \varphi - S_N f\|_{2,[0,2\pi]} \\
&\leq 2\varepsilon + \sqrt{T}\varepsilon,
\end{aligned}$$

en utilisant encore le fait que S_N étant un opérateur de projection sur un convexe, il est 1-Lipschitzien.

Théorème 9 : Décomposition de Fourier

Soit $f \in L^2_p(0, T)$. On définit le coefficient de Fourier de f :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \langle f, e_n \rangle = \int_0^T f(x) \frac{e^{-in\frac{2\pi}{T}x}}{\sqrt{T}} dx$$

Alors

1.

$$f = \sum c_n(f) \frac{e^{in\frac{2\pi}{T}x}}{\sqrt{T}}$$

(convergence de la série dans L^2)

2.

$$\|f\|_2 = \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

(Représentation dans une base Hilbertienne)

7.8 Polynômes orthogonaux

On munit l'espace d'une nouvelle mesure, $p(x)dx$ grâce à une fonction poids $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue. Ce qu'on note :

$$L^2([a, b], p(x)dx)$$

(on donne un poids à notre mesure) et tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b |x^n| p(x) dx < +\infty$$

On munit l'espace du produit scalaire naturel pour cette nouvelle mesure :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)p(x)dx$$

Dans cet espace, on considère la famille de polynômes :

$$\mathcal{B} = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}, p_n \in \mathbb{R}[X], \deg p_n = n$$

Théorème 10

Si \mathcal{B} est orthonormée pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$, alors \mathcal{B} une base Hilbertienne de $L^2([a, b], p(x)dx)$

Démonstration

- Théorème de Weierstrass : Toute fonction continue est limite uniforme d'une suite de polynômes sur $[a, b]$
- Les fonctions continues sont denses dans $L^2([a, b], p(x)dx)$

Exemple d'application : les polynômes orthogonaux

Soit $(P_n)_{n \geq 0}$ une famille de polynômes sur $[a, b]$ telle que

$$d^\circ P_n = n$$

$$\langle P_n, P_m \rangle = \delta_{n,m}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $L^2([a, b])$

$(P_n)_{n \geq 0}$ est une base Hilbertienne de $L^2([a, b])$ (en appliquant Weierstraß)

Exemple

- Polynômes de Legendre :

$$\begin{cases} p_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \text{ pour } n \geq 1 \\ p_0(x) &= 1 \end{cases}$$

Proposition 5

La famille $\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n\right)$ est une base Hilbertienne de $L^2([-1; 1])$

(démonstration en exercice)

- Application : Vibrations de la sphère dans \mathbb{R}^3
Si u est le déplacement de la membrane sphérique, u vérifie :

$$\Delta u = \lambda u$$

$u(x)$ défini pour $x \in S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 / \|x\| = 1\}$

Théorème 11

Les fonctions de Legendre de première espèce sont définies pour $n \geq |m|$ et $|x| \leq 1$ par :

$$P_n^m(x) = \begin{cases} (1-x^2)^{m/2} 2^n n! P_n^{(m)}(x) & \text{pour } n \geq |m| \\ (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n & \end{cases}$$

En coordonnées sphériques dans \mathbb{R}^3 :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta & 0 \leq \theta \leq \pi \\ y = r \sin \varphi \sin \theta & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z = r \cos \theta & r > 0 \end{cases}$$

Les valeurs propres de Δ sur S^2 sont données par :

$$\lambda = -n(n+1)$$

avec l'ordre de multiplicité $(2n+1)$

Les fonctions propres correspondantes s'écrivent en coordonnées sphériques :

$$u(\varphi, \theta) = e^{im\varphi} P_n^m(\cos \theta) \quad |m| \leq n$$

Remarque 11 Rappelons l'écriture du Laplacien usuel de \mathbb{R}^3 en coordonnées sphériques :

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{2}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right)$$

Le Laplacien Δ sur S^2 est appelé opérateur de Laplace-Beltrami sur S^2 et il s'écrit :

$$\Delta U = \frac{2}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right)$$

("partie angulaire" du laplacien de \mathbb{R}^3)

7.9 Base de Haar

Définition 9 La base de Haar

On se place dans l'espace $L^2([0, 1])$ munit du produit scalaire usuel. Soit φ la fonction constante 1 et ψ la fonction définie par :

$$\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x-1)$$

On pose :

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$$

Théorème 12

$(\varphi, \psi_{j,k})$ est une base Hilbertienne de $L^2(0, 1)$

Chapitre 8

Quelques rappels de calcul différentiel

Cette note a pour but de généraliser les notions fondamentales du calcul différentiel au cas de fonctions dépendant de plusieurs variables, qu'elles soient à valeurs réelles (i.e. des fonctions du type $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$) ou vectorielles (i.e. du type $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$).

