CORRECTION DU TD 7 : LA FORMULE DE POISSON ET LE THÉORÈME DE SHANNON

Contents

1. Exercice 1: La formule de Poisson dans $L^1(\mathbb{R})$

Ce premier exercice concerne la formule de Poisson, dont on commence par rappeler les hypothèses et l'énoncé. Cette formule s'écrit formellement :

$$a\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x-na) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{n}{a}\right) e^{2i\pi n\frac{x}{a}}. \tag{1}$$

Elle admet deux cadres d'utilisation un peu différents :

- *Cas 1:* $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ est une distribution à support compact. Alors, le terme de gauche de (1) est à comprendre comme la convolution
$$a\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x-na) = a\sum_{n\in\mathbb{Z}} \tau_{na} f = a\Delta_a * f,$$
où
$$\Delta_a = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{na} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$
est le *peigne de Dirac*. Ce terme de gauche est une distribution tempérée, puisqu'il s'agit de la convolution entre la distribution $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et la distribution tempérée $\Delta_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

  Le terme de droite dans (1) est également bien défini comme une distribution tempérée. En effet, par le cours, la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de la distribution f à support compact est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à croissance lente. Ainsi, la suite $\left\{\widehat{f}\left(\frac{n}{a}\right)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est à croissance lente, et le cours garantit que la somme considérée est une distribution tempérée.
- *Cas 2:* f est une fonction de $L^1(\mathbb{R})$. On peut montrer que le terme de gauche définit une fonction sur $\mathbb{R}$, périodique de période a, qui est intégrable sur une période :
$$\left|\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x-na)\right|\right|_{L^1(0,a)} \leq ||f||_{L^1(\mathbb{R})}.$$
En particulier, ce terme de gauche définit une distribution périodique, et donc une distribution tempérée, par le cours.

  Le terme de droite dans (1) est également une distribution tempérée, puisque la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de la fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$ (en réalité, on sait même qu'elle tend vers 0 en $\pm\infty$), de sorte que la suite $\left\{\widehat{f}(\frac{n}{a})\right\}$ est à croissance lente.

Dans ce second cadre, la formule de Poisson peut être comprise de la manière suivante : la distribution tempérée $a \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x-na)$ est une version périodisée de f à la période a (au facteur multiplicatif a près). Le terme de droite dans (1) est alors la décomposition de cette version périodisée en série de Fourier.

Une autre interprétation intéressante de la formule de Poisson est obtenue lorsqu'on l'applique à $f = \widehat{g}$, la transformée de Fourier d'un signal $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sous réserve que $\widehat{g}$ rentre dans l'un des deux cas ci-dessus, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{g}\left(\xi - \frac{n}{a}\right) = a \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(na) e^{-2i\pi na\xi}. \tag{2}$$

Cette formule est souvent appelée *formule de Poisson duale.* Le terme de droite est la transformée de Fourier du signal g échantillonné avec le pas a:

$$\mathcal{F}\left(a \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(na)\delta_{na}\right)(\xi) = a \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(na) e^{-2i\pi na\xi}.$$

Le terme de gauche est la périodisation de la transformée de Fourier de g, avec la période $\frac{1}{a}$. Ainsi,

La transformée de Fourier d'un signal analogique g qui a été échantillonné avec le pas a est la périodisation à la période $\frac{1}{a}$ de la transformée de Fourier de g.

Cette remarque fondamentale est le point de départ du théorème de Shannon, comme on le verra au cours du TD 5.

Enoncé: Soit $b > 0$ fixé ; on considère la série de fonctions

$$F(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2+b^2} e^{2i\pi nt}.$$

(i) Montrer que la fonction F ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}$.
(ii) Montrer que $\frac{1}{n^2+b^2}$ correspond à l'échantillonnage de la transformée de Fourier d'une fonction f que l'on déterminera.
(iii) Appliquer la formule de Poisson pour obtenir une autre expression de F.
(iv) Calculer alors la fonction F explicitement.

(i): La série de fonctions $F(t)$ s'écrit

$$F(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n(t), \text{ où } g_n(t) := \frac{1}{n^2+b^2} e^{2i\pi nt}.$$

Puisque chaque fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}$ et que la suite de fonctions g_n est bornée uniformément par

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall t \in \mathbb{R},\ |g_n(t)| \le \frac{1}{n^2+b^2},$$

il s'ensuit que la série de fonctions $F(t)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, et que sa limite $F(t)$ est continue.

