QUELQUES ÉLÉMENTS CONCERNANT LA TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE

Contents

1. Motivations

L'une des applications légitimant les aspects théoriques de ce cours est l'étude de *signaux*, – on entendra par là des fonctions réelles dépendant du temps, représentant par exemple une intensité sonore ou lumineuse.

Dans les faits, un signal apparaît bien souvent sous forme *analogique* (i.e. continue) : on le modélise par une fonction $f(t)$ dépendant du temps $t \in \mathbb{R}$. Malheureusement, en pratique, il est impossible de capter ou de stocker ce signal sous cette forme, qui recèle une "quantité infinie d'information".

Ainsi, on s'intéresse souvent à la version échantillonnée de ce signal, qui est la distribution

$$f_{\text{disc}} = a \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na)\delta_{na},$$

où $a > 0$ est la pas d'échantillonnage. Mathématiquement, f_{disc} est obtenue à partir de $f(t)$ en faisant l'approximation

$$f(t) \quad\approx\quad \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na)\mathbb{1}_{\left]\left(n-\frac{1}{2}\right)a,\left(n+\frac{1}{2}\right)a\right[}(t)}_{\substack{\text{fonction prenant la valeur } f(na) \\ \text{sur l'intervalle } \left]\left(n-\frac{1}{2}\right)a,\left(n+\frac{1}{2}\right)a\right[}} \quad\approx\quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na) \underbrace{a\delta_{na}}_{\substack{\text{approximation de la fonction} \\ \text{caractéristique } \mathbb{1}_{\left]\left(n-\frac{1}{2}\right)a,\left(n+\frac{1}{2}\right)a\right[}}} .$$

La transformée de Fourier de cette distribution (correspondant au spectre du signal échantillonné) est

$$\widehat{f_{\text{disc}}}(\xi) = a \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na)e^{-2i\pi na\xi};$$

celle-ci est appelée *transformée de Fourier en temps discret* (Discrete Time Fourier Transform, ou DTFT en anglais).

Cette dernière fonction est encore difficile à manipuler, puisqu'elle met en jeu un nombre infini d'échantillons du signal $f(t)$, et présente une résolution continue en fréquence. Pour pallier ces difficultés, on introduit un nouvel outil, la *transformée de Fourier discrète* (Discrete Fourier Transform, ou DFT en anglais), qui consiste à considérer la version échantillonnée - tronquée du signal $f(t)$:

$$f_{\text{disc,t}} := a \sum_{n=0}^{N-1} f(na)\delta_{na},$$

où seules N valeurs du signal sont présentes (les valeurs $f(na)$, pour $n = 0, \ldots, N-1$). On considère alors la transformée de Fourier de cette dernière fonction :

$$\widehat{f_{\text{disc,t}}}(\xi) = a \sum_{n=0}^{N-1} f(na)e^{-2i\pi na\xi},$$

qui sera elle-même échantillonnée en N valeurs de la fréquence $\xi_k = \frac{k}{Na}$, $k = 0, \ldots, N-1$.

La transformée de Fourier discrète opère donc sur un vecteur de taille N (correspondant aux N échantillons $f(na)$, $n = 0, \ldots, N-1$ d'un signal analogique $f(t)$), et renvoie un vecteur de taille N correspondant aux N valeurs approximatives $\widehat{f_{\text{disc},t}}(\frac{k}{Na})$, $k = 0, \ldots, N-1$ du spectre de f.

La transformée de Fourier discrète est un outil précieux sur le plan pratique, car son action sur un vecteur de taille N peut être calculée très rapidement (avec une complexité en $\mathcal{O}(N \log N)$), par l'algorithme de la transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform, ou FFT en anglais).

Notons que l'on s'est bien gardé de préciser en quel sens les coefficients calculés par le transformée de Fourier discrète constituent une “bonne” approximation du spectre de f. Cette question est en effet délicate, et son traitement rigoureux depasse le cadre de ce cours.

