CORRECTION DU TD 5 : OPÉRATIONS SUR LES DISTRIBUTIONS

Contents

1. Exercice 1: La distribution valeur principale de $\frac{1}{x}$

Nous avons vu que toute fonction localement intégrable $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ induit une distribution $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ par la formule :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cette application définit bien une distribution d'ordre 0 sur $\mathbb{R}$. En effet, sa linéarité est immédiate. De plus, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, et pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans K, on a

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \leq \underbrace{\left(\int_K |f(x)|\,\mathrm{d}x\right)}_{<\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|\,;$$

autrement dit, T_f vérifie l'inégalité de continuité au sens des distributions, avec un indice $p_K = 0$ indépendant du compact K et une constante $C_K = \int_K |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

La "plupart" des "bonnes" fonctions f que l'on souhaiterait étudier par le prisme de la théorie des distributions sont des fonctions localement intégrables. Malheureusement, tel n'est pas le cas de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, qui n'est intégrable sur aucun voisinage de 0. On souhaiterait néanmoins définir une distribution associée à celle-ci. Le but de cet exercice est précisément de construire une telle distribution qui "capte" beaucoup des propriétés de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$: la *valeur principale* de $\frac{1}{x}$.

> **Enoncé:** Pour une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on définit :
>
> $$\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right).$$
>
> Montrer que $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est une distribution sur $\mathbb{R}$ et que $x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

Pour commencer cet exercice, il est essentiel de comprendre pourquoi la limite apparaissant dans la définition ci-dessus existe pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pour ce faire, soit une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ donnée, à support dans un compact $K \subset \mathbb{R}$, que l'on peut supposer inclus dans un intervalle de la forme

$[-M, M]$, pour $M > 0$ assez grand. Commençons par réecrire l'intégrale au second membre de la définition de $\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\rangle$:

$$\begin{aligned}
\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(-u)}{u}\,\mathrm{d}u + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le changement de variables $u = -x$ pour passer de la première ligne à la seconde.

Définissons à présent la fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}.$$

De par sa définition, ψ est une fonction à support compact sur $\mathbb{R}$ – comme φ, elle est à support dans $[-M, M]$ –, et elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $(-\infty, 0)$ et sur $(0, \infty)$. En réalité, elle est même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour s'en convaincre, on peut utiliser une astuce déjà employée dans le TD1, qui consiste à écrire la différence $\varphi(x) - \varphi(-x)$ sous forme d'une intégrale pour mieux faire apparaître x en facteur de cette expression :

$$\begin{aligned}
\forall x \neq 0, \quad \psi(x) &= \frac{1}{x}\int_{-x}^{x} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t, \\
&= \int_{-1}^{1} \varphi'(xu)\,\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le changement de variables $t = xu$ pour passer de la première ligne à la seconde. Puisque φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, le théorème de dérivation sous le signe somme permet facilement de montrer que la fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, ψ est une fonction test de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Notons également que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|\psi(x)| = \left|\int_{-1}^{1} \varphi'(xu)\,\mathrm{d}u\right| \leq \int_{-1}^{1} |\varphi'(xu)|\,\mathrm{d}u \leq 2 \sup_{u\in\mathbb{R}} |\varphi'(u)|. \tag{1}$$

En particulier, la fonction ψ continue en 0, et on peut donc écrire

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty} \psi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} \psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

La limite apparaissant dans la définition de $\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\rangle$ est donc bien définie pour toute fonction test φ.

De plus, puisque ψ est à support dans $[-M, M]$ et par (1), on a :

$$\begin{aligned}
\left|\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\rangle\right| &= \left|\int_{0}^{\infty} \psi(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_{0}^{M} \psi(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \int_{0}^{M} |\psi(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq 2M \sup_{u\in\mathbb{R}} |\varphi'(u)|.
\end{aligned}$$

Relisons nous : pour tout compact $K \subset R$ ($K \subset [-M, M]$) et pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans K, $|\langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \varphi\rangle|$ vérifie l'inégalité ci-dessus. Ceci révèle que $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est une distribution d'ordre 1 sur $\mathbb{R}$.

Remarque 1. *La distribution* $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ *est d'ordre* 1*, contrairement aux distributions induites par les fonctions de* $L^1_{loc}(\mathbb{R})$*, qui sont d'ordre* 0.