De nombreux ouvrages traitent de ces résultats fondamentaux de manière détaillée. On pourra à ce titre consulter la référence [2].

8.1 Notations

Soit $d \geq 1$ un entier. On note (x_1, \dots, x_d) les coordonnées d'un point $x \in \mathbb{R}^d$. De même, si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^d$, on note $f = (f_1, \dots, f_n)$ les composantes de celle-ci, qui sont autant de fonctions de d variables, à valeurs réelles.

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^d ;

- Le *gradient* d'une fonction différentiable $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est le champ de vecteurs $\nabla f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ donné par :

$$\forall x \in U, \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(x) \right).$$

Le gradient de f s'interprète comme la direction dans l'espace \mathbb{R}^d des variables où f varie le plus fortement ; voir la Section 8.3.3 à ce sujet.

- La *jacobienne* d'une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est l'application $\text{Jac}(f) : U \rightarrow \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ de U vers l'ensemble $\mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et d colonnes, définie par :

$$\forall x \in U, \text{Jac}(f)(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_d}(x) \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes, la matrice $\text{Jac}(f)(x)$ est la matrice dont l'élément (i, j) , pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, d$, vaut $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$.

- La *divergence* d'une fonction différentiable $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ est la fonction $\text{div}(f) : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in U, \text{div}(f)(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \dots + \frac{\partial f_d}{\partial x_d}(x).$$

Ainsi, pour tout $x \in U$, $\text{div}(f)(x)$ est la trace de la matrice $\text{Jac}(f)(x)$ (qui est dans ce cas une matrice de taille $n \times n$).

D'un point de vue physique, la divergence d'un champ de vecteurs est une mesure de la concentration ou de la dispersion induites par ce champ de vecteurs; voir à ce sujet la formule de Green (8.4).

8.2 Le théorème de dérivation des applications composées

Le résultat fondamental de cette section - appelé 'chain rule' dans la littérature anglo-saxonne - est le suivant :

Théorème 1

Soit $d, n, p \geq 1$ trois entiers, et $U \subset \mathbb{R}^d$, $V \subset \mathbb{R}^n$ deux ouverts; soit $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux fonctions différentiables telles que $\psi(U) \subset V$. Alors la fonction composée $\varphi \circ \psi : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ est définie et différentiable sur U . Sa matrice jacobienne s'écrit :

$$\forall x \in U, \text{Jac}(\varphi \circ \psi)(x) = \text{Jac}(\varphi)(\psi(x))\text{Jac}(\psi)(x). \quad (8.1)$$

On peut paraphraser ce résultat de la manière suivante :

La matrice jacobienne de la composée est le produit des matrices jacobiniennes.

Noter que le produit matriciel figurant dans la formule (8.1) fait sens, puisque la matrice $\text{Jac}(\psi)(x)$ est de taille $n \times m$ et que $\text{Jac}(\varphi)(\psi(x))$ est de taille $p \times n$ (si bien que $\text{Jac}(\varphi \circ \psi)(x)$ est de taille $p \times m$). Une application de ce résultat est la formule fort utile suivante, que l'on pourra démontrer à titre d'exercice :

Corollaire 1

Soit $d \geq 1$ un entier et soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur un ouvert U de \mathbb{R}^d . Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction différentiable sur un intervalle I de \mathbb{R} (dont on note les composantes $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_d(t))$) telle que $\varphi(I) \subset U$. Alors la fonction composée $g = f \circ \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable et :

$$\forall t \in I, g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(t))\varphi'_1(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_d}(\varphi(t))\varphi'_d(t).$$

8.3 Les formules de Taylor

Les formules de Taylor permettent d'approcher une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ au voisinage d'un point $x \in U$ par un polynôme en d variables. Plusieurs versions existent en fonction de la régularité dont on dispose quant à f et qui permettent un contrôle plus ou moins précis du 'reste' - c'est-à-dire de la différence entre f et le polynôme approchant.

8.3.1 La formule de Taylor avec reste intégral

La formule de Taylor avec reste intégral est le résultat le plus précis quant à l'estimation du 'reste', puisqu'une formule explicite est disponible pour ce dernier. L'énoncé, connu du lecteur, dans le cas d'une fonction en une variable est le suivant :

Théorème 2

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{p+1} pour un entier $p \geq 1$. Alors pour tous points x_0 et x dans I :

$$f(x) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt$$

Démonstration [Esquisse de preuve] La démonstration de cette formule est intéressante puisqu'elle offre un moyen rapide de vérifier que l'on ne s'est pas trompé dans l'écriture de la formule. On procède par récurrence sur l'ordre p :

— Si $p = 0$, et que f est une fonction de classe C^1 sur I , on a bien sûr :

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt,$$

et le théorème est donc vrai dans le cas $p = 0$.