(ii): Commençons par analyser formellement la question. On cherche une fonction f de sorte que la suite $\frac{1}{n^2+b^2}$ corresponde à l'échantillonnage de la transformée de Fourier $\widehat{f}$ aux points $\xi = n$, $n \in \mathbb{Z}$. En d'autres termes, on cherche une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \widehat{f}(n) = \frac{1}{n^2+b^2}.$$

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant cette relation (elle n'est pas unique !) est la fonction caractérisée par la transformée de Fourier suivante :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\xi^2+b^2}.$$

Par inversion de Fourier, cette fonction est donnée par la formule :

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\xi^2+b^2}\right)(x).$$

Ainsi, pour répondre à la question, nous allons calculer la transformée de Fourier inverse $f(x)$ de la fonction $\widehat{f} : \xi \mapsto \frac{1}{\xi^2+b^2}$. Notons pour commencer que puisque la fonction $\xi \mapsto \frac{1}{\xi^2+b^2}$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier inverse f est une fonction continue, bornée sur $\mathbb{R}$, qui tend vers 0 lorsque $x \to \pm\infty$ (au besoin, voir les rappels de la feuille de TD 3). Pour calculer explicitement l'expression de f, on va utiliser une stratégie déjà vue lors du TD 3, consistant à relier f à ses dérivées au moyen d'une équation différentielle. On procède en plusieurs étapes.

Etape 1 : On trouve une équation différentielle ordinaire satisfaite par f. Pour ce faire, on utilise la relation suivante, valable pour toute distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathcal{F}^{-1}T\right) = \mathcal{F}^{-1}((2i\pi\xi)T).$$

On a donc la suite d'égalités suivante, où toutes les dérivées sont à comprendre au sens des distributions :

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{(2i\pi\xi)^2}{\xi^2+b^2}\right)(x)\\
&= -4\pi^2\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\xi^2}{\xi^2+b^2}\right)(x)\\
&= -4\pi^2\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\xi^2+b^2}{\xi^2+b^2}\right) + 4\pi^2 b^2\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\xi^2+b^2}\right)\\
&= -4\pi^2\mathcal{F}^{-1}(1) + 4\pi^2 b^2 f(x)\\
&= -4\pi^2\delta_0 + 4\pi^2 b^2 f(x),
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $\mathcal{F}\delta_0 = 1$ pour obtenir la dernière ligne. Ainsi, f est une fonction continue, bornée, qui tend vers 0 en $\pm\infty$, et qui satisfait l'équation différentielle suivante au sens des distributions :

$$f''(x) - 4\pi^2 b^2 f(x) = -4\pi^2\delta_0. \tag{3}$$

Etape 2 : On résout cette équation différentielle dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Malheureusement, la théorie classique des équations différentielles ordinaires ne s'applique pas ici, car le second membre de (3) est une distribution. Observons néanmoins que lorsque l'on restreint cette équation à $\mathcal{D}'(0,+\infty)$ (ou bien $\mathcal{D}'(-\infty,0)$) – c'est-à-dire lorsqu'on n'applique cette identité qu'à des fonctions test à support compact dans $(0,\infty)$ – on trouve :

$$f''(x) - 4\pi^2 b^2 f(x) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(0,+\infty), \tag{4}$$

puisque une fonction test φ à support dans $(0,\infty)$ est nulle en 0.

Etape 3 : On est ramenés à résoudre l'équation différentielle ordinaire "classique" (4) au sens des distributions de $\mathcal{D}'(0,+\infty)$ (ou $\mathcal{D}'(-\infty,0)$). Encore une fois, on aimerait pouvoir dire que les seules solutions de cette équation différentielle ordinaire *au sens des distributions* sont les fonctions Il se trouve que c'est vrai, mais il faut le prouver ! On adapte pour cela la preuve de la résolution de l'équation (4) au sens des fonctions.