Montrons finalement que $x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)=1$. Pour ce faire, on écrit simplement, pour toute fonction test $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\langle x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right),\varphi\rangle &= \langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right),x\varphi\rangle\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{x\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \langle 1,\varphi\rangle,
\end{aligned}$$

où la première ligne découle de la définition du produit de la fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ $x\mapsto x$ avec la distribution $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ et la limite de la seconde ligne existe bel et bien, et vertu de ce qui précède. Ceci achève de montrer que $x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)=1$.

2. Exercice 2 : Quelques exemples d'application de la formule des sauts

Avant de traiter la correction de cette exercice, comme par faire un rappel sur la formule des sauts.

Nous avons vu que pour toute distribution $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on peut définir la distribution dérivée $T'\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ par la formule suivante :

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}),\quad \langle T',\varphi\rangle=-\langle T,\varphi'\rangle.$$

Comme on l'a vu au cours de la correction du TD1, cette définition est motivée et légitimée par le fait suivant : si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, en particulier, f est localement intégrable sur $\mathbb{R}$ (elle est continue !), et on peut donc s'intéresser à la distribution induite $T_f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Par la formule précédente, la dérivée de cette distribution s'écrit :

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}),\quad \langle T_f',\varphi\rangle=-\langle T_f,\varphi'\rangle=-\int_{\mathbb{R}}f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Utilisant maintenant le fait que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, une intégration par parties donne :

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}),\quad \langle T_f',\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}}f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\langle T_{f'},\varphi\rangle;$$

en d'autres termes, si f est "assez régulière", la dérivée $(T_f)'$ de la distribution associée à f coïncide avec la distribution $T_{f'}$ associée à la dérivée f' de f.

Lorsque la fonction f n'est plus de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, on peut se demander ce que devient ce résultat. Il est toujours possible de définir la distribution dérivée $(T_f)'$ par la formule (2), mais celle-ci n'est pas très parlante... La *formule des sauts* permet précisément de donner une formule explicite pour $(T_f)'$ lorsque f est supposée "un peu moins régulière" que $\mathcal{C}^1$, précisément lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Définition 1. *Soit $I=(a,b)$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (possiblement infini). On dit qu'une fonction $f:I\to\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I s'il existe $a=a_0<a_1<\ldots<a_{n-1}<a_n=b$ (où l'entier n dépend de f), induisant une subdivision de I en sous-intervalles (a_i,a_i+1), $i=0,\ldots,n-1$, telle que*

- *Pour tout $i=0,\ldots,n-1$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur (a_i,a_{i+1}) ;*
- *Pour tout $i=1,\ldots,n-1$, la fonction f admet des limites finies (mais possiblement différentes) à gauche et à droite en a_i, notées $f(a_i^-)$ et $f(a_i^+)$, respectivement :*

$$f(a_i^-)=\lim_{\substack{x\to a_i\\ x<a_i}}f(x),\quad \textit{et}\quad f(a_i^+)=\lim_{\substack{x\to a_i\\ x>a_i}}f(x).$$

Visuellement, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I est une fonction "bien régulière" sur I sauf en un nombre fini de points a_i, $i=1,\ldots,n-1$ où elle n'est pas dérivable et admet un "saut" d'amplitude finie $(f(a_i^+)-f(a_i^-))$, comme on peut le voir sur la Figure 1.

Une telle fonction n'est pas dérivable au sens usuel. En revanche, comme on l'a dit, on peut toujours définir sa dérivée au sens des distributions via la formule (2). La formule des sauts donne une formule beaucoup plus explicite pour cette dérivée, en fonction de la dérivée de f en dehors des points de discontinuité a_i, et des sauts $(f(a_i^+)-f(a_i^-))$ de f en ces points a_i.

