CORRECTION DU TD 6 : TRANSFORMÉE DE FOURIER

Contents

1. La transformée de Fourier des distributions : motivations et rappels de cours

Aussi fondamentale soit-elle, la transformée de Fourier est une opération à laquelle il est difficile de donner un cadre fonctionnel convenable. Comme on le rappellera au cours de l'Exercice 3, on dispose en effet d'une théorie de la transformée de Fourier pour les fonctions de $L^1(\mathbb{R})$, et d'une autre pour les fonctions de $L^2(\mathbb{R})$, qui toutes deux entretiennent des liens subtils avec les développements en série de Fourier des fonctions périodiques... Ces cadres sont relativement contraignants, car beaucoup de "bonnes" fonctions (à commencer par les fonctions 1, x, etc.) n'appartiennent ni à $L^1(\mathbb{R})$ ni à $L^2(\mathbb{R})$.

L'une des motivations principales de la théorie des distributions est d'unifier et de généraliser ces différentes notions, tout en simplifiant considérablement les hypothèses d'application : on pourra ainsi parler de la transformée de Fourier de la plupart des "bonnes" distributions.

Comme on l'a vu au cours des deux premières feuilles de Td, l'extension au contexte des distributions d'une opération Op que l'on sait appliquer aux "bonnes" fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ procède par "dualité". L'idée est d'exprimer l'action $\langle T_{\mathrm{Op}(f)}, \varphi \rangle$ de la distribution $T_{\mathrm{Op}(f)}$ associée à la fonction $\mathrm{Op}(f)$ contre une fonction test φ uniquement en fonction de la fonction f, en faisant "porter" l'opération Op sur φ. Pour ce faire, on identifie (par intégration par parties, changement de variables, etc.) une opération dite "duale" $\mathrm{Op}^* : \varphi \mapsto \mathrm{Op}^*(\varphi)$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T_{\mathrm{Op}(f)}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Op}(f)(x)\varphi(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{Op}^*(\varphi)(x)\, \mathrm{d}x.$$

Alors, pour une distribution quelconque $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on définit $\mathrm{Op}(T)$ par la formule analogue

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle \mathrm{Op}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathrm{Op}^*(\varphi) \rangle.$$

C'est ainsi que l'on a défini la dérivée d'une distribution, le produit d'une distribution par une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, etc.

Malheureusement, il n'est pas possible d'appliquer directement cette stratégie au cas de la transformée de Fourier. Comme on va le voir, la difficulté réside dans le fait que la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ n'est pas une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ en général : elle n'est pas à support compact. Pour pallier à cette difficulté, on introduit une classe de fonctions un peu plus grande que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$: la classe de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Définition 1. *On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ qui sont à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées : une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si*

$$\forall p \in \mathbb{N}, \ \exists\, C_p > 0 \quad \text{t.q.} \quad \sup_{\substack{\alpha \le p \\ \beta \le p}} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha \varphi^{(\beta)}(x)| < \infty.$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la semi-norme $\mathcal{N}_p(\varphi)$ d'une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est définie par

$$\mathcal{N}_p(\varphi) = \sup_{\substack{\alpha \le p \\ \beta \le p}} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha \varphi^{(\beta)}(x)|.$$

La transformée de Fourier $\mathcal{F}\varphi$ (aussi notée $\widehat{\varphi}$) d'une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est définie par la formule "usuelle" :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-2i\pi x\xi} \, \mathrm{d}x.$$

Cette opération jouit de propriétés très intéressantes, dont certaines sont rassemblées dans la proposition suivante.

Proposition 1. *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$; alors*

(i) Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, $\partial^p(\mathcal{F}\varphi) = \mathcal{F}((-2i\pi x)^p \varphi)$.
(ii) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(2i\pi\xi)^p \mathcal{F}\varphi = \mathcal{F}(\partial^p \varphi)$.
(iii) Pour tout réel $a \in \mathbb{R}$, $e^{-2i\pi a\xi} \mathcal{F}\varphi = \mathcal{F}(\tau_a \varphi)$.
(iv) Pour tout réel $a \in \mathbb{R}$, $\tau_a(\mathcal{F}\varphi) = \mathcal{F}(e^{2i\pi x a}\varphi)$.
(v) Pour toutes fonctions $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\varphi(x)\psi(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathcal{F}\psi(x) \, \mathrm{d}x.$$

(vi) (Inversion de Fourier) : La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ induit un isomorphisme $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$. L'application inverse $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est définie par

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \mathcal{F}^{-1}\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} \psi(\xi) e^{2i\pi x\xi} \, \mathrm{d}\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.