Si T est une distribution de $\mathcal{D}'(0,\infty)$ satisfaisant cette équation, on obtient, en posant $U = T' \in \mathcal{D}'(0,\infty)$, que le couple $X = (T,U)$ est solution dans $\mathcal{D}'(0,\infty)^2$ du système d'équations d'ordre un suivant :

$$\begin{pmatrix} T \\ U \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4\pi^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ U \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Soit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ la matrice du système :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4\pi^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont $-2\pi b$ et $2\pi b$, si bien qu'il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ telle que:

$$A = P\begin{pmatrix} -2\pi b & 0 \\ 0 & 2\pi b \end{pmatrix}P^{-1}, \text{ et donc, pour tout } t \in \mathbb{R}, \quad e^{tA} = P\begin{pmatrix} e^{-2\pi bt} & 0 \\ 0 & e^{2\pi bt} \end{pmatrix}P^{-1}. \tag{6}$$

On multiplie les deux membres de l'égalité (5) par e^{tA} (qui est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty(0,\infty)$, à valeurs matricielles), et on reconnaît la formule de la dérivée d'un produit, ce qui donne :

$$\left(e^{-tA}\begin{pmatrix} T \\ U \end{pmatrix}\right)' = 0,$$

Puisque les seules distributions de $\mathcal{D}'(0,\infty)$ dont la dérivée est nulle sont les *fonctions* constantes sur $\mathbb{R}$, il existe alors deux constantes $c, d \in \mathbb{R}$ telles que

$$e^{-tA}\begin{pmatrix} T \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

En particulier, en utilisant l'expression (6) (dans laquelle les coefficients de la matrice de passage P sont des constantes réelles), on voit qu'il existe deux constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ telles que

$$T = c_1 e^{-2\pi bt} + c_2 e^{2\pi bt}.$$

Un raisonnement analogue permet de voir que les solutions de (4) dans $\mathcal{D}'(-\infty,0)$ sont exactement de la même forme.

Etape 4 : On termine le calcul de f. On sait que f est une fonction continue qui tend vers 0 en l'infini. On vient de voir qu'il existe quatre constantes réelles c_1, d_1, c_2, d_2 telles que les restriction de f àux intervalles $(-\infty,0)$ et $(0,\infty)$ s'écrivent :

$$f|_{(-\infty,0)}(x) = c_1 e^{-2\pi bx} + d_1 e^{2\pi bx} \text{ et } f|_{(0,\infty)} = c_2 e^{-2\pi bx} + D_2 e^{2\pi bx}.$$

Puisque f tend vers 0 lorsque $x \to \pm\infty$, on a nécessairement $c_1 = d_2 = 0$. De plus, par continuité de f en 0, on a $d_1 = c_2$. Ainsi, on a :

$$f(x) = \beta e^{-2i\pi b|x|},$$

pour une constante $\beta \in \mathbb{R}$ à déterminer.

Pour identifier cette dernière constante, on injecte cette expression de f dans l'équation différentielle ordinaire (3) satisfaite par f sur $\mathbb{R}$. Ceci implique le calcul des dérivées première et seconde de f au sens des distributions de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, et on utilise la formule des sauts à cet effet. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et continue, on a immédiatement :

$$f' = 2\pi b\beta e^{2\pi bt}\mathbb{1}_{(-\infty,0)} - 2\pi b\beta e^{-2\pi bt}\mathbb{1}_{(0,\infty)}.$$

Cette dérivée première est encore de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, continue sur $(-\infty,0)$ et $(0,\infty)$, et elle présente un saut d'amplitude $-4\pi b\beta$ en 0, si bien que :

$$\begin{aligned} f' &= 4\pi^2 b^2 \beta e^{2\pi bt}\mathbb{1}_{(-\infty,0)} + 4\pi^2 b^2 \beta e^{-2\pi bt}\mathbb{1}_{(0,\infty)} - 4\pi b\beta\delta_0 \\ &= 4\pi^2 b^2 f - 4\pi b\beta\delta_0. \end{aligned}$$

Comparant cette expression avec (3), on a donc

$$-4\pi b\beta = -4\pi^2, \text{ soit } \beta = \frac{\pi}{b}.$$

Finalement, on a trouvé l'expression :

$$f(x) = \frac{\pi}{b} e^{-2\pi b|x|}.$$

(iii) : En utilisant le résultat de la question précédente, la fonction F admet l'expression alternative