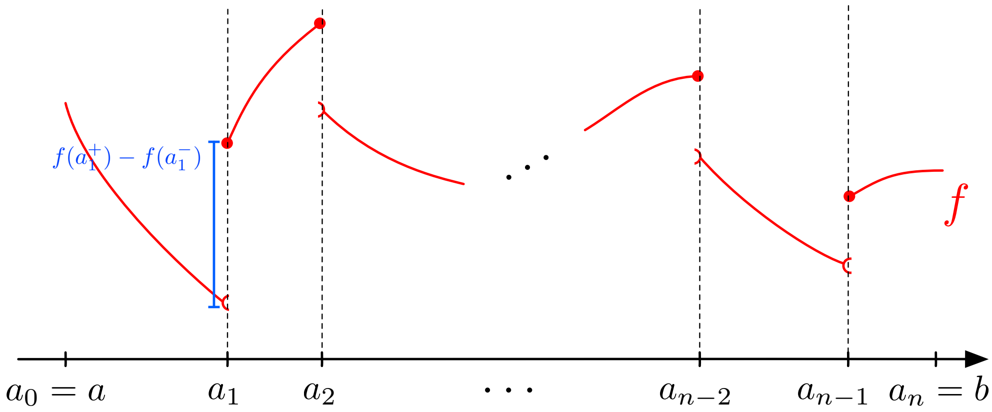

FIGURE 1. *Graphe d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.*

Théorème 1. *Soit $I = (a, b)$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (possiblement infini) et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I. Soit a_i les points de discontinuité de f, introduits dans la Définition 1. Alors la distribution dérivée $(T_f)'$ de T_f s'écrit :*

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{i=1}^{n-1} (f(a_i^+) - f(a_i^-))\delta_{a_i},$$

où la fonction f' présente au membre de droite désigne la fonction définie comme la dérivée de f partout où cela fait sens (i.e. en dehors des points a_i).

Remarque 2. *Grossièrement, la formule des sauts exprime le fait que la dérivée au sens des distributions d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux se calcule comme la dérivée de f au sens usuel, partout où cela fait sens (i.e. en dehors des points de discontinuité a_i), plus une somme de masses de Dirac pondérées par les sauts de f aux points a_i de discontinuité.*

Pour mieux comprendre cette formule, il n'est pas inutile de rappeler brièvement sa démonstration.

Preuve de la formule des sauts. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I, et soit

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$$

la subdivision de I faisant apparaître ses points de discontinuité. Puisque f est localement intégrable sur I, sa distribution associée $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est bien définie, et sa dérivée vérifie par définition (voir (2))

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \quad \langle (T_f)', \varphi \rangle = -\int_I f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour mieux identifier cette formule, on aimerait, comme dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, faire une intégration par parties, afin de transférer la dérivée de φ sur f. Ceci est impossible, car f n'est pas dérivable aux points a_i. En revanche, on peut subdiviser l'intégrale ci-dessus de sorte à permettre cette opération :

$$\begin{aligned}
\langle (T_f)', \varphi \rangle &= -\sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n-1} \Big[f(x)\varphi(x) \Big]_{a_i}^{a_{i+1}} \\
&= \int_I f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n-1} \Big(f(a_{i+1})\varphi(a_{i+1}^-) - f(a_i^+)\varphi(a_i) \Big),
\end{aligned}$$

où la seconde ligne résulte d'une intégration par parties sur chaque sous-intervalle (a_i, a_{i+1}) (qui est licite !). La fonction f' apparaissant au second membre de la troisième ligne ci-dessus est définie comme la dérivée de f partout où cela fait sens En ré-ordonnant la dernière somme au second membre ci-dessus, on obtient :

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle = \int_I f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n-1} \Big(f(a_i^+) - f(a_i^-) \Big) \varphi(a_i),$$

ce qui est exactement la formule attendue. $\square$

> **Enoncé:** Calculer dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ les dérivées des distributions suivantes :
> (i) $T = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.
> (ii) $T = ae^{-a|x|}$ avec $a > 0$. Calculer $-T'' + a^2 T$.
> (iii) $T = \log|x|$.

(i): On applique la formule des sauts à la fonction $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. Celle-ci est de classe $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles $(-\infty, 0)$ et $(0, \infty)$. De plus, elle admet des limites finies à gauche et à droite en $x = 0$:

$$f(0^-) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to-\infty} \arctan(y) = -\frac{\pi}{2},$$

et

$$f(0^+) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to+\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, et la formule des sauts donne

$$\begin{aligned} (T_f)' &= T_{f'} + (f(0^+) - f(0^-))\delta_0 \\ &= -\frac{1}{1+x^2} + \pi\delta_0, \end{aligned}$$

où la seconde ligne découle du calcul (facile !) de la dérivée de la fonction f sur $(-\infty, 0)$ et $(0, \infty)$.