2. Suites discrètes et convolution circulaire

Soit $h = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ deux suites discrètes. La convolution de h et x est la suite discrète donnée par la formule :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad (h * x)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k x_{n-k}. \tag{1}$$

Cette définition est formelle car il n'est pas toujours garanti que la somme ci-dessus soit bien définie. À titre d'exemple, c'est le cas dans les deux contextes suivants :

- La suite h est à support compact, i.e. seul un nombre fini de h_k, $k \in \mathbb{Z}$ sont non nuls.
- Les deux suites h et x sont à support limité à gauche, i.e. il existe un entier $M \in \mathbb{Z}$ tel que :

  $$\forall n \leqslant M, \;\; h_n = x_n = 0.$$

  Ce dernier cadre est particulièrement judicieux lorsque h et x représentent des signaux temporels, qui commencent au temps $t = 0$ (et donc $h_n = x_n = 0$ pour $n < 0$).

Soit maintenant x une suite discrète de taille finie N, à valeurs complexes. Dans toute cette présentation, on considérera de manière équivalente x comme le vecteur $x = (x_0, \ldots, x_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ de ses valeurs, ou bien comme la suite discrète infinie $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ obtenue en périodisant le vecteur $(x_0, \ldots, x_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ à la période N, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad x_n = x_{n \bmod N}.$$

Définition 1. *Soit $h, x \in \mathbb{C}^N$ deux suites de tailles N (ou, de manière équivalente, deux suites de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, périodiques de période N). La convolution circulaire $h \circledast x$ de h et x est la suite de taille N définie par :*

$$\forall n = 0, \ldots, N-1, \quad (h \circledast x)_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k x_{n-k \bmod N}.$$

Une première propriété élémentaire de la convolution circulaire est sa commutativité :

Lemme 1. *Soit $h, x \in \mathbb{C}^N$ deux suites de tailles N, alors on a :*

$$h \circledast x = x \circledast h.$$

Démonstration. Soit $n = 0, \ldots, N-1$; on décompose la somme figurant dans la définition de la convolution circulaire de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
(h \circledast x)_n &= \sum_{k=0}^{n} h_k x_{n-k} + \sum_{k=n+1}^{N-1} h_k x_{n-k \bmod N} \\
&= \sum_{k=0}^{n} h_k x_{n-k} + \sum_{k=n+1}^{N-1} h_k x_{n-k+N} \\
&= \sum_{p=0}^{n} h_{n-p} x_p + \sum_{p=n+1}^{N-1} h_{n-p+N} x_p,
\end{aligned}$$

où l'on a effectué le changement de variables $p = n - k$ dans la première somme au second membre ci-dessus (p varie donc de 0 à n) et le changement de variables $p = n - k + N$ dans la seconde somme (p varie alors de $n+1$ à $N-1$). On a donc :

$$(h \circledast x)_n = \sum_{p=0}^{N-1} h_{n-p \bmod N} x_p = (x \circledast h)_n,$$

ce qui est le résultat attendu. $\square$

La convolution circulaire peut être vue comme un cas particulier de la convolution (1) de deux suites infinies, comme le précise la proposition suivante :

Proposition 2. *Soit $x \in \mathbb{C}^N$ une suite de taille N (ou, de manière équivalente, une suite infinie, périodique de période N), et soit $h = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ une suite sommable, i.e.*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |h_n| < \infty.$$

Alors la convolution $h * x$ est bien définie ; c'est une suite périodique de période N, et on a

$$h * x = h_N \circledast x, \tag{2}$$

où $h_N \in \mathbb{C}^N$ est la suite périodique de période N définie comme la périodisation de h :

$$\forall n = 0, \ldots, N-1, \quad h_{N,n} = \sum_{p\in\mathbb{Z}} h_{n+pN}.$$

Démonstration. Tout d'abord, on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |h_k||x_{n-k}| \leqslant \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |h_n|\right)\left(\sup_{n=0,\ldots,N-1} |x_n|\right) < \infty,$$

si bien que la somme (1) définissant la convolution $(h * x)_n$ converge, et le produit de convolution $h * x$ est donc bien défini. Par la définition

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad (h * x)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k x_{n-k}$$

il est évident que $h * x$ est périodique de période N.