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{-2i\pi nx}.$$

Puisque la fonction f est une fonction de $L^1(\mathbb{R})$, la formule de Poisson (avec $a = 1$) rappelée en en-tête de cet exercice donne :

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x-n).$$

(iv) : Calculons maintenant cette dernière somme. On a :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{\pi}{b}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi b|x-n|} \\
&= \frac{\pi}{b}\sum_{n=-\infty}^{\lfloor x\rfloor} e^{-2\pi b(x-n)} + \frac{\pi}{b}\sum_{n=\lfloor x\rfloor+1}^{\infty} e^{-2\pi b(n-x)} \\
&= \frac{\pi}{b}e^{-2\pi bx}\sum_{n=-\infty}^{\lfloor x\rfloor} e^{2\pi bn} + \frac{\pi}{b}e^{2\pi bx}\sum_{n=\lfloor x\rfloor+1}^{\infty} e^{-2\pi bn} \\
&= \frac{\pi}{b}e^{-2\pi bx}\sum_{n=-\lfloor x\rfloor}^{\infty} e^{-2\pi bn} + \frac{\pi}{b}e^{2\pi bx}\sum_{n=\lfloor x\rfloor+1}^{\infty} e^{-2\pi bn} \\
&= \frac{\pi}{b}e^{-2\pi b(x-\lfloor x\rfloor)}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi bn} + \frac{\pi}{b}e^{2\pi b(x-\lfloor x\rfloor-1)}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi bn} \\
&= \frac{\pi}{b}\frac{e^{-2\pi b(x-\lfloor x\rfloor)} + e^{2\pi b(x-\lfloor x\rfloor-1)}}{1-e^{-2\pi b}}.
\end{aligned}$$

2. Exercice 2 : Application du théorème de Shannon au calcul d'une série

Cet exercice présente une application pratique de la formule de Shannon. On commence par rappeler l'énoncé de celle-ci ; sa preuve relève d'une application particulièrement intéressante de la formule de Poisson, et nous la rappellerons et l'étudierons plus en détail au cours du TD 5.

Théorème 1. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ une fonction à bande limitée, i.e. dont la transformée de Fourier est à support compact, inclus dans un intervalle $[-\lambda_c, \lambda_c]$. Alors :*

(i) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(na)|^2 < \infty$;

(ii) Si de plus le pas d'échantillonnage a est "assez petit", i.e.

$$a \leq \frac{1}{2\lambda_c},$$

alors la fonction f peut être parfaitement reconstruite par la seule donnée des échantillons $\{f(na)\}_{n\in\mathbb{Z}}$:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na)\frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}(x-na)\right)}{\frac{\pi}{a}(x-na)}, \tag{7}$$

où la la convergence de la somme au second membre a lieu dans $L^2(\mathbb{R})$.

Enoncé : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ le signal caractérisé par sa transformée de Fourier $\widehat{f}(\xi) = (1-|\xi|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(\xi)$.

(i) Montrer que $f(x) = \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2 x^2}$.

(ii) En utilisant le théorème de Shannon avec $a = \frac{1}{2}$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus A, \quad \tan x = x - \frac{8x^2}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2k+1)^2(2x-(2k+1)\pi)},$$

où l'ensemble A est défini par $A = \left\{\frac{2k+1}{2}\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

(i) : On exprime la fonction f au moyen de la transformée de Fourier inverse :

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})(x).$$

Un calcul direct donne maintenant :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x\xi} \mathrm{d}\xi \\ &= \int_{-1}^{1} (1-|\xi|) e^{2i\pi x\xi} \mathrm{d}\xi \\ &= \int_{-1}^{0} (1+\xi) e^{2i\pi x\xi} \mathrm{d}\xi + \int_{0}^{1} (1-\xi) e^{2i\pi x\xi} \mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

En effectuant une intégration par parties sur chacune des deux intégrales au second membre ci-dessus, on obtient alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2i\pi x}\left[(1+\xi)e^{2i\pi x\xi}\right]_{-1}^{0} - \frac{1}{2i\pi x}\int_{-1}^{0} e^{2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2i\pi x}\left[(1-\xi)e^{2i\pi x\xi}\right]_{0}^{1} + \frac{1}{2i\pi x}\int_{0}^{1} e^{2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2i\pi x} - \frac{1-e^{-2i\pi x}}{(2i\pi x)^2} - \frac{1}{2i\pi x} + \frac{e^{2i\pi x}-1}{(2i\pi x)^2} \\ &= \frac{e^{2i\pi x}+e^{-2i\pi x}-2}{(2i\pi x)^2} \\ &= \frac{1-\cos(2\pi x)}{2\pi^2 x^2} \\ &= \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2 x^2}, \end{aligned}$$

ce qui est la formule attendue.