(ii): Cette question peut également être traitée par la formule des sauts : T est en effet la distribution associée à la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = ae^{ax}\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x) + ae^{-ax}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x),$$

où l'on a noté par commodité $\mathbb{1}_I$ la fonction caractéristique d'un sous-ensemble $I \subset \mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{1}_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(-\infty, 0)$ et sur $(0, \infty)$, et on a, au point $x = 0$:

$$f(0^-) = a \text{ et } f(0^+) = a.$$

En dehors de ce point, on a :

$$\forall x \neq 0, \quad f'(x) = a^2 e^{ax}\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x) - a^2 e^{-ax}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

Par la formule des sauts, on obtient alors :

$$\begin{aligned} (T_f)' &= T_{f'} + (f(0^+) - f(0^-))\delta_0 \\ &= a^2 e^{ax}\mathbb{1}_{(-\infty,0)} - a^2 e^{-ax}\mathbb{1}_{(0,\infty)}, \end{aligned}$$

où comme d'habitude, on a identifié la distribution associée à f' avec la fonction f'.

On souhaite dériver encore cette distribution une fois de plus. On s'appuie encore sur la formule des sauts, puisque $(T_f)'$ est de la forme T_g, où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction

$$g(x) = a^2 e^{ax}\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x) - a^2 e^{-ax}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$: elle est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $(-\infty, 0)$ et $(0, \infty)$, avec :

$$\forall x \neq 0, \quad g'(x) = a^3 e^{ax}\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x) + a^3 e^{-ax}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

De plus, les limites à gauche et à droite et g s'écrivent :

$$g(0^-) = a^2, \text{ et } g(0^+) = -a^2.$$

La formule des sauts donne donc :

$$\begin{aligned}(T_f)'' = (T_g)' &= T_{g'} + (g(0^+) - g(0^-))\delta_0 \\ &= a^3 e^{ax} \mathbb{1}_{(-\infty,0)} + a^3 e^{-ax} \mathbb{1}_{(0,\infty)} - 2a^2\delta_0.\end{aligned}$$

Puisque $T = ae^{ax}\mathbb{1}_{(-\infty,0)} + ae^{-ax}\mathbb{1}_{(0,\infty)}$, on a donc prouvé la formule :

$$-(T_f)'' + a^2 T_f = 2a^2\delta_0.$$

(iii): On ne peut pas appliquer la formule des sauts à cette fonction, puisqu'elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux : en effet, sa limite (à gauche ou à droite) en 0 est infinie !

Pour calculer la dérivée de T, on revient donc à la définition de la distribution T' : pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \log|x| \varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

On voudrait naturellement intégrer par parties dans cette dernière expression, pour retrouver une intégrale impliquant φ et non sa dérivée. Ceci n'est pas directement possible puisque la fonction $x \mapsto \log|x|$ n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ (toujours en raison de la valeur infinie qu'elle prend en 0). En revanche, cette fonction est localement intégrable sur $\mathbb{R}$ (le vérifier !), et on peut donc écrire :

$$\langle T', \varphi \rangle = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \log|x| \varphi'(x)\,\mathrm{d}x,$$

ou encore

$$\langle T', \varphi \rangle = -\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} \log|x| \varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log|x| \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Or, pour $\varepsilon > 0$ donné, une intégration par parties (qui est possible puisque les intégrales ci-dessus sont définies sur des intervalles qui évitent 0) produit :

$$\begin{aligned}-\int_{\varepsilon}^{\infty} \log|x|\varphi'(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log|x|\varphi'(x)\,\mathrm{d}x &= \log|\varepsilon|\varphi(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \log|\varepsilon|\varphi(-\varepsilon) + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x. \\ &= \log|\varepsilon|(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) + \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

D'une part, un développement limité de la fonction test $x \mapsto \varphi(x)$ en $x = 0$ donne

$$\log|\varepsilon|(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) = 2\varepsilon \log|\varepsilon| + \mathrm{o}(\varepsilon)\log|\varepsilon|) = \mathrm{o}(1).$$

D'autre part, nous avons vu au cours de l'exercice 1 que la limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \right)$$

existe, et vaut $\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \rangle$, où $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est la distribution valeur principale.

Ainsi, on obtient

$$\langle T', \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\log|\varepsilon|(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) \Big) + \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \right) = \langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \rangle.$$

En d'autres termes :

$$\Big(\log|x| \Big)' = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right),$$

une formule qui "mime" la formule bien connue concernant la dérivée ponctuelle de la fonction $x \mapsto \log|x|$ sur $(-\infty, 0)$ et $(0, \infty)$.