- *Les propriétés (i)-(iv) sont élémentaires et seront démontrées au cours de l'exercice* 0.
- *Une conséquence immédiate de celles-ci est que la transformée de Fourier $\mathcal{F}\varphi$ d'une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ appartient encore à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (alors que si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, en général, $\mathcal{F}\varphi \notin \mathcal{D}(\mathbb{R})$).*
- *Lorsque $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est une fonction à valeurs réelles, la transformée de Fourier inverse s'écrit*

$$\mathcal{F}^{-1}\psi(x) = \overline{\mathcal{F}}\psi(x).$$

- *La formule d'inversion de Fourier s'exprime de manière équivalente, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}\mathcal{F}\varphi(x) = \varphi_\sigma(x), \quad \text{où } \ \varphi_\sigma(x) := \varphi(-x). \tag{1}$$

Cette formule est loin d'être triviale. En particulier, si l'on développe les expressions de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{F}^{-1}$, elle s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi x\xi} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi y\xi} \varphi(y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}\xi = \varphi(x).$$

Pour démontrer cette relation, il est tentant d'intervertir les deux intégrales en présence, mais on est ici en présence d'un cas flagrant où le théorème de Fubini ne s'applique pas ! En effet, pour un $x \in \mathbb{R}$ donné, la fonction

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (y, \xi) \longmapsto |e^{2i\pi x\xi} e^{-2i\pi y\xi} \varphi(y)| = |\varphi(y)| \in \mathbb{R}$$

n'est pas intégrable sur l'espace produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. La démonstration de la formule d'inversion de Fourier, qui a été vue en cours, est difficile !

Nous allons maintenant définir la classe des distributions tempérées, qui sont celles dont on peut prendre la transformée de Fourier.

Définition 2. *On dit qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est tempérée s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ et une constante $C > 0$ tels que :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C\mathcal{N}_p(\varphi). \tag{2}$$

On note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions tempérées sur $\mathbb{R}$.

Une distribution tempérée est donc "un peu mieux" qu'une distribution ordinaire, au sens où elle satisfait la relation (2), qui est un peu plus "forte" que la relation de continuité au sens des distributions.

On peut montrer – et c'est crucial – qu'une distribution tempérée, qui est a priori une application linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ se prolonge en une application linéaire sur l'espace (plus gros) des fonctions φ de la classe de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ainsi, lorsque la distribution T est tempérée, la quantité

$$\langle T, \varphi \rangle$$

fait sens lorsque la fonction test φ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (et pas seulement à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$). Cette propriété est à la base de la définition de la transformée de Fourier d'une distribution tempérée.

Définition 3. *La transformée de Fourier $\mathcal{F}T$ (indifféremment notée $\widehat{T}$) d'une distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est définie par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle.$$

On comprend enfin pourquoi l'introduction de la classe de Schwarz est nécessaire pour définir la tranformée des distributions, et pourquoi cette opération ne s'applique qu'aux distributions tempérées. En effet, on se sert de la relation (v) de la Proposition 1 pour étendre la transformée de Fourier au cadre des distributions : en accord avec la stratégie résumée au début de cette section, on souhaite naturellement définir la distribution $\mathcal{F}T$ par la formule

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle.$$

Malheureusement, ceci est impossible car, comme on l'a dit, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, il n'est pas vrai en général que $\mathcal{F}\varphi$ est encore une fonction test de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, si bien que l'application de T à cette fonction (au second membre ci-dessus) est impossible ! Ainsi, on étend l'espace des fonctions test de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ – ce qui n'est possible que pour certaines distributions, les distributions tempérées – de sorte à ce que la formule ci-dessus fasse sens, puisque si φ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (et en particulier à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}$ est également dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2. Exercice 0: Propriétés élémentaires de transformée de Fourier

Commençons par quelques propriétés élementaires de la transformée de Fourier des distributions, qu'il ne faut surtout pas essayer de retenir par cœur, mais qu'il faut savoir retrouver sans hésiter.

Enoncé : Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ une distribution tempérée ; montrer que :

- (i) Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, $\partial^p(\mathcal{F}T) = \mathcal{F}((-2i\pi x)^p T)$.
- (ii) Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, $(2i\pi\xi)^p \mathcal{F}T = \mathcal{F}(\partial^p T)$.
- (iii) Pour tout réel $a \in \mathbb{R}$, $e^{-2i\pi a\xi}\mathcal{F}T = \mathcal{F}(\tau_a T)$.
- (iv) Pour tout réel $a \in \mathbb{R}$, $\tau_a(\mathcal{F}T) = \mathcal{F}(e^{2i\pi xa}T)$.
- (v) $\mathcal{F}\mathcal{F}T = T_\sigma$.