— Admettons le résultat pour un certain entier $p \in \mathbb{N}$, et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{p+2} . Appliquant l'hypothèse de récurrence au rang p à f , il vient :

$$f(x) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt; \quad (8.2)$$

f étant de classe C^{p+2} sur I , on peut effectuer une intégration par parties sur le reste intégral de la formule précédente, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt &= \left[-\frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(t) \right]_{x_0}^x + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+2)}(t) dt, \\ &= \frac{(x-x_0)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+2)}(t) dt. \end{aligned} \quad (8.3)$$

La combinaison de (8.2) et (8.3) montre que l'hypothèse de récurrence est vraie au rang $p+1$.

Le résultat suivant est une généralisation de la formule de Taylor avec reste intégral au cas d'une fonction de plusieurs variables.

Théorème 3

Soit $d \geq 1$ un entier et soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{p+1} sur U pour un entier $p \geq 1$. Soit x et y deux points de U tels que le segment $[x, y]$ est inclus dans U . Alors on a :

$$f(y) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq p \\ |\alpha|=k}} \frac{k!}{\alpha!} \partial^\alpha f(x)(y-x)^\alpha + (p+1) \sum_{|\alpha|=p+1} \frac{1}{\alpha!} (y-x)^\alpha \int_0^1 (1-t)^p \partial^\alpha f(x+t(y-x)) dt.$$

Démonstration [Esquisse de preuve] L'idée consiste à appliquer la formule de Taylor avec reste intégral 'usuelle' (cf. Théorème 2) à la fonction $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(t) = f(x + t(y - x)),$$

qui est bien définie et de classe C^{p+1} sur $[0, 1]$ puisque $[x, y]$ est inclus dans U et d'après le Théorème 1 de différentiation des applications composées. On observe que :

$$\varphi(0) = f(x) \text{ et } \varphi(1) = f(y).$$

De plus, par le Théorème 1 (et plus précisément le Corollaire 1), la dérivée de φ vaut :

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + t(y - x))(y_i - x_i).$$

De là, une récurrence facile (mais un peu fastidieuse à écrire) montre que pour tout $1 \leq k \leq p + 1$, la fonction φ est de classe C^k sur $[0, 1]$, avec :

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x + t(y - x))(y - x)^\alpha.$$

Le résultat est alors conséquence de la formule de Taylor avec reste intégral du Théorème 2 appliqué à la fonction φ .

8.3.2 La formule de Taylor-Young

La formule de Taylor-Young est valable sous de hypothèses un peu moins fortes que la formule de Taylor avec reste intégral; en contrepartie, on dispose de moins d'information quant à la forme du reste.

Théorème 4

Soit $d \geq 1$ un entier et soit U un ouvert de \mathbb{R}^d . Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^p sur U , et soit $x \in U$. Alors :

$$f(x + h) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq p \\ |\alpha|=k}} \frac{k!}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x) h^\alpha + o(\|h\|^p),$$

où la notation $o(\|h\|^p)$ désigne une fonction telle que :

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{o(\|h\|^p)}{\|h\|^p} = 0.$$

On qualifie souvent cette formule de 'locale', puisque la chose que l'on sait du reste est qu'il décroît vers 0 plus vite que $\|h\|^p$ lorsque $\|h\| \rightarrow 0$ (et donc que l'on se rapproche du point x où est écrite la formule).

8.3.3 Application : interprétation du gradient

La formule de Taylor-Young du Théorème 4 permet de donner une interprétation physique du gradient d'une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^d$. En effet, appliquant cette formule avec $p = 1$, il vient, pour $x \in U$ et $h \in \mathbb{R}^d$ assez 'petit', si l'on omet le 'reste' :

$$\begin{aligned} f(x+h) &\approx f(x) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_d}(x)h_d, \\ &\approx f(x) + \nabla f(x) \cdot h. \end{aligned}$$

Ainsi, si l'on souhaite maximiser la fonction f autour de x , i.e. si l'on cherche h 'petit' maximisant la quantité

$$f(x) + \nabla f(x) \cdot h,$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz garantit que la meilleure direction est de la forme $h = \alpha \nabla f(x)$ pour un coefficient $\alpha > 0$. En d'autres termes,

Le gradient $\nabla f(x)$ de f en x pointe dans la direction de plus forte croissance de f au voisinage de x .