3. Exercice 3 : Distributions dont la dérivée est nulle

On sait depuis longtemps que, si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée nulle en tout point de $\mathbb{R}$, alors nécessairement, f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Le propos de cet exercice est de généraliser cette observation au cas des distributions : nous allons en effet montrer que toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dont la dérivée au sens des distributions est nulle, est en réalité une distribution (fonction) constante. Autrement dit, il n'existe pas plus de distributions dont la dérivée est nulle que de fonctions dont la dérivée est nulle.

Enoncé: Soit T une distribution sur $\mathbb{R}$. Montrer que
$$\Big(T' = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R})\Big) \Rightarrow T = \text{cste}.$$

Pour résoudre cet exercice, on utilise une stratégie très semblable à celle employée pour la résolution de l'exercice 3 du TD 1. Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) = 0$, alors on a, pour toute fonction test $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,
$$\langle T, \psi' \rangle = 0.$$
Ainsi, si toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ s'écrivait sous la forme $\varphi = \psi'$, pour une certaine fonction test $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on obtiendrait immédiatement que
$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \psi' \rangle = 0.$$
Tel n'est pas le cas. Cependant, pour une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ donnée, nous allons écrire φ comme la somme d'une fonction test de la forme ψ', (pour une certaine fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$) qui est aussi “proche” de φ que possible, et d'un “reste”. L'application de T à φ se réduira alors à l'application de T à ce reste, et l'on espère que cela fournira suffisamment d'informations sur T pour permettre de caractériser T.

Pour mettre au point cette décomposition, remarquons que pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, à support dans un certain compact $[-M, M]$ de $\mathbb{R}$, on peut toujours écrire

$$\varphi(x) = \psi'(x), \text{ où } \psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t, \tag{3}$$

l'intégrale ci-dessus étant bien définie puisque φ est à support compact. La fonction ψ définie plus haut est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie :
$$\psi(x) = 0 \text{ pour } x < -M, \text{ et } \psi(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \text{ pour } x > M.$$
Ainsi, φ est “presque” de la forme voulue : il ne manque à ψ que d'être nulle pour les “grandes” valeurs de x. En particulier, on voit que si φ satisfait la condition additionnelle $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$, alors φ est bien de la forme $\varphi = \psi'$ avec $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Formalisons maintenant cette idée : soit $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction test fixée, telle que $\int_{\mathbb{R}} \alpha(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Pour une fonction test arbitraire $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, écrivons alors :
$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x),$$
où φ_1, φ_2 sont les deux fonctions test définies par
$$\varphi_1(x) := \left(\varphi(x) - \left(\int_R \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)\alpha(x)\right) \text{ et } \varphi_2(x) := \left(\int_R \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)\alpha(x).$$
Par construction, on a $\int_{\mathbb{R}} \varphi_1(x)\,\mathrm{d}x = 0$, et donc, par ce qui précède, il existe $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ – définie par (3) – telle que $\varphi_1 = \psi'$. Ainsi, $\langle T, \varphi_1 \rangle = 0$. On a finalement :
$$\begin{aligned}\langle T, \varphi \rangle &= \langle T, \varphi_2 \rangle \\ &= \langle T, \alpha \rangle \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= C\langle 1, \varphi \rangle\end{aligned}$$
où la constante C est définie par $C = \langle T, \alpha \rangle$.

Ainsi, on a bien prouvé que T est la distribution constante $T = C$.

4. Exercice 4 : Un problème aux limites pour le Laplacien

Enoncé: Soit Ω le disque unité de $\mathbb{R}^2$, et $\Gamma = \partial\Omega$ sa frontière. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On considère le problème :

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = \varphi & \text{sur}\Gamma. \end{array} \right.$$

Montrer que ce problème admet une unique solution dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.

On procède par analyse et synthèse.

Étape 1 : Commençons par supposer qu'une telle fonction u existe, et tâchons de la caractériser. On effectue un changement de variables en coordonnées polaires : soit

$$(5) \qquad T : \begin{array}{ccc}]0,1]\times]-\pi,\pi[& \to & \Omega \setminus \{x=(x_1,x_2),\ x_2 = 0\}, \\ (r,\theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

et notons $v(r,\theta) = u \circ T(r,\theta)$. Puisque u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{\Omega}$, v se prolonge en une fonction $v : [0,1] \times \mathbb{R}$ qui est périodique par rapport à la variable θ, i.e.

$$\forall r \in [0,1], \theta \in \mathbb{R}\ \ v(r,\theta+2\pi) = v(r,\theta).$$

Cette observation permet de décomposer v en série de Fourier par rapport à la variable θ :

$$(6) \qquad v(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(r)e^{in\theta},\ \text{où } v_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(r,\theta)e^{-in\theta}\,d\theta.$$

Remarquons que, puisque v est de classe $\mathcal{C}^\infty$, ses coefficients de Fourier $v_n(r)$ ont la propriété de décroissance suivante :

$$(7) \qquad \forall p \geq 0, \exists C_p > 0, \forall r \in [0,1],\ \ |v_n(r)| \leq \frac{C_p}{n^p};$$

(ceci est un avatar du théorème de Riemann-Lebesgue, et se démontre par intégrations par parties successives).