Remarque 2. *Ces formules prolongent les formules de calcul de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ rassemblées dans la Proposition 1 ci-dessus.*

(i) : Utilisant les définitions de la dérivation et de la transformée de Fourier au sens des distributions, on a, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\langle \partial^p(\mathcal{F}T), \varphi \rangle = (-1)^p \langle \mathcal{F}T, \varphi^{(p)} \rangle = (-1)^p \langle T, \mathcal{F}(\varphi^{(p)}) \rangle. \tag{3}$$

On est ainsi amené à travailler sur l'expression $\mathcal{F}(\varphi^{(p)})$ pour une fonction test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pour cela, on écrit simplement, par définition de la transformée de Fourier des fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(\varphi^{(p)})(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(p)}(x) e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x \\ &= -(-2i\pi\xi)\int_{\mathbb{R}} \varphi^{(p-1)}(x) e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x \\ &= \dots \\ &= (2i\pi\xi)^p \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x \\ &= (2i\pi\xi)^p \mathcal{F}\varphi(\xi),\end{aligned}$$

où l'on a effectué p intégrations par parties successives, dans lesquelles les termes de bord s'annulent en raison de la décroissance rapide de φ et de ses dérivées. Revenant à (3), on obtient alors :

$$\langle \partial^p(\mathcal{F}T), \varphi\rangle = (-1)^p \langle T, (2i\pi\xi)^p \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle (-2i\pi x)^p T, \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle \mathcal{F}((-2i\pi x)^p T), \varphi\rangle,$$

ce qui est bien la formule attendue.

(ii) : On peut appliquer la formule d'inversion de Fourier, ou bien démontrer ce résultat directement, ce que nous faisons ici. Pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle (2i\pi\xi)^p \mathcal{F}T, \varphi\rangle = \langle \mathcal{F}T, (2i\pi\xi)^p \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}((2i\pi\xi)^p \varphi)\rangle, \tag{4}$$

et on est donc ramené à transformer l'expression $\mathcal{F}((2i\pi\xi)^p\varphi)$ pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pour cela, on utilise p fois le théorème de dérivation sous le signe intégral (dont les hypothèses sont vérifiées en vertu de la décroissance rapide de φ en $\pm\infty$) :

$$\begin{aligned}\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}((2i\pi x)^p\varphi)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (2i\pi x)^p \varphi(x) e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\int_{\mathbb{R}} (2i\pi x)^{p-1}\varphi(x) e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \dots \\ &= (-1)^p \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\xi^p}\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= (-1)^p \partial^p(\mathcal{F}\varphi)(\xi).\end{aligned}$$

Insérant cette relation dans (4), on obtient :

$$\langle (2i\pi\xi)^p \mathcal{F}T, \varphi\rangle = (-1)^p \langle T, \partial^p(\mathcal{F}\varphi)\rangle = \langle \partial^p T, \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle \mathcal{F}(\partial^p T), \varphi\rangle,$$

ce qui est la formule attendue.

(iii) : Comme auparavant, on écrit, pour une fonction test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ arbitraire,

$$\langle e^{-2i\pi a\xi}\mathcal{F}T, \varphi\rangle = \langle \mathcal{F}T, e^{-2i\pi ax}\varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}(e^{-2i\pi ax}\varphi)\rangle. \tag{5}$$

Or, par un calcul élémentaire, il vient :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(e^{-2i\pi ax}\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\xi} e^{-2i\pi ax}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x(\xi+a)}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{F}\varphi(\xi+a) = (\tau_{-a}\mathcal{F}\varphi)(\xi).$$

Revenant à (5), on obtient :

$$\langle e^{-2i\pi a\xi}\mathcal{F}T, \varphi\rangle = \langle T, (\tau_{-a}\mathcal{F}\varphi)\rangle = \langle \tau_a T, \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle \mathcal{F}(\tau_a T), \varphi\rangle,$$

d'où le résultat.

(iv) : Pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle \tau_a(\mathcal{F}T), \varphi\rangle = \langle \mathcal{F}T, \tau_{-a}\varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}(\tau_{-a}\varphi)\rangle.$$

Or, un calcul immédiat basé sur le changement de variables $u = x + a$ donne :

$$\mathcal{F}(\tau_{-a}\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x+a) e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = e^{2i\pi a\xi}\int_{\mathbb{R}} \varphi(u) e^{-2i\pi u\xi}\,\mathrm{d}u = e^{2i\pi a\xi}\mathcal{F}\varphi(\xi).$$

Ainsi, on obtient :

$$\langle \tau_a(\mathcal{F}T), \varphi \rangle = \langle T, e^{2i\pi a\xi}\mathcal{F}\varphi \rangle = \langle e^{2i\pi ax}T, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle \mathcal{F}(e^{2i\pi ax}T), \varphi \rangle,$$

ce qui est la formule souhaitée.