(ii) : Comme le suggère l'énoncé, appliquons le théorème de Shannon à la fonction f, avec la valeur $a = \frac{1}{2}$ du pas d'échantillonnage. Ceci est possible puisque

- La fonction f (ainsi que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$) est dans $L^2(\mathbb{R})$;
- La transformée de Fourier $\widehat{f}$ est à support dans l'intervalle $[-\lambda_c, \lambda_c]$, avec $\lambda_c = 1$. On peut donc utiliser un pas d'échantillonnage $a \leq \frac{1}{2}$.

La formule de Shannon s'écrit alors

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}(x-na)\right)}{\frac{\pi}{a}(x-na)},$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2 x^2} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\sin^2(\frac{n\pi}{2})}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2} \frac{\sin\left(2\pi(x-\frac{n}{2})\right)}{2\pi(x-\frac{n}{2})} \\ &= \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x} + 4\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\sin^2(\frac{(2k+1)\pi}{2})}{(2k+1)^2\pi^2} \frac{\sin\left(2\pi(x-\frac{2k+1}{2})\right)}{2\pi(x-\frac{2k+1}{2})}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que

$$(8) \qquad \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0 \text{ pour tout } n \text{ pair, et donc } \frac{\sin^2(\frac{n\pi}{2})}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n = 2k,\ k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0, \\ \frac{4\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)}{(2k+1)^2\pi^2} & \text{si } n = 2k+1,\ k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Notons qu'a priori, la convergence de la série au second membre de (8) a lieu dans $L^2(\mathbb{R})$, et définit seulement une fonction de $L^2(\mathbb{R})$. Or,

- La fonction f au membre de gauche de (8) est continue sur $\mathbb{R}$.
- La série au second membre est une série de fonctions normalement convergente sur un voisinage de chaque point $x_0 \in \mathbb{R}\setminus B$, où $B := \left\{\frac{2k+1}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. En effet, soit x_0 un tel point de $\mathbb{R}\setminus B$, et soit $V \subset \mathbb{R}\setminus B$ un voisinage ouvert de x_0. Le dénominateur de la fonction $\frac{\sin\left(2\pi(x-\frac{n}{2})\right)}{2\pi(x-\frac{n}{2})}$ ne s'annule pas

sur V, de sorte qu'il existe une constante $C > 0$ (dépendant de x_0 et V) telle que :

$$\forall x \in V,\ \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \left| \frac{\sin^2(\frac{(2k+1)\pi}{2})}{(2k+1)^2\pi^2} \frac{\sin\left(2\pi(x - \frac{2k+1}{2})\right)}{2\pi(x - \frac{2k+1}{2})} \right| \leq \frac{C}{(2k+1)^2}.$$

La série au second membre de (8) est donc uniformément sur V, et sa limite y est continue. Ainsi, l'égalité (8) a lieu pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus B$.

Notant maintenant que

$$\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est pair} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et donc } \sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = 1,$$

on obtient ensuite, en posant $t = \pi x$

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus A, \quad \sin^2 t = \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{4t^2}{\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2k+1)^2} \frac{\sin\left(2t - \pi(2k+1)\right)}{2t - \pi(2k+1)},$$

Or, par une formule de trigonométrie élémentaire,

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \sin\left(2t - \pi(2k+1)\right) = -\sin(2t),$$

et donc, en divisant les deux membres de l'équation ci-dessus par $\frac{1}{2}\sin(2t) = \sin t \cos t$ (qui ne s'annule pas pour $t \notin A \cup \{0\}$), on trouve :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus A, \quad \tan t = t - \frac{8t^2}{\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2k+1)^2} \frac{1}{2t - \pi(2k+1)},$$

ce qui est la formule attendue.