Maintenant, caractériser v revient à caractériser chacun des coefficients de Fourier $v_n(r)$. Pour ce faire, on utilise l'expression du Laplacien en coordonnées polaires, au moyen de laquelle la première équation de (4) se réécrit :

$$(8) \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r,\theta) = 0,\ \ r \in (0,1),\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Utilisant la forme (6) de v, ainsi que l'unicité de la décomposition de Fourier, ceci devient, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$r^2 v_n''(r) + r v_n'(r) - n^2 v_n(r) = 0;$$

(la dérivation sous le signe somme menant à cette relation étant légitimée par la propriété de décroissance des coefficients (7)).

La résolution de ces équations différentielles ordinaires donne l'existence de constantes a_n et b_n telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_n(r) = a_n r^n + b_n r^{-n}, \quad \text{si } n \neq 0, \\ v_0(r) = a_0 \log r + b_0 \end{array} \right.$$

Utilisant le fait que les fonctions de la forme $b_n r^{-n}$, pour $n > 0$, $a_n r^n$ pour $n < 0$ et $a_0 \log r$ ne sont pas continues sur $[0,1]$ (sauf si les constantes associées sont nulles), on trouve finalement que v est de la forme :

$$(9) \qquad v(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n r^{|n|} e^{in\theta},$$

où l'on a changé le nom des constantes, sans perte de généralité.

Reste alors à caractériser ces constantes. On utilise à cet effet la condition aux limites du problème (4). Écrivant la décomposition en série de Fourier de la fonction $\theta \mapsto \varphi(\theta)$ (ou plus précisément de la fonction $\varphi \circ T$, où T est le changement de variables (5) en coordonnées polaires) :

$$\varphi(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi_n e^{in\theta}, \text{ où } \varphi_n := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta) e^{-in\theta}\, d\theta, \tag{10}$$

on voit que $d_n = \varphi_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Finalement, on a prouvé que *si* u est une solution de (4) de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω, alors la fonction $v(r,\theta)$ s'écrit sous la forme (9) avec pour constantes $d_n = \varphi_n$ les coefficients de Fourier (10) de la décomposition de φ. En particulier, si une fonction u satisfaisant (4) existe, elle est unique.

Étape 2 : On procède dans un second temps à la synthèse de l'étude précédente pour montrer l'existence d'une solution u de (4) de classe $\mathcal{C}^\infty$. Au cours de la première étape, on a précisément démontré que la seule solution possible sécrit sous forme polaire :

$$v(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi_n r^{|n|} e^{in\theta},$$

où les φ_n sont les coefficients de Fourier de $\theta \mapsto \varphi(\theta)$. Il s'agit donc de vérifier que cette formule définit bien une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1] \times \mathbb{R}$. Mais ceci résulte simplement du fait que φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, et donc que ses coefficients de Fourier satisfont les inégalités de décroissance (7).

Remarque 3. *Il existe une preuve alternative de l'unicité de la solution de (4), totalement différente de celle que nous avons vue plus haut. Celle-ci est intéressante car elle se généralise à beaucoup de situations, mais elle ne donne malheureusement aucune indication quant à la forme de la solution.*

Soit u_1, u_2 deux solutions de (4) dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Alors la différence $v := u_1 - u_2$ est encore dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ et satisfait :

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \textit{dans } \Omega, \\ v = 0 & \textit{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Multipliant la première équation de ce système par v et utilisant la formule de Green, on obtient :

$$0 = \int_\Omega \Delta v v \, dx = -\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla v \, dx,$$

où le terme de bord s'annule dans la formule de Green puisque $v = 0$ sur Γ. Ainsi, on a :

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx = 0,$$

et donc la fonction v est constante sur Ω. Puisqu'elle est nulle sur Γ, il s'ensuit $v = 0$, soit le résultat attendu.