(v) : Cette formule résulte directement de son analogue (1) pour une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, de la définition de la transformée de Fourier des distributions, ainsi que de la relation définissant l'antipodie au sens des distributions :

$$\langle T_\sigma, \varphi \rangle = \langle T, \varphi_\sigma \rangle.$$

3. Exercice 1: Quelques calculs de transformées de Fourier

Insistons : une distribution tempérée T est une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui, en plus de l'inégalité de continuité au sens des distributions, satisfait l'inégalité (2) pour un certain entier p. Un résultat général (admis dans ce cours) permet alors de montrer que la définition de T peut être étendue à des fonctions test φ appartenant à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, et pas seulement à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Ainsi, démontrer qu'une distribution T est tempérée revient à montrer que (2) a lieu pour toute fonction test φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (et non $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ puisqu'on ne sait pas encore que T fait sens contre de telles fonctions !).

Enoncé : Après avoir montré que ce sont des distributions tempérées, calculer les transformées de Fourier des distributions suivantes :
(i) $T = 1$.
(ii) $T = x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
(iii) $T = \delta^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
(iv) $T = e^{2i\pi\nu_0 x}$ pour $\nu_0 \in \mathbb{R}$.

Il est astucieux de traiter les questions de cet exercice dans un ordre différent de celui suggéré par l'énoncé.

On commence par traiter (iii) : La distribution $T = \delta^{(n)}$ est bien une distribution tempérée puisque, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

$$|\langle \delta^{(n)}, \varphi \rangle| = |\varphi^{(n)}(0)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi^{(n)}(x)| \leq \mathcal{N}_n(\phi),$$

soit l'inégalité (2) définissant les distributions tempérées avec $p = n$ et $C = 1$. On peut maintenant (et seulement maintenant) parler de la valeur $\langle \delta^{(n)}, \varphi \rangle$ prise par $\delta^{(n)}$ contre des fonctions test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. De même, on peut maintenant (et seulement maintenant) parler de la transformée de Fourier $\mathcal{F}T$ de T. Pour calculer cette dernière, on applique simplement la définition :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(\delta^{(n)}), \varphi \rangle &= \langle \delta^{(n)}, \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= (-1)^n \Big\langle \delta, \partial^n(\mathcal{F}\varphi) \Big\rangle \\ &= (-1)^n \Big\langle \delta, \mathcal{F}((-2i\pi x)^n\varphi) \Big\rangle, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la formule de calcul de l'Exercice 0, (i) pour obtenir la dernière ligne. De là, un simple calcul donne

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(\delta^{(n)}), \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} (2i\pi x)^n \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \langle (2i\pi x)^n, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Ceci prouve que

$$\mathcal{F}(\delta^{(n)}) = (2i\pi\xi)^n. \tag{6}$$

Nous pouvons à présent traiter (ii) : Pour cela, appliquons la transformée de Fourier au résultat (6) de la Question (iii). On obtient :

$$(2i\pi)^n\mathcal{F}(x^n) = \mathcal{F}\mathcal{F}\delta^{(n)}.$$

Utilisant maintenant la propriété (v) de l'Exercice 1, il vient

$$\mathcal{F}(x^n) = \frac{1}{(2i\pi)^n}\left(\delta^{(n)}\right)_\sigma.$$

Un calcul facile donne alors :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \begin{aligned} \langle \left(\delta^{(n)}\right)_\sigma, \varphi\rangle &= \langle \delta^{(n)}, \varphi(-x)\rangle \\ &= (-1)^n \langle \delta, \partial^n(\varphi(-x))\rangle \\ &= \langle \delta, (\partial^n \varphi)(-x)\rangle \\ &= \partial^n \varphi(0) \\ &= (-1)^n \langle \delta^{(n)}, \varphi\rangle, \end{aligned}$$

et donc, finalement.

$$\mathcal{F}(x^n) = \frac{1}{(-2i\pi)^n}\delta^{(n)}.$$

(i) : Il s'agit d'une simple application de la question (ii) avec $n = 0$, ce qui donne la formule :

$$\mathcal{F}1 = \delta.$$

Etudions enfin la question (iv). On a, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\left\langle \mathcal{F}\left(e^{2i\pi\nu_0 x}\right), \varphi \right\rangle = \langle e^{2i\pi\nu_0 x}, \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle 1, e^{2i\pi\nu_0 \xi}\mathcal{F}\varphi\rangle,$$

où nous avons utilisé la définition de la multiplication de la distribution 1 par la fonction $\mathcal{C}^\infty$ $x \mapsto e^{2i\pi\nu_0 x}$ pour obtenir la dernière égalité. On voit maintenant que