Ce principe est à la base de nombreux algorithmes d'optimisation, et en particulier de l'algorithme de gradient.

8.4 La formule de Green et ses variantes

La formule de Green est une généralisation de la formule d'intégration par parties au cas de fonctions de plusieurs variables. Avant d'entrer dans le vif du sujet, il convient d'introduire quelques notations.

8.4.1 Un doigt de géométrie : domaines réguliers

La généralisation de la notion d'intervalle (ouvert) à la dimension multiple est donnée par les *ouverts réguliers* (disons de classe C^1) de \mathbb{R}^d .

La définition précise de ces entités est quelque peu technique, et emprunte à la théorie mathématique des *variétés différentiables*. Ici, on se limitera à une définition 'intuitive', selon laquelle un ouvert régulier de classe C^1 de \mathbb{R}^d est un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ dont la frontière est :

- Une courbe de classe C^1 (ou une réunion de telles courbes) dans le cas de la dimension $d = 2$;
- Une surface de classe C^1 (ou une réunion de telles surfaces) dans le cas de la dimension $d = 3$.

On demande en outre que Ω se trouve d'un seul côté de sa frontière $\partial\Omega$; ainsi, les ouverts 'fissurés' ne sont pas des ouverts de classe C^1 au sens ci-dessus. On trouvera quelques exemples et contre-exemples d'ouverts de classe C^1 sur la Figure 8.1.

Lorsque l'on considère un ouvert Ω de classe C^1 , une quantité intéressante est le *vecteur normal* n à Ω . Il s'agit d'un champ de vecteurs $n : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ défini et continu sur le bord de Ω qui jouit des propriétés suivantes : pour tout point $x \in \partial\Omega$, $n(x)$ est proportionnel à la direction 'orthogonale' à la partie du bord $\partial\Omega$ située près de x ; il pointe vers l'extérieur de Ω et est de norme unité, i.e. $|n(x)| = 1$ pour tout $x \in \partial\Omega$ (voir la Figure 8.1, droite).

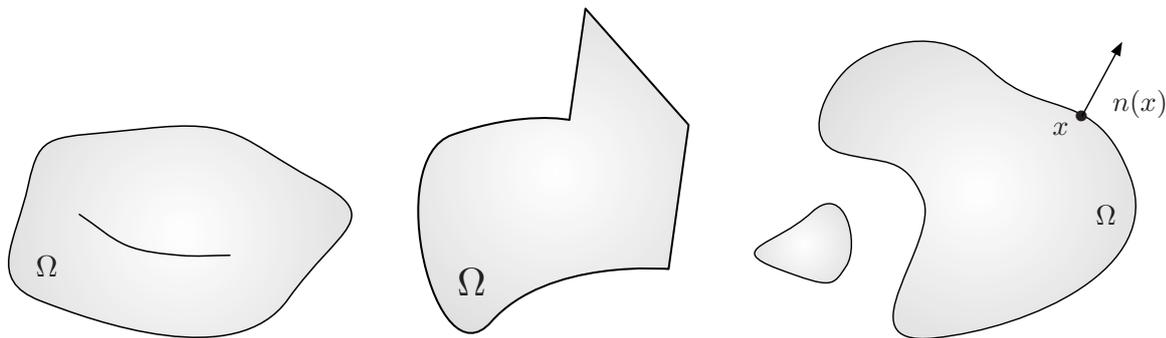


FIGURE 8.1 – La figure de gauche ne décrit pas un domaine régulier, car Ω ne se situe pas d'un seul côté de sa frontière (en raison de l'existence de la fissure); la figure au centre ne représente pas non plus un domaine régulier car sa frontière est une courbe présentant des point anguleux (on dit qu'un tel ouvert est un ouvert Lipschitz). Enfin, la figure de droite représente un domaine de classe C^1 (qui a plusieurs composantes connexes).

Il est enfin possible de définir une notion d'intégration sur le bord d'un domaine régulier Ω (ou bien, plus généralement sur une hypersurface régulière $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d$). La construction de la mesure de surface qui permet ceci est là-encore assez technique. On pourra en trouver les détails dans l'ouvrage [3], par exemple.

Dans la pratique, il convient de savoir que la mesure de surface, notée ds , permet de généraliser en toute dimension

- La notion de longueur $\ell(\sigma)$ d'une courbe $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ en deux dimensions, qui s'écrit alors :

$$\ell(\sigma) = \int_{\sigma} ds;$$

- La notion d'aire $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ d'une surface $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} ds.$$

8.4.2 Formule de Green

Théorème 5

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné, régulier de classe C^1 , et soit $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Alors on a, pour $i = 1, \dots, d$:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} f n_i ds.$$

Remarque 1

- Rigoureusement, l'hypothèse selon laquelle $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ est classe C^1 signifie que f est de classe C^1 sur un ouvert U contenant le compact $\overline{\Omega}$.