Remarque 1. *Notons que, stricto sensu, on a établi la formule ci-dessus pour $t \in \mathbb{R} \setminus A$ différent de 0. En réalité, puisque les deux membres de cette égalité se prolongent par continuité en $t = 0$ (c'est immédiat pour le membre de gauche, et cela procède d'un raisonnement comme celui employé plus haut pour le membre de droite), cette identité se prolonge elle-aussi en $t = 0$.*

3. Exercice 3: Extension de la formule de Shannon aux fonctions trigonométriques

Enoncé: On considère dans cet exercice la fonction $f(t) = e^{2i\pi\lambda t}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) Soit g la fonction de période $\frac{1}{a}$, égale à f sur l'intervalle $[-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a})$. Pour λ réel fixé, montrer que les coefficients de Fourier s'expriment comme

$$c_n = \frac{a\sin(\frac{\pi}{a}(\lambda - na))}{\pi(\lambda - na)}.$$

(ii) En appliquant le théorème de Dirichlet, montrer que:

$$e^{2i\pi\lambda t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi nat} \operatorname{sin_c}(\frac{\pi}{a}(\lambda - na)),\ \text{pour tout } t \in \left(-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}\right).$$

Remarque 2. *Un simple changement du nom des variables et paramètres figurant dans la formule ci-dessus donne le résultat suivant: pour tout ξ (= t ci-dessus) dans $\mathbb{R}$, et pour une période d'échantillonnage $|a| < \frac{1}{2\xi}$, on a:*

$$\forall u (= \lambda) \in \mathbb{R},\ e^{2i\pi\xi u} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi\xi na} \operatorname{sin_c}(\frac{\pi}{a}(u - na)). \tag{9}$$

Cette formule est identique à la formule de reconstruction figurant dans le théorème de Shannon, lorsqu'elle est appliquée à la fonction $g(u) = e^{2i\pi\xi u}$, à une différence important près: g est une distribution de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, dont la transformée de Fourier vaut $\widehat{g}(\xi) = \delta_\xi$. Ainsi, l'hypothèse du théorème de Shannon selon laquelle $\widehat{g}$ doit être à support compact est bien vérifiée ($\operatorname{supp}(\widehat{g}) = \{\xi\}$, et donc $\lambda_c = \xi$ avec les notations du cours); en revanche, l'hypothèse $\widehat{g} \in L^2(\mathbb{R})$ n'est pas vérifiée, et le théorème de Shannon ne s'applique pas en l'état. Le résultat de cet exercice est donc une version du théorème de Shannon spécialisée au cas des fonctions trigonométriques (très utile en pratique), mais ce n'est pas une conséquence de ce dernier – noter d'ailleurs *que (9) ne s'applique que lorsque la période d'échantillonnage a est telle que* $|a| < \frac{1}{2\xi}$*, alors que l'inégalité peut être large dans le cadre 'classique' du théorème de Shannon.*

(1): Un calcul direct donne, lorsque $\lambda \neq na$:

$$\begin{aligned} c_n &= a \int_{-\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} f(t) e^{-2i\pi nat}\, \mathrm{d}t \\ &= a \int_{-\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} e^{2i\pi(\lambda - na)t}\, \mathrm{d}t \\ &= a \left[\frac{e^{2i\pi(\lambda-na)t}}{2i\pi(\lambda - na)} \right]_{-\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} \\ &= a \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{a}(\lambda-na)} - e^{-i\frac{\pi}{a}(\lambda-na)}}{2i\pi(\lambda - na)} \right) \\ &= \frac{a \sin(\frac{\pi}{a}(\lambda - na))}{\pi(\lambda - na)}, \end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu. Un calcul facile donne le résultat dans le cas particulier où $\lambda = na$.

(2): La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle (ouvert) $\left]-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}\right[$. Le théorème de Dirichlet assure donc que la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi nat}$ de f converge vers $f(t)$ en tout point $t \in \left]-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}\right[$, ce qui s'écrit simplement:

$$\forall\ t \in \left]-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}\right[,\ f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi nat},$$

et donc, en utilisant le résultat de la première question:

$$\forall\ t \in \left]-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}\right[,\ e^{2i\pi\lambda t} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi nat} \operatorname{sin}_c\left(\frac{\pi}{a}(\lambda - na)\right),$$

ce qui est le résultat attendu.