$$\begin{aligned} e^{2i\pi\nu_0\xi}\mathcal{F}\varphi(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-2i\pi\xi(x-\nu_0)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(u+\nu_0) e^{-2i\pi\xi u}\,\mathrm{d}x \\ &= \mathcal{F}(\varphi(x+\nu_0)), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le changement de variables $u = x - \nu_0$. Ainsi, on obtient

$$\left\langle \mathcal{F}\left(e^{2i\pi\nu_0 x}\right), \varphi \right\rangle = \langle 1, \mathcal{F}(\varphi(x+\nu_0))\rangle = \langle \mathcal{F}1, \varphi(x+\nu_0)\rangle = \langle \delta, \varphi(x+\nu_0)\rangle = \varphi(\nu_0).$$

Ainsi, on a prouvé que :

$$\mathcal{F}\left(e^{2i\pi\nu_0 x}\right) = \delta_{\nu_0}.$$

4. Exercice 2: Un calcul d'intégrale utilisant la transformée de Fourier

Enoncé : Calculer l'intégrale suivante, en utilisant la transformée de Fourier :

$$I := \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\cos(2\pi x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour faire le lien avec la transformée de Fourier, on écrit :

$$I = \mathrm{Re}(J), \text{ où } J := \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} e^{2i\pi x}\,\mathrm{d}x.$$

On remarque alors que J s'exprime au moyen de la transformée de Fourier par :

$$J = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) e^{-2i\pi x(-1)}\,\mathrm{d}x = (\mathcal{F}\psi)(-1),$$

où ψ est la fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\psi(x) := e^{-\pi x^2}.$$

On est ainsi conduit à calculer la transformée de Fourier $\mathcal{F}\psi$ de cette fonction ψ.

Remarque 3. *Attention : il est tentant de vouloir faire un "changement de variables complexe" pour calculer* $\mathcal{F}\psi(\xi)$*, i.e. d'écrire*

$$\mathcal{F}\psi(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = e^{-\pi\xi^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x+i\xi)^2}\,\mathrm{d}x,$$

(ce qui est tout à fait licite), puis de faire le changement de variables "$u = x + i\xi$*" (*$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$*). Dans le cas présent, ceci conduit à la bonne formule pour* $\mathcal{F}\psi(\xi)$*... mais avertissons le lecteur que ce type de changement de variables est extrêmement dangereux, et conduit bien souvent à des formules erronées. Ce type de pratique trouve sa justification dans l'analyse complexe (on utilise l'holomorphie de la fonction* ψ*), mais absolument pas dans les théorèmes classiques de l'analyse réelle... Il faut donc absolument proscrire cette idée, à moins de connaître les rudiments nécessaires de théorie des fonctions holomorphes !*

De très nombreuses techniques permettent de mener ce calcul. Ici, on utilisera une astuce très précieuse, qui consiste à utiliser la forme particulière de ψ pour former une relation entre la dérivée de $\mathcal{F}\psi$ et $\mathcal{F}\psi$ elle-même.

Puisque $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la fonction $g(\xi) := \mathcal{F}\psi(\xi)$ est également dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, et sa dérivée vaut :

$$g'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (-2i\pi x) e^{-\pi x^2} e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x,$$

où l'on a utilisé le théorème de dérivation sous le signe intégral (ou bien l'une des formules classiques de la Proposition 1 pour exprimer la dérivée d'une transformée de Fourier). Ceci se réécrit :

$$\begin{aligned} g'(\xi) &= i \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\pi x^2}\right) e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x \\ &= -i \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} (-2i\pi\xi) e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x \\ &= -2\pi\xi \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x}_{=g(\xi)}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé une intégration par parties (dont les termes de bord disparaissent par décroissance rapide de l'intégrande) pour passer de la première ligne à la seconde. Ainsi, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et satisfait l'équation différentielle ordinaire :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad g'(\xi) + 2\pi\xi g(\xi) = 0.$$

Par la théorie classique de telles équations, on en déduit qu'il existe une constante réelle $A \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad g(\xi) = A e^{-\pi\xi^2}.$$

Pour identifier la valeur de cette constante, on écrit simplement que

$$A = g(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = 1,$$

où l'on a utilisé le calcul d'intégrale classique

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}.$$

Finalement, on trouve que

$$g(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = e^{-\pi\xi^2}.$$

Ainsi, l'intégrale I vaut

$$I = \mathrm{Re}(J) = \mathrm{Re}(g(-1)) = e^{-\pi}.$$

5. Exercice 3: Transformée de Fourier des distributions et transformée de Fourier des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$

Comme on l'a évoqué au cours de la Section 1, la théorie de la transformée de Fourier des distributions vise à étendre et unifier les différentes versions plus "classiques" de cette opération, notamment les théories $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ relatives à cette opération.