- Cette formule est en réalité valable sous des hypothèses plus faibles que celles du Théorème 5. En particulier, il est possible de supposer le bord $\partial\Omega$ seulement Lipschitz (auquel cas le vecteur normal n existe seulement presque partout sur $\partial\Omega$).

Cette formule admet nombre de variantes, qui s'en déduisent facilement. Mentionnons :

- Si $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une fonction de classe C^1 , on a :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(f) \, dx = \int_{\partial\Omega} f \cdot n \, ds. \quad (8.4)$$

D'un point de vue physique, cette formule exprime que le flux sortant du champ de vecteurs f à travers la paroi $\partial\Omega$ est relié aux propriétés de concentration ou de dispersion de ce champ de vecteurs. Le lecteur aura sans doute déjà rencontré cette formule en physique (par exemple, en thermique ou en électrostatique) sous le nom de *formule de Green-Ostrogradski*.

- Si $f, g : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions différentiables, alors on a, pour $i = 1, \dots, d$:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} g \, dx = \int_{\partial\Omega} f g n_i \, ds - \int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_i} \, dx.$$

Sous cette forme, la formule de Green apparaît bien comme la généralisation multi-dimensionnelle de la formule d'intégration par parties sur un intervalle de \mathbb{R} .

8.4.3 Un exemple en thermique

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , rempli d'un matériau conduisant la chaleur, dont on note γ la conductivité thermique, et qui se trouve isolé du milieu extérieur. Soit $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ le champ de température dans Ω . On cherche à caractériser u au moyen d'équations reliant ses dérivées partielles (en supposant que u est suffisamment régulière afin que les développements suivants soient légitimes).

La *loi de Fourier* donne le flux de chaleur $j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ au sein de Ω en fonction de la température u et de la conductivité γ :

$$j(x) = -\gamma \nabla u(x), \quad x \in \Omega;$$

ainsi le flux de chaleur pointe depuis les fortes valeurs de u (le 'chaud') en direction de ses faibles valeurs (le 'froid'). Par définition, la quantité d'énergie traversant une surface \mathcal{S} , orientée par la vecteur normal n est :

$$\mathcal{E}(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} j(x) \cdot n(x) \, ds.$$

Conformément à l'intuition, on vérifie que lorsque le flux de chaleur est tangent à \mathcal{S} (traduisant une convection de la chaleur parallèlement à \mathcal{S}), cette énergie est nulle.

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la source de chaleur dans le milieu ; la quantité d'énergie produite dans un volume $\omega \subset \Omega$ arbitraire s'écrit :

$$\int_{\omega} f(x) \, dx.$$

Supposons à présent que le système est à l'équilibre. Alors, pour tout volume $\omega \subset \Omega$, la quantité d'énergie produite dans ω coïncide avec la quantité d'énergie qui s'en échappe, i.e. :

$$\int_{\omega} f(x) \, dx = \int_{\partial\omega} j(x) \cdot n(x) \, ds = -\gamma \int_{\partial\omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) \, ds.$$

Utilisant la formule de Green dans sa version (8.4), on obtient :

$$\int_{\omega} f(x) dx = -\gamma \int_{\omega} \Delta u(x) dx,$$

où le Laplacien de u est défini comme $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$. Puisque cette relation est vraie quelle que soit le volume $\omega \subset \Omega$ considéré, il vient :

$$-\gamma \Delta u = f \text{ dans } \Omega.$$

Enfin, l'hypothèse selon laquelle le milieu Ω est isolé de l'extérieur implique que la quantité d'énergie $-\gamma \int_V \frac{\partial u}{\partial n} ds$ traversant toute portion $V \subset \partial\Omega$ est nulle. Ainsi :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

En fin de compte, on a montré que u satisfait l'équation de Poisson avec conditions de Neumann au bord :

$$\begin{cases} -\gamma \Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Bibliographie

- [1] C. Gasquet et P. Witomski, "Analyse de Fourier et Applications", Editions Masson.
- [2] S. BENZONI-GAVAGE, *Calcul différentiel et équations différentielles : Cours et exercices corrigés*, Dunod, (2010).
- [3] J.-M. BONY, *Cours d'analyse, théorie des distributions et analyse de Fourier*, Éditions de l'École Polytechnique, (2001).