Vérifions enfin la formule (2) ; on écrit à cet effet :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (h * x)_n &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_{n-k} x_k \\ &= \sum_{q\in\mathbb{Z}} \sum_{p=0}^{N-1} h_{n-p-qN} x_{p+qN} \end{aligned}$$

où l'on a décomposé l'indice $k \in \mathbb{Z}$ de la somme au second membre suivant son reste dans la division Euclidienne par N, i.e. en l'écrivant $k = p + qN$, où le reste p prend les valeurs $0, \ldots N-1$, et le quotient q parcourt $\mathbb{Z}$. Utilisant maintenant la périodicité de x, on peut ré-arranger cette double somme comme :

$$(h * x)_n = \sum_{q\in\mathbb{Z}} \sum_{p=0}^{N-1} h_{n-p-qN} x_p = \sum_{p=0}^{N-1} x_p \left(\sum_{q\in\mathbb{Z}} h_{(n-p)+qN}\right),$$

soit, par définition de la suite h_N et de la convolution circulaire :

$$(h * x)_n = (h_N \circledast x)_n,$$

ce qui est la formule attendue. $\square$

3. La transformée de Fourier discrète

Commençons par donner la définition de la transformée de Fourier discrète d'un vecteur $x \in \mathbb{C}^N$.

Définition 2. *Soit $x = (x_0, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ une suite finie de taille N. La transformée de Fourier discrète de x est la suite finie de taille N $\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ définie par*

$$\forall k = 0, \dots, N-1, \quad \widehat{x}_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2i\pi \frac{nk}{N}}. \tag{3}$$

Une première propriété remarquable de cette opération est le résultat d'inversion suivant, qui est très semblable au théorème d'inversion de la transformée de Fourier des distributions tempérées.

Proposition 3. *(Inversion de la transformée de Fourier discrète) L'application $\mathbb{C}^N \ni x \mapsto \widehat{x} \in \mathbb{C}^N$ induite par la transformée de Fourier discrète est un isomorphisme. L'application réciproque s'écrit :*

$$\forall n = 0, \dots, N-1, \quad x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{x}_k e^{2i\pi \frac{nk}{N}}. \tag{4}$$

Démonstration. L'application $x \mapsto \widehat{x}$ est clairement une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^N$ (de dimension finie) dans lui-même. Ainsi, pour prouver le résultat, il suffit de montrer que la formule (4) réalise un inverse à gauche de la transformée de Fourier discrète donnée par (3). Plus précisément, il s'agit de montrer que :

$$\forall n = 0, \dots, N-1, \quad x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{p=0}^{N-1} x_p e^{-2i\pi \frac{pk}{N}} \right) e^{2i\pi \frac{nk}{N}}. \tag{5}$$

Pour ce faire, on calcule :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{p=0}^{N-1} x_p e^{-2i\pi \frac{pk}{N}} \right) e^{2i\pi \frac{nk}{N}} &= \sum_{p=0}^{N-1} x_p \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi \frac{(n-p)k}{N}} \right) \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} x_p \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{2i\pi \frac{(n-p)}{N}} \right)^k \right). \end{aligned}$$

On remarque à présent que la somme interne dans le second membre ci-dessus s'écrit comme

$$\sum_{n=0}^{N-1} \omega^n, \text{ où } \omega \text{ est une racine } N\text{-ème de l'unité.}$$

En particulier, on a :

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{2i\pi \frac{(n-p)}{N}} \right)^k = \begin{cases} N & \text{si } n = p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{p=0}^{N-1} x_p e^{-2i\pi \frac{pk}{N}} \right) e^{2i\pi \frac{nk}{N}} = N x_n,$$

ce qui prouve le résultat attendu (5), et achève la démonstration. □

La proposition suivante est l'analogue discret de la relation bien connue entre transformée de Fourier d'un produit de convolution de deux distributions et le produit des deux transformées de Fourier.