Rappelons que l'on peut définir la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ comme la fonction $\widehat{f}$ donnée par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x\xi} \, \mathrm{d}x.$$

Il est en effet facile de voir que cette intégrale est bien définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. De plus, on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad |\widehat{f}(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, \mathrm{d}x = ||f||_{L^1(\mathbb{R})},$$

c'est-à-dire que la fonction $\widehat{f}$ appartient à $L^\infty(\mathbb{R})$. Plus précisément, rappelons la propiété suivante :

Proposition 2. *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$. De plus, on a*

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} |\widehat{f}(\xi)| = 0.$$

La continuité est une conséquence du théorème de convergence dominée. Pour voir que $\widehat{f}$ tend vers 0 en $\pm\infty$, on s'appuie sur le lemme de Riemann-Lebesgue, et sur la densité des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

La théorie $L^2(\mathbb{R})$ de la transformée de Fourier est un peu plus subtile, et on rappelle brièvement les principales étapes de sa construction. Le résultat fondamental de cette théorie est l'inégalité de Parseval, qui stipule que, pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier $\widehat{f}$ (qui existe en vertu de la théorie L^1 de la transformée de Fourier) appartient à $L^2(\mathbb{R})$ et satisfait

$$||\widehat{f}||_{L^2(\mathbb{R})} = ||f||_{L^2(\mathbb{R})}.$$

De là, on utilise la densité de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ (en fait, $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$!), qui permet d'étendre la définition de $f \mapsto \mathcal{F}f$ depuis $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ à $L^2(\mathbb{R})$ entier, par la formule

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \quad \mathcal{F}f = \lim_{n \to \infty} \mathcal{F}f_n,$$

où la limite ci-dessus a lieu dans $L^2(\mathbb{R})$, et où f_n désigne n'importe quelle suite de fonctions de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ qui converge vers f.

Ainsi, la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ est à comprendre comme une limite. Dans ce contexte, l'écriture

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x\xi} \, \mathrm{d}x$$

est abusive, puisque l'intégrale ci-dessus n'est pas absolument convergente. Rappelons pour finir la formule de Parseval dans ce cadre, valable pour $f, g \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)} \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)} \, \mathrm{d}\xi.$$

Il est facile de voir que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors (la distribution associée à) f est une distribution tempérée de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. En effet, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)||\varphi(x)| \, \mathrm{d}x \leq \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, \mathrm{d}x \right)}_{=||f||_{L^1(\mathbb{R})}} \mathcal{N}_0(\varphi).$$

De même, si f est une fonction de $L^2(\mathbb{R})$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique :

$$\begin{aligned}
|\langle f,\varphi\rangle| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}|x\varphi(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}}_{=||f||_{L^2(\mathbb{R})}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}}_{<\infty} \mathcal{N}_1(\varphi),
\end{aligned}$$

et donc f est également une distribution tempérée. Le but du présent exercice est alors de montrer que la transformée de Fourier des distributions généralise la transformée de Fourier de telles fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$.

Enoncé : Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ ou $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors on a $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$.

Commençons par traiter le cas $f \in L^1(\mathbb{R})$. Par définition de la transformée de Fourier au sens des distributions, $\widehat{T_f}$ vérifie, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\langle \widehat{T_f}, \varphi\rangle = \langle f, \mathcal{F}\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\xi)\mathcal{F}(\varphi)(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{T_f}, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} f(\xi)\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\xi, \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} f(\xi)e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}\xi\right)}_{=\widehat{f}(x)}\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

où l'interversion des deux intégrales est justifiée par le théorème de Fubini, puisque

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f(\xi)||\varphi(x)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi \leq ||f||_{L^1(\mathbb{R})}||\varphi||_{L^1(\mathbb{R})} < \infty.$$

Ainsi, on a

$$\langle \widehat{T_f}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

ce qui dit exactement que $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$.

Traitons maintenant le cas où $f \in L^2(\mathbb{R})$. On a toujours, pour chaque fonction test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\langle \widehat{T_f}, \varphi\rangle = \langle f, \mathcal{F}\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\xi)\mathcal{F}(\varphi)(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

En revanche, on ne peut plus appliquer le théorème de Fubini comme dans le cas où $f \in L^1(\mathbb{R})$ pour transférer la transformée de Fourier depuis φ vers f. Mais puisque f et $\mathcal{F}\varphi$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$, on peut appliquer la formule de Parseval, qui donne

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{T_f}, \varphi\rangle &= \overline{\left(\int_{\mathbb{R}} \overline{f(\xi)}\, \overline{\mathcal{F}(\varphi)(\xi)}\, \mathrm{d}\xi\right)} \\
&= \overline{\left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}\overline{f(\xi)}\right)\, \overline{\mathcal{F}(\varphi)(\xi)}\, \mathrm{d}\xi\right)} \\
&= \overline{\left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}\left(\overline{f(\xi)}\right)\, \overline{\varphi(\xi)}\, \mathrm{d}\xi\right)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \overline{\mathcal{F}^{-1} f(\xi)} \varphi(\xi)\, \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F} f(\xi)\varphi(\xi)\, \mathrm{d}\xi,
\end{aligned}$$

puisque les fonctions f et g sont à valeurs réelles. L'égalité ci-dessus exprime exactement le fait que $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$, ce qui est le résultat attendu.

6. Un calcul de transformée de Fourier exploitant une relation fonctionnelle

Dans cet exercice et le suivant, nous allons utiliser à plusieurs reprises l'opération d'"antipodie" $T \mapsto T_\sigma$ sur les distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Rappelons que, pour une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on note $\varphi_\sigma \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_\sigma(x) = \varphi(-x).$$

Cette opération induit une opération sur les distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ par la formule "naturelle" :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T_\sigma, \varphi\rangle = \langle T, \varphi_\sigma\rangle,$$

qui "mime" le changement de variables $x \mapsto -x$.

Un petit calcul élémentaire (laissé au lecteur à titre d'exercice d'entraînement) montre que, si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, alors

$$(\mathcal{F}T)_\sigma = \mathcal{F}(T_\sigma). \tag{7}$$

Enoncé :

(i) Montrer que la distribution "valeur principale de $\frac{1}{x}$" $T = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est une distribution tempérée.
(ii) En exploitant la relation $xT = 1$, démontrée au cours du TD2, calculer la transformée de Fourier de la distribution T.

(i): Nous avons vu au cours du TD2 que la distribution T est définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, \mathrm{d}x\right).$$

Rappelons que la limite au second membre ci-dessus existe bel et bien, puisque pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, un changement de variables produit :

$$\begin{aligned}
\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, \mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, \mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(-x)}{-x}\, \mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\varepsilon}^{\infty} \psi(x)\, \mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{8}$$

où la fonction $\psi(x) := \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}$ s'avère être une fonction test ; en effet :

- Elle est à support compact dans $\mathbb{R}$, puisque φ l'est.
- Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $(-\infty, 0)$ et $(0, \infty)$ puisque φ l'est.

- Elle est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, en vertu du calcul suivant :
$$\psi(x) = \frac{1}{x}\int_{-x}^{x} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \varphi'(xu)\,\mathrm{d}u,$$
formule à laquelle il est aisé d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

Ainsi, on a :
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\varepsilon}^{\infty} \psi(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_0^\infty \psi(x)\,\mathrm{d}x,$$
où le passage à la limite est maintenant immédiat.

Rappelons enfin que le calcul précédent permet en outre de montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\psi(x)| \leq 2\sup_{u\in\mathbb{R}} |\varphi'(u)|. \tag{9}$$

Ces ingrédients combinés permettent, on l'a vu, de montrer que $T = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est une distribution, i.e. $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En effet, soit K un compact de $\mathbb{R}$, inclus dans un intervalle $[-M, M]$ pour $M > 0$ suffisamment grand, et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans K. Alors la fonction $\psi(x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}$ est également à support dans $[-M, M]$, et
$$|\langle T, \varphi\rangle| = \left|\int_0^L \psi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq 2M \sup_{u\in\mathbb{R}} |\varphi'(u)|.$$

Entrons maintenant dans le vif du sujet, et montrons que T est une distribution tempérée. Malheureusement, la stratégie résumée ci-dessus ne peut pas être utilisée directement, car l'inégalité à prouver dans ce cas (voir la Définition 2) ne doit pas faire figurer de constante dépendant du support de φ : il s'agit de contrôler la quantité $|\langle T, \varphi\rangle|$ uniquement par (le supremum d') un multiple de φ ou de ses dérivées par un polynôme d'assez haut degré.

Comme souvent, une stratégie astucieuse pour contourner ce problème de "majoration par un sup sur un intervalle infini" consiste à introduire un poids intégrable dans les quantités que l'on manipule. Plus précisément, pour une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :
$$\langle T, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{1+x^2}\frac{\varphi_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right),$$
où la fonction test $\varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est définie par $\varphi_2(x) = (1+x^2)\varphi(x)$.