Proposition 4. *Soit $h, x \in \mathbb{C}^N$ deux suites de taille N ; alors :*

(i) La suite de taille N $z := h \circledast x$ a pour transformée de Fourier discrète

$$\forall k = 0, \dots, N-1, \quad \widehat{z}_k = \widehat{h}_k \widehat{x}_k.$$

(ii) La suite de taille N $p_n := h_n x_n$ a pour transformée de Fourier discrète

$$\forall k = 0, \dots, N-1, \quad \widehat{p}_k = (\widehat{h} \circledast \widehat{x})_k.$$

Proof. La propriété (ii) se déduit immédiatement de (i) en utilisant la transformée de Fourier inverse, et on se concentre sur la preuve de (i).

Par définition, on a :

$$\forall n = 0, \ldots, N-1, \quad z_n = \sum_{p=0}^{N-1} h_p x_{n-p},$$

où tous les indices sont implictement compris modulo N dans ce qui suit pour simplifier les écritures. Ainsi, la transformée de Fourier $\widehat{z}_k$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall k = 0, \ldots, N-1, \quad \widehat{z}_k &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} h_p x_{n-p} e^{-2i\pi \frac{nk}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} h_p e^{-2i\pi \frac{pk}{N}} x_{n-p} e^{-2i\pi \frac{(n-p)k}{N}} \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} h_p e^{-2i\pi \frac{pk}{N}} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x_{n-p} e^{-2i\pi \frac{(n-p)k}{N}} \right). \end{aligned} \tag{6}$$

Or, pour $p \in \{0, \ldots, N-1\}$ fixé, le changement d'indice $\ell = n - p$ dans la somme interne au second membre ci-dessus donne :

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_{n-p} e^{-2i\pi \frac{(n-p)k}{N}} = \sum_{\ell=-p}^{N-1-p} x_\ell e^{-2i\pi \frac{\ell k}{N}}.$$

Puisque la suite $\left\{ x_\ell e^{-2i\pi \frac{\ell k}{N}} \right\}_{\ell \in \mathbb{Z}}$ est périodique de période N, toutes les sommes de N termes consécutifs de cette suite sont égales, et donc :

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_{n-p} e^{-2i\pi \frac{(n-p)k}{N}} = \sum_{\ell=0}^{N-1} x_\ell e^{-2i\pi \frac{\ell k}{N}}.$$

Revenant à (6), on a alors :

$$\begin{aligned} \forall k = 0, \ldots, N-1, \quad \widehat{z}_k &= \sum_{p=0}^{N-1} h_p e^{-2i\pi \frac{pk}{N}} \left(\sum_{\ell=0}^{N-1} x_\ell e^{-2i\pi \frac{\ell k}{N}} \right) \\ &= \left(\sum_{p=0}^{N-1} h_p e^{-2i\pi \frac{pk}{N}} \right) \left(\sum_{\ell=0}^{N-1} x_\ell e^{-2i\pi \frac{\ell k}{N}} \right) \\ &= \widehat{h}_k \widehat{x}_k, \end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu. □

Donnons une dernière propriété fondamentale de la transformée de Fourier discrète, qui est un analogue discret de la formule de Parseval.

Proposition 5 (Formule de Parseval)**.** *Soit $x, y \in \mathbb{C}^N$ deux suites de taille N ; alors :*

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_n \overline{y_n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{x_k} \overline{\widehat{y_k}}. \tag{7}$$

Démonstration. Introduisant la définition (3) de la transformée de Fourier discrète dans la relation (7) à prouver, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{x_k} \overline{\widehat{y_k}} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} x_p \overline{y_q} e^{-2i\pi \frac{(p-q)k}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} x_p \overline{y_q} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{-2i\pi \frac{(p-q)}{N}} \right)^k \right). \end{aligned} \tag{8}$$

Comme dans la démonstration de la Proposition 3, on remarque que la somme interne au second membre ci-dessus met en jeu la somme des puissances d'une racine N-ème de l'unité ; ainsi :

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{-2i\pi \frac{(p-q)}{N}}\right)^k = \begin{cases} N & \text{si } p = q \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, seuls les termes correspondant aux indices $p = q$ sont possiblement non nuls dans la somme au second membre de (8). Il en résulte que :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{x_k}\overline{\widehat{y_k}} = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} (x_p \overline{y_p} N),$$

ce qui termine la preuve. $\square$