Un calcul analogue à (8) donne alors :
$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{1+x^2}\frac{\varphi_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^\infty \frac{1}{1+x^2}\psi_2(x)\,\mathrm{d}x,$$
où $\psi_2(x) := \frac{\varphi_2(x)-\varphi_2(-x)}{x}$ est encore une fonction test en vertu des arguments énoncés plus haut, et vérifie (voir (9)) :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\psi_2(x)| \leq 2\sup_{u\in\mathbb{R}} |\varphi_2'(u)| \leq 2C\mathcal{N}_2(\varphi), \tag{10}$$
pour une certaine constante $C > 0$ qui ne dépend pas de φ (et que l'on pourrait écrire explicitement).

Ainsi, puisque la fonction $\frac{1}{1+x^2}\psi_2(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact, on a
$$\langle T, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{1+x^2}\psi_2(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\psi_2(x)\,\mathrm{d}x.$$
Enfin, en utilisant (9), on obtient :
$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq 2C\left(\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\right)\mathcal{N}_2(\varphi) \leq C\mathcal{N}_2(\varphi),$$
quitte à modifier la valeur de la constante C. Ceci termine de prouver que T est une distribution tempérée.

(ii): Comme suggéré par l'énoncé, on utilise la relation
$$xT = 1$$

afin de calculer $\mathcal{F}T$. Pour cela, on prend la transformée de Fourier des deux membres de cette relation, ce qui produit :

$$\mathcal{F}(xT) = \mathcal{F}1 = \delta_0, \tag{11}$$

où l'on a utilisé un résultat de la Question (i) de l'Exercice 1.

On utilise maintenant la relation entre transformée de Fourier de xT et dérivée de la transformée de Fourier de T (voir l'Exercice 0) :

$$(\mathcal{F}T)' = \mathcal{F}((-2i\pi x)T).$$

Multipliant les deux membres de (11) par $-2i\pi$, on a

$$\mathcal{F}((-2i\pi x)T) = -2i\pi\delta_0,$$

et donc :

$$(\mathcal{F}T)' = -2i\pi\delta_0.$$

D'autre part, une application immédiate de la formule des sauts (laissée au lecteur) révèle que la distribution de Dirac δ_0 n'est autre que la dérivée de la fonction de Heaviside $H(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, définie par :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, on obtient

$$(\mathcal{F}T + 2i\pi H)' = 0.$$

Puisque les seules distributions sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est nulle sont les distributions constantes (voir l'Exercice 3 de la feuille de TD 2), il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\mathcal{F}T = C - 2i\pi H(x). \tag{12}$$

Il reste maintenant à déterminer cette constante C. Pour cela, nous allons utiliser l'imparité de la distribution $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$. Plus précisément, un calcul immédiat (laissé au lecteur) montre que la distribution $T = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est impaire, i.e.

$$T_\sigma = -T.$$

Utilisant la relation (7) entre transformée de Fourier et antipodie, on a donc :

$$(\mathcal{F}T)_\sigma = \mathcal{F}(T_\sigma) = -\mathcal{F}T,$$

alors que H_σ est associée à la fonction localement intégrable

$$H_\sigma(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = 1 - H(x).$$

Ainsi, on a

$$-\mathcal{F}T = C - 2i\pi H_\sigma = C - 2i\pi + 2i\pi H.$$

En comparant cette relation avec (12), on obtient :

$$2C - 2i\pi = 0, \text{ soit } C = i\pi,$$

ce qui montre finalement que

$$\mathcal{F}T = i\pi - 2i\pi H(x).$$

Une autre manière d'exprimer ce résultat est :

$$\mathcal{F}T = -i\pi\,\mathrm{sgn}(x), \text{ où sgn est la fonction “signe” : } \mathrm{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

7. Calcul de la transformée de Fourier de la fonction échelon

Enoncé : Calculer la transformée de Fourier de la fonction de Heaviside $H \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, définie par :

$$H(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On repart simplement du résultat de l'exercice précédent, selon lequel

$$H = \frac{1}{2} - \frac{1}{2i\pi}\mathcal{F}T,$$

où T est la distribution "valeur principale de $\frac{1}{x}$": $T = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Appliquant la transformée de Fourier à cette relation, on obtient alors :

$$\mathcal{F}H = \frac{1}{2}\mathcal{F}1 - \frac{1}{2i\pi}\mathcal{F}\mathcal{F}T.$$

Puisque $\mathcal{F}1 = \delta_0$, en vertu de l'Exercice 1, et en utilisant la formule d'inversion de Fourier

$$\mathcal{F}\mathcal{F}T = T_\sigma,$$

(voir (1), et la Question (v) de l'Exercice 1), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}H &= \frac{1}{2}\delta_0 - \frac{1}{2i\pi}T_\sigma \\ &= \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2i\pi}\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'imparité de $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$.